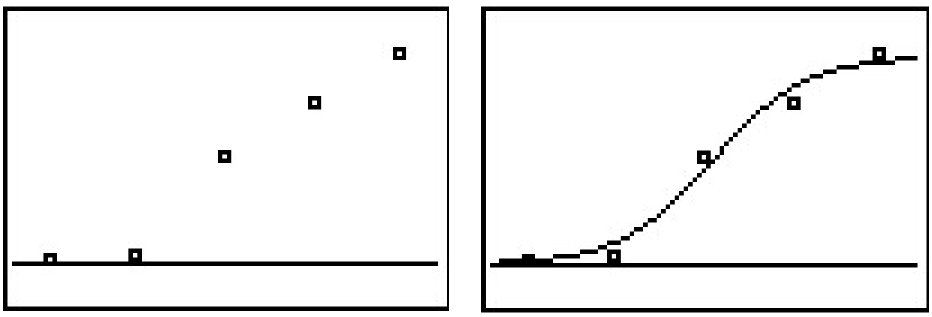
Cahiers T³ Europe
Vlaanderen nr. 18

Numb3rs

We gebruiken allemaal elke dag wiskunde…

Geertrui Van Eetvelde



KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

Numb3rs

We gebruiken allemaal elke dag wiskunde…

Geertrui Van Eetvelde

T³ EUROPE

NUMB3RS: inleiding

We gebruiken elke dag wiskunde
om het weer te voorspellen, de tijd te bepalen,...
geld te hanteren.
Wiskunde is meer dan formules en vergelijkingen.
Het is logica.
Het is redeneren.
Het is je verstand gebruiken om de grootste mysteries op te lossen.

Bij het begin van elke uitzending van NUMB3RS wordt dit herhaald.
Wiskunde is veelal niet erg populair bij leerlingen en deze uitzendingen proberen de betekenis van wiskunde een beetje dichter bij de mensen te brengen.
Texas Instruments heeft op basis van deze serie, in samenwerking met CBS en The National Council of Teachers of Mathematics dit initiatief opgezet.
Hiermee wil het de talrijke toepassingen van wiskunde promoten en het onderwijs in de wiskunde een steun in de rug geven.
De wiskunde die gebruikt wordt in elke episode van NUMB3RS is gebaseerd op waar gebeurde FBI onderzoeken. De programma's worden gemaakt in overleg met wiskundigen om ervoor te zorgen dat alles wiskundig correct verloopt.
Over de wiskunde in elke uitzending werden dan werkteksten gemaakt voor leerkrachten en leerlingen. Via deze uit het leven gegrepen voorbeelden wordt geprobeerd de leerlingen enthousiast te maken voor wiskunde.
Ik heb enkele voorbeelden vertaald en soms een beetje aangepast aan ons onderwijs in Vlaanderen.
De wiskundige fragmenten mogen door de overeenkomst van Texas Instrument met CBS in de klas getoond worden.
Hopelijk biedt dit voor onze leerlingen hier en daar ook wat afwisseling en kunnen we hen hiermee een beetje meer motiveren voor onze lessen.
Op `http://www.weallusematheveryday.com/tools/waumed/home.htm` kom je veel meer hierover te weten.

Geertrui Van Eetvelde

Inhoudstafel

• Het centrum van alles. 1

doelgroep: vierde jaar, vrije ruimte in de derde graad of als onderzoeksopdracht.

• Wanneer is $1 + 1 \neq 2$. 9

doelgroep: vrije ruimte in de derde graad (groepentheorie).

• Groei, meetkundige rij. 14

doelgroep: vierde jaar, lw 5.

• Hoe dateren we. 18

doelgroep: leerlingen van de derde graad met zeer weinig wiskunde.

• Verjaardag. 22

doelgroep: vierde jaar lw 5 en leerlingen van de derde graad die kansrekening bestuderen.

• Hoe betrouwbaar is een test? 27

doelgroep: vierde jaar lw 5 en leerlingen van de derde graad die kansrekening bestuderen.

• Screening van verdachten. 31

doelgroep: derde graad (regel van Bayes).

• Logistische regressie 34

doelgroep: derde graad.

