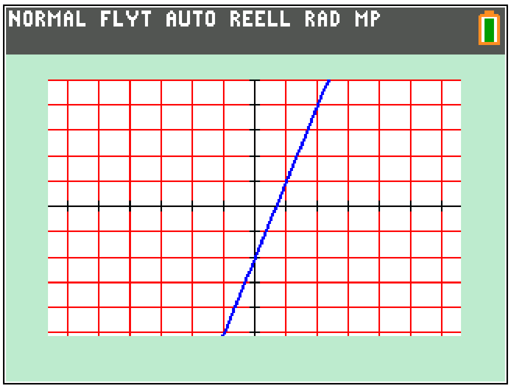
Hantera linjära funktioner

I kurs 1 sysslade man med funktioner som kan skrivas på formen $y = kx + m$. I kurs 2 går man vidare och arbetar med linjära funktioner som man kan skriva på olika sätt. Man gör många algebraiska omskrivningar och studerar bl.a. hur det s.k. *k*-värdet hänger ihop med koordinater för punkter på räta linjer.

Vi plottar nu linjen $y = 3x - 2$.



Vi ska nu skriva om detta uttryck på formen $y = k(x - a) + b$. Varför vi gör så kommer du att inse senare.

Ett sätt att skriva om det är

$y = 3(x - 1) + 1$

eftersom $y = 3(x - 1) + 1 = 3x - 3 + 1 = 3x - 2$

Man kan också skriva om det som

$y = 3(x - 2) + 4$ (utveckla uttrycket så ser du)

Om du är osäker kan du plotta de två omskrivningarna. Du kommer att se att du har tre linjer som täcker varandra.

Titta på den första omskrivningen $y = 3(x - 1) + 1$ igen:

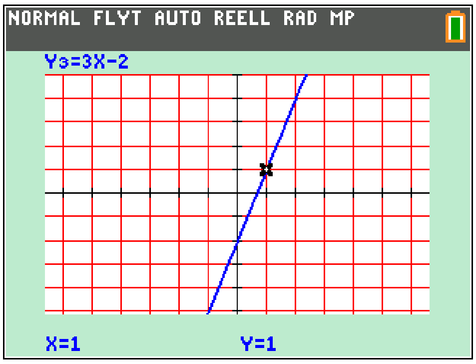
Om vi sätter in *x*=1 i uttrycket får vi $y = 3(1 - 1) + 1 = 1$. Det betyder ju att punkten med koordinaterna (1, 1) ligger på linjen.

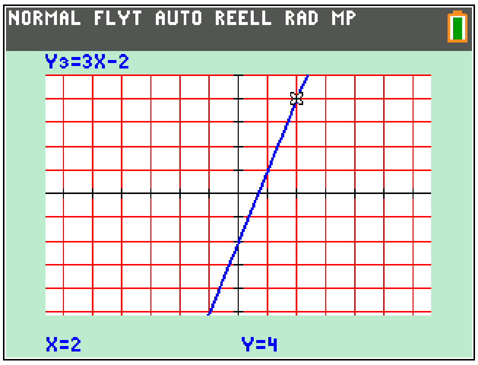
Samma sak om vi sätter in x = 2 i uttrycket $y = 3(x - 2) + 4$ Vi får:

$y = 3(2 - 2) + 4 = 4$

Punkten (2, 4) ligger också på linjen.

Vi kontrollerar grafiskt genom att spåra punkterna (1, 1) och (2, 4) med verktyget TRACE.





Det här betyder alltså att om vi skriver en linjär funktion på formen

$y = k(x - x_1) + y_1$

Så ligger punkten (x_1, y_1) på linjen.

Uttrycket brukar skrivas om som

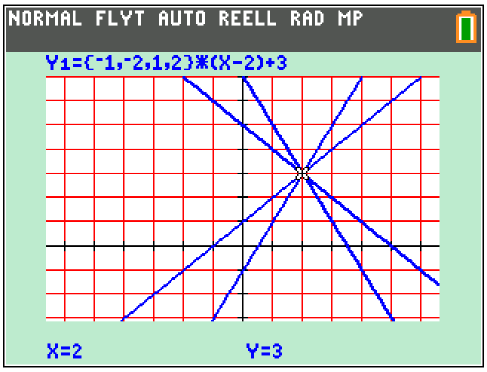
$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$

Att skriva på detta sätt brukar kallas att skriva funktionen på *enpunktsform*.

