Kortsamlarens dilemma

Kortsamlarens dilemma är ett klassiskt problem (eng. *Coupon collectors' problem*). Vi börjar dock med att undersöka ett med problem med tärningskast – ”Hur många kast måste man i genomsnitt göra för att alla prickar ska komma upp”.

I den här övningen dyker *talföljder* upp och vi visar hur man kan arbeta med *summasymbolen* $\sum$. Därför passar denna övning bäst för kurs 5. Många elever med intresse för sannolikhet kan dock klara av detta ändå eftersom Nspire-dokumentet innehåller ordentliga instruktioner.

Sid 2: Här har vi gjort beräkningar med summatecknet. Du infogar summasymbolen genom att från verktygs-menyn välja Beräkningar/Analys/Summa. Sedan skriver man i de tomma fälten och trycker sedan på enter för att utföra beräkningen. Trycker man på Ctrl och enter samtidigt så får man approximativa värden.

Du kan också direkt beräkna summan så här med TI-Nspire CAS analysverktyg:

$$\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{6}{k}\right) \blacktriangleright 14.7$$

Vi kan tänka oss situationen att vi ska samla ihop **100** olika idolkort som finns förpackade i någon vara vi köper. Varje förpackning innehåller alltså 1 kort. Då blir resultatet

$$\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{100}{k}\right) \blacktriangleright 518.738$$

Tänk på att om vi står där med 99 st olika idolkort och ska ha det sista måste vi i genomsnitt köpa 100 varor till. ***Det är de sista köpen som kostar.***

På nästa sida har vi en graf med tillhörande tabell som visar genomsnittligt antal kast, köp eller dylikt som vi måste göra för olika värden på *n*, där *n* kan vara antalet sidor på en tärning eller antalet kort.

Om man vill se alla termer i talföljderna infoga man en matematikruta (Ctrl m)och använder funktionen ***seq***:

$$\text{seq}\left(\frac{6\cdot 1}{x},x,1,6\right) \blacktriangleright \{6.,3.,2.,1.5,1.2,1.\}$$

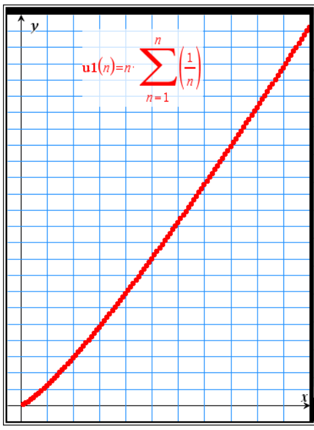
$$\text{seq}\left(\frac{100\cdot 1}{x},x,1,100\right)$$
$$\blacktriangleright \{100.,50.,33.3333,25.,20.,16.6667,14.2857,12.5,11.1111,10.,9.09091,8.3$$

$$\text{sum}\left(\text{seq}\left(\frac{6\cdot 1}{x},x,1,6\right)\right) \blacktriangleright \frac{147}{10}$$

$$\text{sum}\left(\text{seq}\left(\frac{100\cdot 1}{x},x,1,100\right)\right) \blacktriangleright 518.738$$

Sid 3: Här har vi matat in talföljdsuttrycket i med summasymbolen. Man kan i grafapplikationen arbeta med många olika former av matematiska relationer.

Vi har här också valt att ha en delad sida med en tabell till höger. Där kan vi lätt läsa av värdet för olika värden på *n*. Man väljer visning av tabell från verktygsmenyn.

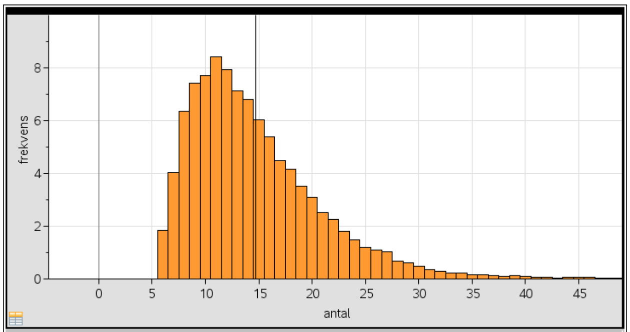


n	u1(n):= n*∑(1/n,n,1,n)
97.	500.236
98.	506.393
99.	512.56
100.	518.738
101.	524.925
102.	531.122
103.	537.329
104.	543.546
105.	549.773
106.	556.009
107.	562.254

518.73775176394

Sid 4:

Visar en simulering. Frekvensen visar procenttal.



Diagrammet visar fördelningen efter en *simulering* av antalet behövda kast för att att få upp alla nummer. Vi har lagt in en lodrät linje vid det förväntade värdet 14,7 kast.

Sid 5-7 Här gör vi simulering utifrån frågeställningen och visar också hur man kan beräkna antalet ”olika”. Det visar sig att basen i det naturliga logaritmsystemet är inblandad.

Hur många olika får jag i genomsnitt efter 100 köp

En annan variant av problemet med de 100 idolkorten är hur många *olika* kort vi i genomsnitt får efter att ha köpt 100 varor. Vi tar och simulerar detta och gör fyra kastserier med slumptalsgeneratorn.

För att alstra 100 heltaliga slumptal mellan 1 och 100 skriver man i formelfältet

=randint(1,100,100)

Vi gör 4 kastserier och tittar sedan på sidan efter på resultatet i diagramform.

Om man trycker på **ctrl r** så får vi nya slumptal och diagrammen uppdateras.

Analysera nu diagrammen *visuellt* och försök göra en uppskattning av hur många *olika* nummer du får?

Vi ser att oftast kommer samma nummer upp två, tre och ibland fyra gånger och att vissa nummer inte kommer upp alls.

Det här går att räkna på också. Man kan visa att man i genomsnitt får ca 63 st olika kort. Beräkningen är

$100-100\cdot\left(\frac{99}{100}\right)^{100}$ som kan skrivas om

som $100-100\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)^{100} \blacktriangleright 63.3968$

Om vi låter antalet kort växa över all gränser får vi gränsvärdet med CAS−motorn

$$100-100\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right) \blacktriangleright 100-100\cdot e^{-1}$$

Här dyker alltså konstanten ***e*** upp!