• Juist of fout? 37

doelgroep: derde graad.

• Wij zijn nummer 1! 41

doelgroep: derde graad (toepassing exponentiële en logaritmische functies).

• SIR modellen. 45

doelgroep: derde graad, sterke leerlingen.

Het centrum van alles

Onderwerp: Cirkels
Doel: Onderzoek van het middelpunt en het verband tussen dit middelpunt en verschillende types van driehoeken.
Materiaal: TI-83 Plus/TI-84 Plus, met CABRI^{TM} Jr.App

Inleiding

Charlie helpt zijn broer Don om de woonplaats te vinden van een moordenaar. Om dat te doen moet hij het centrum vinden van een onregelmatig gebied omdat hij vermoedt dat de moordenaar daar woont. Om het aan zijn broer duidelijk te maken toont hij hem een fontein die water laat neerkomen in een cirkelvormig gebied. Hij probeert uit te leggen dat je, ook wanneer je de bron van het water niet ziet, enkel en alleen door te kijken naar waar de waterdruppels neerkomen kan vinden waar ze vandaan komen.

Bespreek met de leerlingen:

Men kan onmiddellijk met een driehoek beginnen wanneer men de omgeschreven cirkel wil bepalen, maar men zou ook gewoon van drie niet-collineaire punten kunnen vertrekken en aantonen dat daar slechts één cirkel door gaat.
Vervolgens kan men met CABRI^{TM} Jr.App het middelpunt van een cirkel zoeken. Deze applicatie kan men downloaden van `http://education.ti.com/cabrijr`. Indien deze niet op de rekenmachine kan ingeladen worden dan kan men natuurlijk gewoon met passer en lineaal aan de slag gaan. Het voordeel van CABRI^{TM} Jr.App is dat het dynamische tekeningen maakt die de leerlingen kunnen manipuleren.

De leerlingen kunnen dan observeren dat het snijpunt van de middelloodlijnen het middelpunt van de cirkel is. Ze kunnen ook het verband onderzoeken tussen de plaats van het middelpunt van de cirkel en de aard van de driehoek.

Voor je met deze activiteit aan de slag kan gaan moeten de leerlingen vertrouwd zijn met de begrippen: straal, koorde, segment, collineair, middelloodlijn, middelpunt, omschrijven en zwaartepunt.

Antwoorden op de vragen voor de leerlingen:

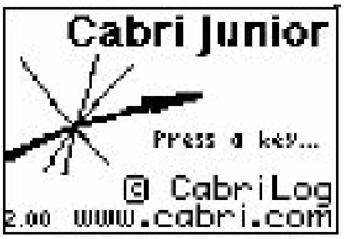
1. De cirkel wordt een lijn.
2. De middelloodlijnen zijn evenwijdig.
3. De driehoek is scherp.
4. De driehoek is stomp.
5. De driehoek is rechthoekig.
6. Het is het middelpunt van de driehoek.

Het centrum van alles

Charlie helpt zijn broer Don om de woonplaats te vinden van een moordenaar. Om dat te doen moet hij het centrum vinden van een onregelmatig gebied omdat hij vermoedt dat de moordenaar daar woont. Om het aan zijn broer duidelijk te maken toont hij hem een fontein die water laat neerkomen in een cirkelvormig gebied. Hij probeert uit te leggen dat je, ook wanneer je de bron van het water niet ziet, enkel en alleen door te kijken naar waar de waterdruppels neerkomen kan vinden waar ze vandaan komen.

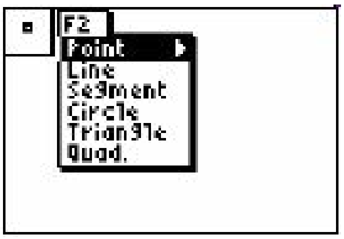
Wanneer drie punten gegeven zijn is het de bedoeling om een punt te vinden dat even ver gelegen is van die drie gegeven punten. Om dit punt te vinden moeten we een cirkel zoeken die door die drie punten gaat. We kunnen het probleem dan herformuleren tot: zoek het middelpunt van de cirkel die door drie gegeven punten gaat. Je kan hiervoor CABRI™ Jr.App gebruiken op je GRM. Volg de instructies die hier staan en beantwoord op het einde de gestelde vragen.