Vi har en funktion som skrivs som

$y = k(x - 2) + 3$

Och vi vill att *k* ska anta olika värden kan vi skriva funktionen enligt nedan. Vi skriver värdena för k inom hakparenteser och kan då plotta flera funktioner samtidigt. Alla linjer går igenom punkten (2, 3).

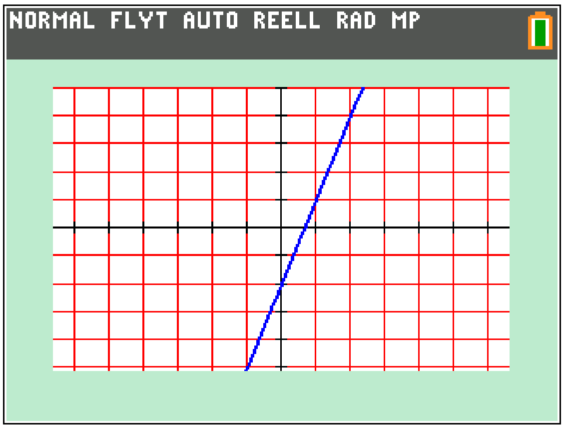


Som du såg på förra bilden så hade linjerna olika lutning. Det är *k*-värdet som avgör hur stor lutningen är. Positiva k-värden ger linjer som lutar uppåt och negativa k-värden ger linjer som lutar nedåt.

Vi går tillbaka till den funktion vi började med:

$y = 3x - 2.$

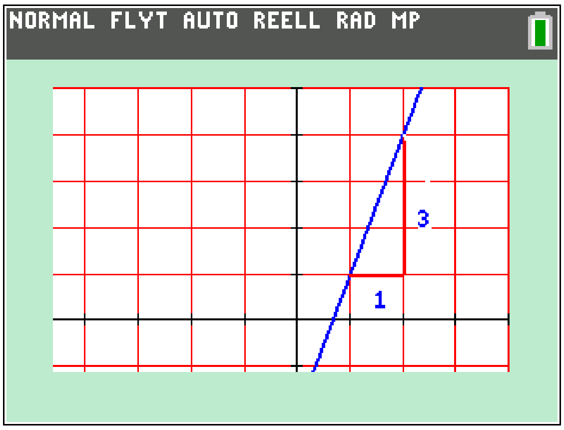
Vi plottar den en gång till:



Vi såg tidigare att vi kunde skriva om den som

$y = 3(x-1)+1$ eller som $y = 3(x-2)+4$

Linjen går alltså genom punkterna (1, 1) och (2, 4). Vi tittar nu närmare på lutningen på linjen, alltså *k*-värdet.



k-värdet eller lutningen kan utryckas som förändringen i *y*-led dividerat med förändringen i *x*-led.

När vi går från punkten (1, 1) till punkten (2, 4) så ökar *y*-värdet med 3 och *x*-värdet med 1. Detta ger att *k*-värdet är lika med

$$\frac{4-1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

Om vi har två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) på en linje så är alltså *k*-värdet

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Om vi tar funktionen $y = 3x - 2.$ så skrev vi ju om den på formen

$$y = k(x - x_1) + y_1$$

Nu kan vi då skriva om den som

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1 \text{ eller}$$

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)}$$

Formen ovan kallas *tvåpunktsformen*. Det betyder att om vi känner två punkter på en linje så kan vi få ett uttryck för linjen.