1



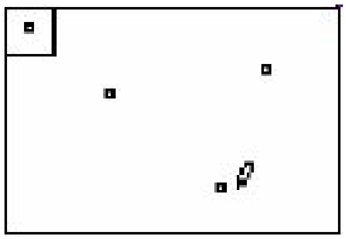
Kies [APPS] en dan CABRI JR.

2



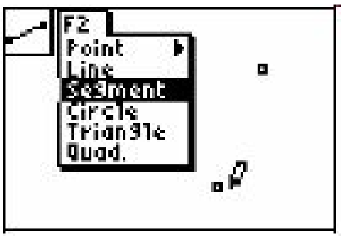
Om 3 niet-collineaire punten te bekomen druk [WINDOW] [▷] en kies **Point**, druk [ENTER].

3



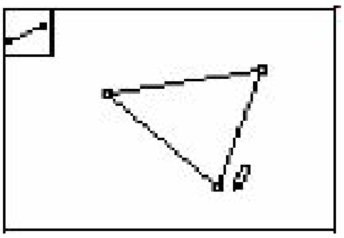
Beweeg de cursor; druk [ENTER] waar je een punt wil plaatsen; zorg dat je geen collineaire punten hebt.

4



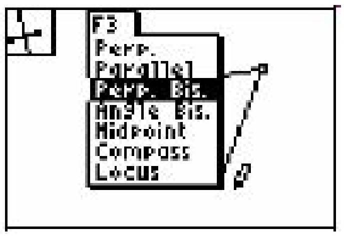
Duw [WINDOW] en kies **Segment**.

5



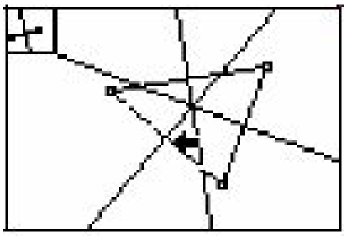
Beweeg de cursor naar één van de punten druk [ENTER]. Dit geeft een eindpunt aan van het segment. Beweeg dan de cursor naar het andere eindpunt druk [ENTER] om het segment vast te leggen. Herhaal dit voor de andere segmenten.

6



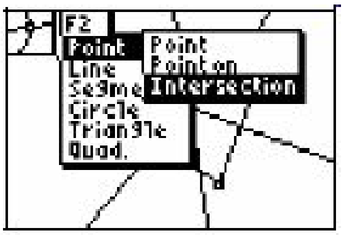
Druk [ZOOM] en kies **Perp.Bis.** druk [ENTER].

7



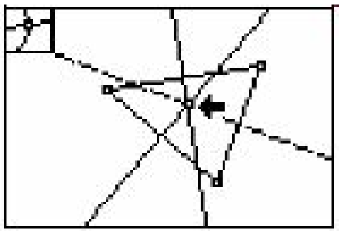
Om de middelloodlijn te creëren, beweeg je de cursor naar een segment tot de cursor in een pijl verandert en het segment oplicht. Druk [ENTER]. Herhaal dit voor de andere segmenten.

8



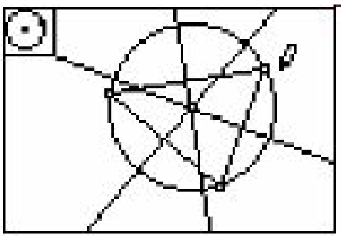
Merk op dat de drie middelloodlijnen elkaar snijden in één punt. druk [WINDOW] [▷] en kies **Intersection**.

9



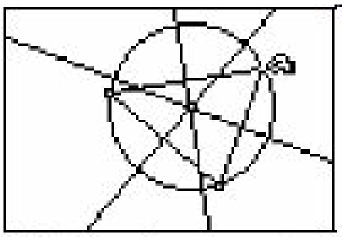
Beweeg de cursor naar het punt waar de middelloodlijnen snijden. De cursor verandert in een pijl en beide lijnen lichten op. Druk [ENTER] om het snijpunt vast te leggen.

10



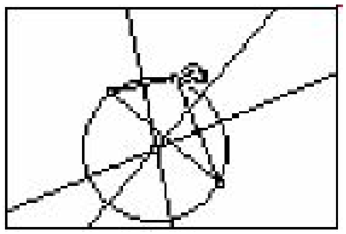
Om een cirkel te tekenen met dit snijpunt als middelpunt, druk [WINDOW] en kies **Circle**. Plaats de cursor op het snijpunt en druk [ENTER]. Dit markeert het middelpunt. Beweeg de cursor naar een punt dat je getekend hebt druk [ENTER] om de cirkel te tekenen.

11



Nu we de cirkel hebben gebruiken we Cabri Jr. om de figuur te verkennen. Druk [CLEAR] om de tekentool af te zetten. Om een punt op de cirkel te bewegen, verplaats je de cursor naar één van de hoekpunten en druk je de [ALPHA] knop om het punt te selecteren.

12



Nu het punt is geselecteerd, beweeg de cursor rond en merk op hoe de cirkel verandert. Let ook op het verband tussen het snijpunt van de middelloodlijnen en het middelpunt van de cirkel.

Maak nu gebruik van de applicatie om te antwoorden op de volgende vragen:

1. Beweeg de punten zodat ze op één lijn liggen. Wat gebeurt er met de cirkel?
2. Terwijl de punten op één lijn liggen , wat merk je dan op i.v.m. de middelloodlijnen?
3. Beweeg de hoekpunten van de driehoek zodanig dat het middelpunt van de omgeschreven cirkel binnen de driehoek ligt. Welk soort driehoek heb je nu?
4. Beweeg de hoekpunten van de driehoek zodanig dat het middelpunt van de omgeschreven cirkel buiten de driehoek ligt. Welk soort driehoek heb je nu?
5. Beweeg de hoekpunten van de driehoek zodanig dat het middelpunt van de omgeschreven cirkel op een zijde van de driehoek ligt. Welk soort driehoek heb je nu?
6. Beweeg de hoekpunten van de driehoek zo dat de drie zijden even lang worden. Wat merk je op over het middelpunt van de cirkel.

Het doel van deze activiteit is de leerlingen op een korte en eenvoudige manier te laten kennismaken met een zeer uitgebreid wiskundig onderwerp. TI wil zo leerkrachten en leerlingen aanmoedigen om meer te leren over dit onderwerp via de uitbreiding en door persoonlijk onderzoek.

Het centrum van alles, uitbreiding

Inleiding

In de leerlingenactiviteit bekeken we een meetkundige benadering van het probleem: het middelpunt van een cirkel vinden die door drie gegeven niet-collineaire punten gaat.
Wanneer je echter reeds determinanten hebt bestudeerd dan kan je ook hiermee aan de slag. Voor Don en het FBI zou dit zeer bruikbaar zijn omdat ze dan dadelijk de coördinaten zouden hebben voor de plaats waar de moordenaar zich bevindt.
We kunnen met determinanten onderzoeken of drie punten collineair zijn in het vlak. Wanneer $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ dan zijn de punten collineair, zoniet dan kunnen we naar het middelpunt en de straal van de cirkel door die drie punten beginnen zoeken.
Omdat de determinantvergelijking van een cirkel door drie niet-collineaire punten niet echt tot de parate kennis van onze leerlingen behoort volgt hier een afleiding.
Wanneer we ons afvragen of vier punten $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$ op eenzelfde cirkel liggen, dan willen we het stelsel

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + ax_2 + by_2 + c = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + ax_3 + by_3 + c = 0 \\ x_4^2 + y_4^2 + ax_4 + by_4 + c = 0 \end{cases}$$

oplossen. Dit stelsel mag slechts één oplossing hebben voor (a, b, c)
Dit is zo wanneer

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & -(x_1^2 + y_1^2) \\ x_2 & y_2 & 1 & -(x_2^2 + y_2^2) \\ x_3 & y_3 & 1 & -(x_3^2 + y_3^2) \\ x_4 & y_4 & 1 & -(x_4^2 + y_4^2) \end{vmatrix} = 0$$

of een beetje anders geschikt:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dit betekent ook dat de determinantvergelijking van een cirkel door drie niet-collineaire punten $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ gegeven wordt door