Ett exempel: En linje går igenom punkterna (2, -1) och (5, 3). Vi kan då teckna linjens ekvation som

$$y - (-1) = \frac{3-(-1)}{5-2} \cdot (x-2)$$

Här har som

Vi förenklar nu i steg:

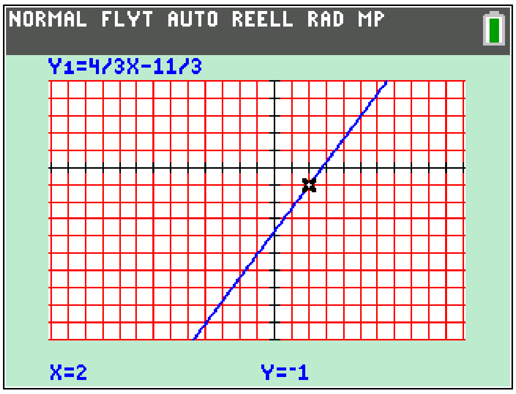
$$y + 1 = \frac{3+1}{5-2} \cdot (x-2)$$

$$y = \frac{4}{3} \cdot (x-2) - 1 = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} - 1$$

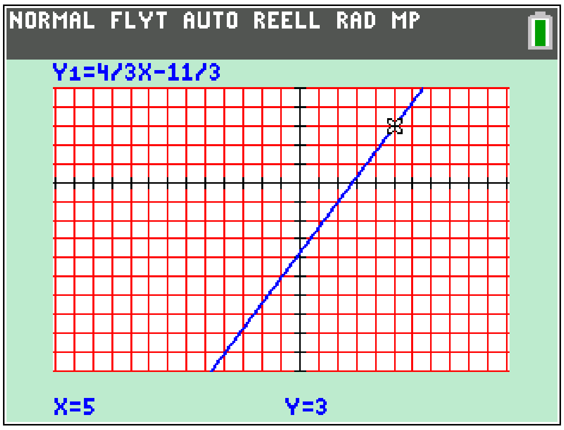
$$y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$$

Vi plottar nu denna funktion och ser om det stämmer att linjen går igenom punkterna:

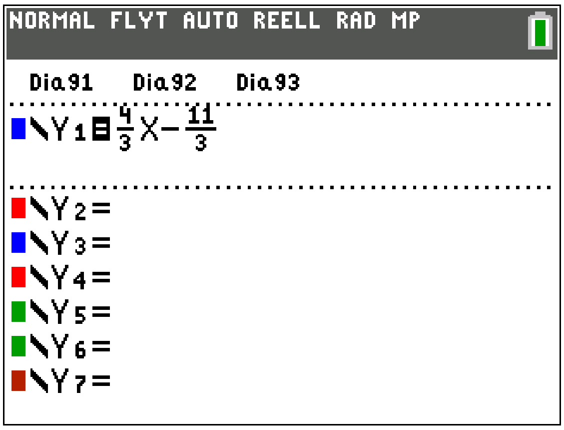
Första punkten stämmer:



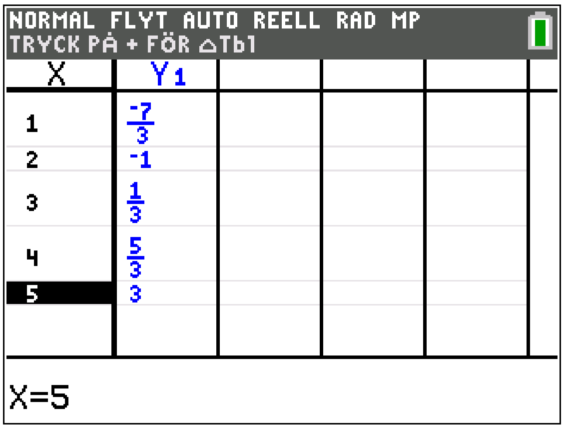
Andra punkten stämmer:



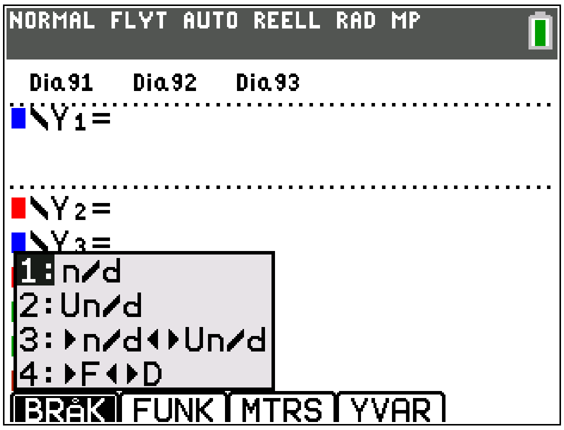
Om vi skriver in funktionen i bråkform på detta sätt:



så får du värdetabellen på detta sätt:



Se då först till att du under MODE ställer in läget som MATHPRINT. När du sedan skriver in funktionen så trycker du på ALPHA Y=. Du får du upp en bråkmall och kan skriva in funktionen så som det brukar se ut i läroböckerna.