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Je zou deze vergelijking nu kunnen herschikken tot de vorm waarin je het middelpunt en de straal kan aflezen maar dat is een beetje ingewikkeld. We bekijken het daarom een beetje anders:
De vergelijking van een cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r is

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Wanneer we drie punten van de cirkel hebben $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, dan bekomen we het stelsel

$$\begin{cases} (x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 = r^2 \\ (x_2-a)^2 + (y_2-b)^2 = r^2 \\ (x_3-a)^2 + (y_3-b)^2 = r^2 \end{cases}$$

in de drie onbekenden a, b en r.
Een beetje uitrekenen en herschikken geeft:

$$\begin{cases} -2x_1a - 2y_1b = r^2 - (x_1^2 + y_1^2) - a^2 - b^2 \\ -2x_2a - 2y_2b = r^2 - (x_2^2 + y_2^2) - a^2 - b^2 \\ -2x_3a - 2y_3b = r^2 - (x_3^2 + y_3^2) - a^2 - b^2 \end{cases}$$

Wanneer we de eerste vergelijking aftrekken van de tweede en van de derde vergelijking dan bekomen we:

$$\begin{cases} (-2x_2 + 2x_1)a + (-2y_2 + 2y_1)b = -(x_2^2 + y_2^2) + (x_1^2 + y_1^2) \\ (-2x_3 + 2x_1)a + (-2y_3 + 2y_1)b = -(x_3^2 + y_3^2) + (x_1^2 + y_1^2) \end{cases}$$

Dit is een stelsel van Cramer.

$$\begin{aligned} a &= \frac{\begin{vmatrix} -(x_2^2 + y_2^2) + (x_1^2 + y_1^2) & -2y_2 + 2y_1 \\ -(x_3^2 + y_3^2) + (x_1^2 + y_1^2) & -2y_3 + 2y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2x_2 + 2x_1 & -2y_2 + 2y_1 \\ -2x_3 + 2x_1 & -2y_3 + 2y_1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} -(x_1^2 + y_1^2) & -2y_1 & 1 \\ -(x_2^2 + y_2^2) + (x_1^2 + y_1^2) & -2y_2 + 2y_1 & 0 \\ -(x_3^2 + y_3^2) + (x_1^2 + y_1^2) & -2y_3 + 2y_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2x_1 & -2y_1 & 1 \\ -2x_2 + 2x_1 & -2y_2 + 2y_1 & 0 \\ -2x_3 + 2x_1 & -2y_3 + 2y_1 & 0 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

analoog vinden we

$$b = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2+y_1^2 & 1 \\ x_2 & x_2^2+y_2^2 & 1 \\ x_3 & x_3^2+y_3^2 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{-2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

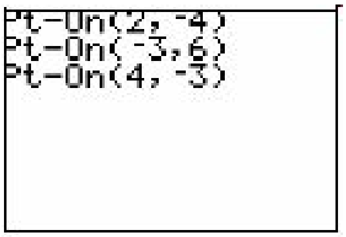
Vertrekkend van de determinantvergelijking van de cirkel kunnen we dus via minoren de coördinaatgetallen van het middelpunt van de cirkel vinden.

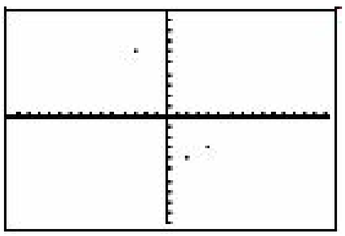
$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

en voor $M(a,b)$ geldt dan:

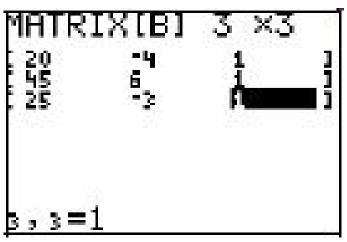
$$a = \frac{\mathsf{M}_{12}}{2\mathsf{M}_{11}} \qquad b = \frac{\mathsf{M}_{13}}{-2\mathsf{M}_{11}}$$