Välj alternativ 1 för att skriva 4/3 som $\frac{4}{3}$.

Samma sak för $\frac{11}{3}$.

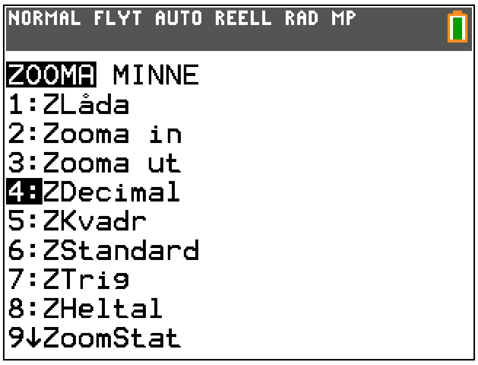
Något om vinkelräta linjer

I allmänhet har vi i alla plottningar försökt att få s.k. *ortonormerade* koordinatsystem, dvs en enhet på x-axeln är lika lång som en enhet på *y*-axeln. Ibland är detta inte möjligt eftersom själva visningsskärmen har ett bestämt längd/höjd-förhållande.

Om t.ex. ekvationen för en linje skrivs som $y = kx + m$ och för en annan linje som $y = -\frac{1}{k}x + m$ så är linjerna *vinkelräta*.

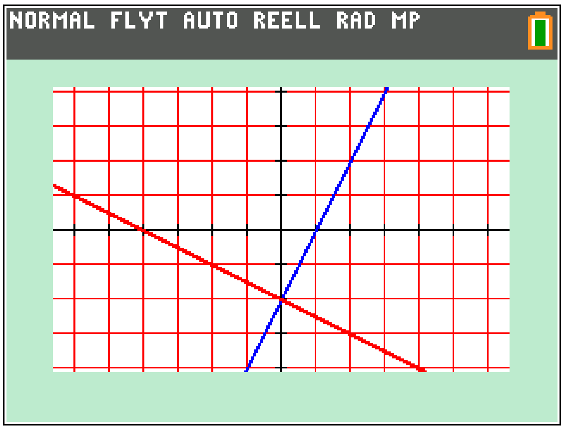
T.ex. är linjerna $y = 2x - 2$ och $y = \frac{1}{2}x - 2$ vinkelräta mot varandra.

Vi ska nu plotta dessa funktioner med inställningen ZDecimal:



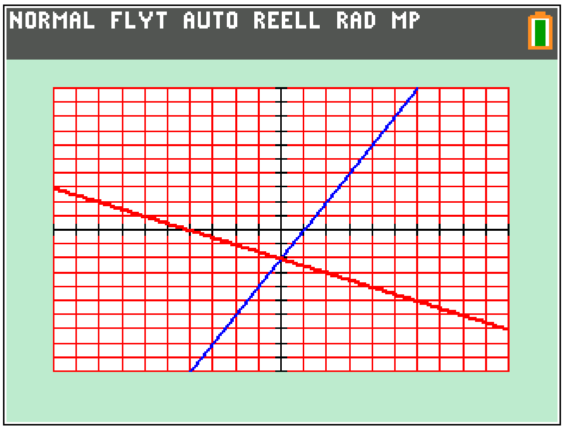
Tryck på WINDOW så ser du att skalan på x-axeln är -6,6 till 6,6 och på y-axeln -4,1 till 4,1. En enhet blir då lika lång på axlarna.

Vi plottar nu:

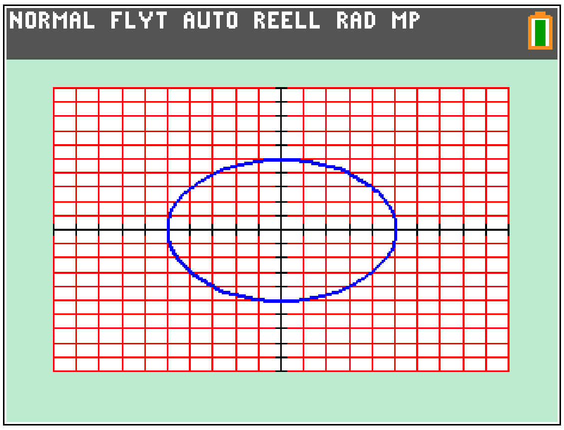


Linjerna är vinkelräta mot varandra.

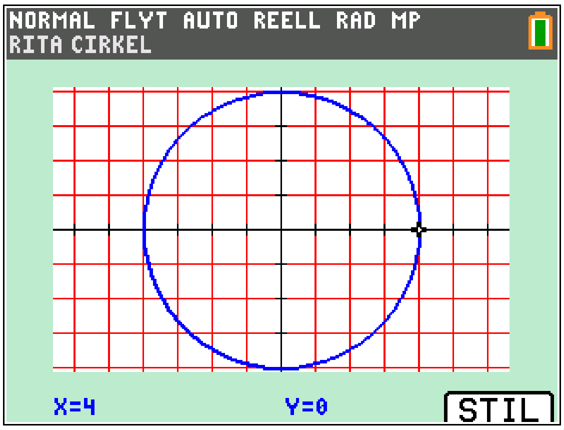
Om vi istället väljer räknarens *standardfönster* (-10 till 10 på båda axlarna) blir det så här:



Man kan lätt tro att linjerna inte är vinkelräta. Det här är speciellt viktigt när man ska studera geometriska objekt. Den här cirkeln ser ut som ellips. Det är en cirkel med radien 5 enheter.



Med ett ortonormerat koordinatsystem ser det ut så här:



Linjer som skär varandra

Summan av två tal är 12 och differensen mellan dem är 4. Vilka är talen?

Det här är en uppgift som man kan lösa genom att ställa upp två ekvationer. Om vi kallar talen för x och y så kan du skriva:

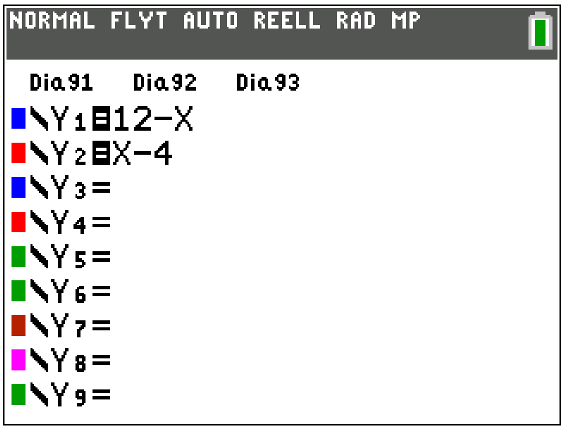
$x + y = 12$

$x - y = 4$

Den första ekvationen kan vi skriva om som $x = 12 - y$ och om vi sätter in detta uttryck för x i den andra ekvationen får vi

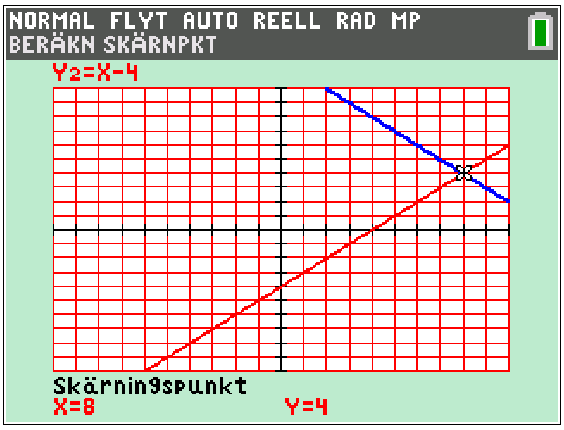
$12 - y - y = 4$ som vi lätt kan lösa och vi får *x* = 4. Vi får sedan att y = 8 eftersom summan ska bli 12.