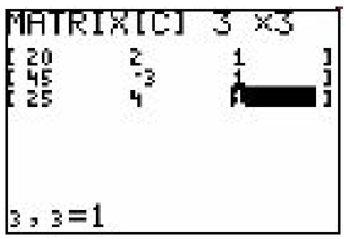
Beschouw nu het volgende voorbeeld: zoek het middelpunt van de cirkel die door de drie punten $(2,-4)$, $(-3,6)$ en $(4,-3)$ gaat.
Eerst en vooral kan je eens gaan kijken naar de plaats van de punten in het coördinatenstelsel met de draw instructie van de GRM. (om **Pt-On(** te vinden druk $\boxed{\text{2nd}}$[DRAW], ga naar het **POINTS** menu, en selecteer **1:Pt-On(**)



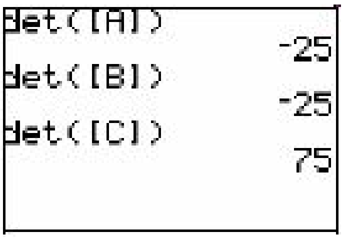


Definieer vervolgens de drie matrices:





Bereken dan van elk van die matrices de determinant:



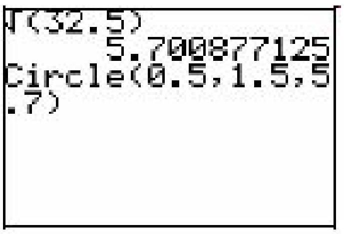
De coördinaatgetallen van het middelpunt van de cirkel zijn dan:

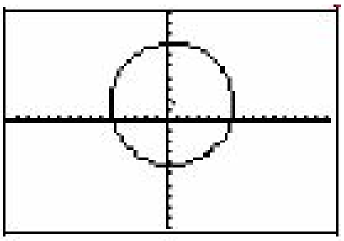
$$a = \frac{-25}{2(-25)} = \frac{1}{2} \qquad \text{en} \qquad b = \frac{75}{-2(-25)} = \frac{3}{2}$$

Je kan dan de straal van de cirkel vinden via de afstandsformule: bereken bijvoorbeeld de afstand van het gevonden middelpunt tot het punt $(2, -4)$:

$$r = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-4 - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{2} \approx 5,7$$

Tenslotte kan je de GRM gebruiken om te controleren of de cirkel met gevonden middelpunt en straal wel degelijk door de opgegeven punten gaat.





Bijkomende bronnen

- Een Java applet dat aantoont hoe het middelpunt van de cirkel verandert wanneer de punten waar de cirkel door gaat veranderen kan je vinden op: `http://web.mit.edu/linkagedemo/www/circlepage1.html`
- Algebraïsche oplossing: `http://home.att.net/~srschmitt/circle3pts.html`
- Meer verkennend werk met Cabri Jr. over cirkels kan je terugvinden op `http://education.ti.com/exchange`

Wanneer is 1+1≠2

Onderwerp: Een beetje groepentheorie
Doel: Aantonen dat in sommige situaties $1 + 1 \neq 2$
Materiaal: TI-83 Plus/TI-84 Plus.

Inleiding

In Convergentie schrijft Charlie op het bord: $1+1 = 2$ en hij geeft zijn studenten als huiswerk de taak om uit te leggen waarom hij juist is en waarom hij verkeerd is. De meeste studenten zijn vertrouwd met de optelling van reële getallen. Sommigen zijn ook vertrouwd met het optellen van complexe getallen. Elk van deze verzamelingen getallen vormt een *groep* voor de bewerking *optellen*, omdat de optelling in die verzamelingen voldoet aan de volgende vier eigenschappen:

- **Inwendig:** Als a en b tot de verzameling behoren, dan behoort $a + b$ ook tot de verzameling;
- **Associativiteit:** Voor elke a, b en c in de verzameling, $a + (b + c) = (a + b) + c$;
- **Eenheidselement:** Er is een eenheidselement voor de optelling (dat we 0 noemen) zodat voor alle a: $a + 0 = 0 + a = a$;
- **Invers:** Elk element a heeft een invers voor de optelling (we noemen dit $-a$) zodat $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