Om du gör detta grafiskt och ritar de två linjerna ska vi först skriva om ekvationerna på formen y = . Vi får då



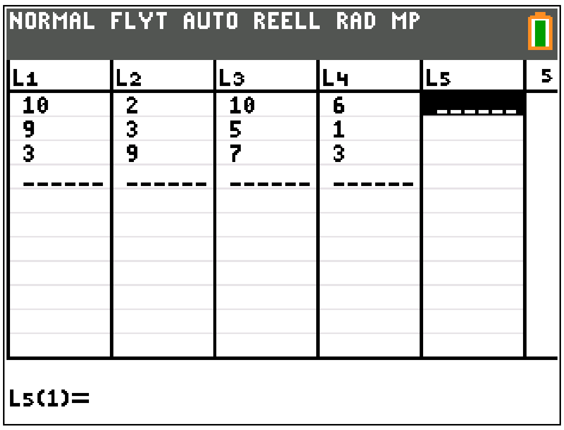
Nu plottar vi i ett standardfönster och beräknar skärningspunkten numeriskt med verktyget Skärning som finns under menyn i [2nd][CALC]

Vi får skärningspunktens koordinater:

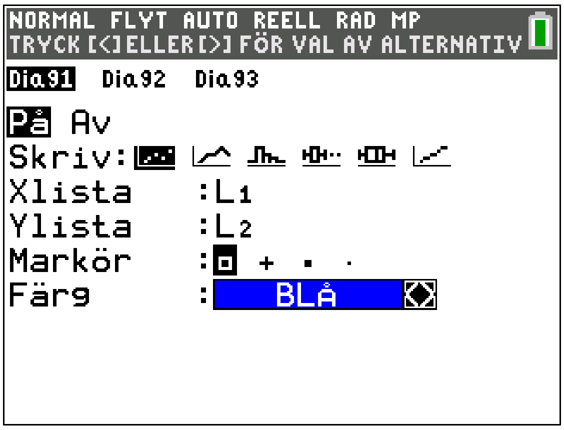


Om det här var svårt så finns det ett tredje sätt att närma sig problemets lösning:

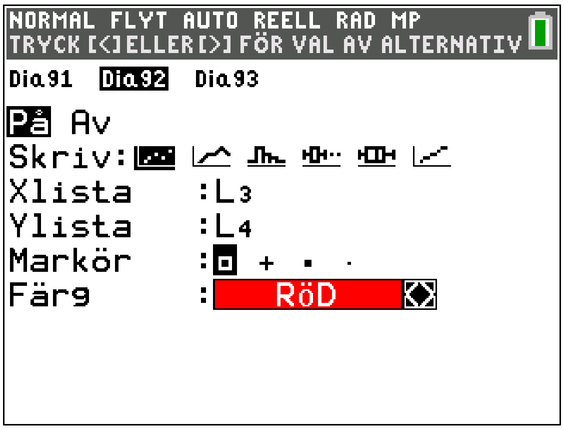
Öppna statistikeditorn och skriv in 3 talpar som får summan 12 i kolumnerna L1 och L2. Gör likadant i kolumn L3 och L4: skriv in tre talpar vars differens är 4.



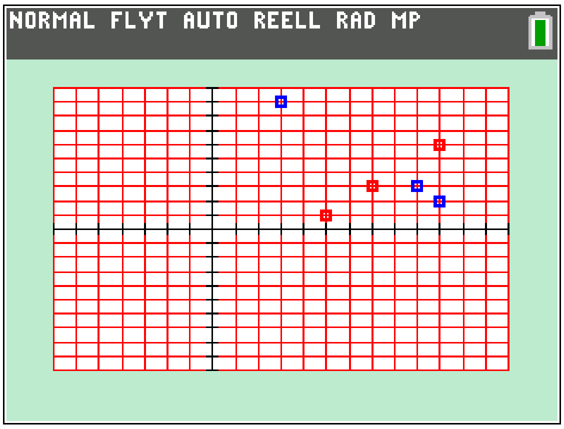
Vi ska nu plotta dessa talpar. Tryck på [2nd] [STAT PLOT] och ställ in plottningen för de första talparen (diagram 1):



Gör likadant för de andra talparen:



Nu kan vi plotta punkterna som representeras av de 6 talparen:



Om man drar linjer genom de tre blå och de tre röda punkterna så får man lösningen. Det finns alltså en gemensam punkt och koordinaterna för den är lösningen på problemet.