In elk van de voor ons vertrouwde getallenverzamelingen is $1 + 1 = 2$ waar, het is dus vrij eenvoudig in te zien waarom de uitspraak van Charlie waar is. (*Bewijzen* dat dit waar is is echter heel wat anders. Bertrand Russell en Alfred Whitehead gebruikten de logica om dit aan te tonen in het klassieke driedelige werk *Principia Mathematica* (1910-1913), maar het duurde wel 362 pagina's om tot het resultaat te komen dat $1 + 1 = 2$). Toch zijn er ook heel bruikbare systemen waarin $1 + 1 \neq 2$, meer bepaald de groep met slechts twee elementen.
In wat hier volgt behandelen we situaties uit het alledaagse leven waar we $1 + 1$ anders *interpreteren* dan zijnde gelijk aan 2. Sommige problemen zijn hier uitgewerkt maar de leerlingen zouden er ook nog andere kunnen vinden.
In de uitbreiding leren de leerlingen voldoende over groepentheorie om te begrijpen dat het ook wel logisch kan zijn om $1 + 1 = 0$ te stellen wanneer de groep maar twee elementen bevat nl. 0 en 1.

Bespreek met de leerlingen:

Wanneer je een antwoord vindt op een wiskundige vraag, is het dan altijd het enige goede antwoord? Niet altijd! Wanneer je de gemiddelde lengte berekent van een groep volwassenen dan zou je antwoord kunnen zijn: 168,876 cm, maar dan zou je waarschijnlijk wel afronden naar 169 cm. Heel dikwijls formuleer je het antwoord zodat het zo zinvol mogelijk overkomt. In deze activiteit zal je ontdekken dat de basisvraag hoeveel is $1 + 1$ niet altijd met 2 moet beantwoord worden.

Antwoorden op de vragen voor de leerlingen:

1. 1 dozijn + 1 dozijn = 24
2. Als x de kostprijs is van 1 CD, dan is $1x + 1x = 1x$ want de tweede CD is er gratis bij.
3. De man woont in de Eikenlaan nr.11 en koopt nummers om op zijn brievenbus te kleven.
4. Sam zal $1 + 1 = 2$ km gewandeld hebben, maar de afstand tussen de twee huizen is (door de stelling van Pythagoras) $\sqrt{2}$ km.
5. 60° (de wandeling van Sam en de afstand tussen de twee huizen bepalen een gelijkzijdige driehoek met zijde 1 km).
6. $\{1,4;\ 1,3;\ 2,7\}; \{1,\ 1,\ 3\}$; $1,4$ en $1,3$ worden allebei afgerond tot 1, maar de som $2,7$ wordt afgerond tot 3.
7. De antwoorden zullen verschillen. Een mogelijk antwoord is $A = 0,7$ en $B = 0,6$.
8. Elk getal dat wordt afgerond op 1 moet kleiner zijn dan $1,5$, zodat de som van twee zulke getallen steeds kleiner zal zijn dan 3 en nooit kan afgerond worden tot 4.

Wanneer is 1+1≠2

Charlie schrijft $1 + 1 = 2$ op het bord en vraagt aan zijn studenten om uit te leggen waarom dit waar is en waarom dit niet waar is. We gebruiken $1 + 1 = 2$ elke dag, maar laten we nu ook eens situaties bekijken waar $1 + 1 \neq 2$.

We spelen met eenheden

1. De familie Peeters heeft geen eieren meer. Mr. Peeters koopt een dozijn eieren wanneer hij van het werk naar huis komt, zonder te weten dat zijn vrouw ook op weg van haar werk naar huis een dozijn eieren koopt. Verklaar waarom hier kan gelden $1 + 1 = 24$.

2. In een winkel loopt een actie waarbij je tijdelijk bij een CD uit de top 10 een tweede CD gratis krijgt. Waarom is nu $1 + 1 = 1$.

3. Een man gaat naar een doe het zelf winkel en vraagt aan een winkelbediende hoeveel een 1 kost. De man antwoordt dat dit een halve euro kost. OK zegt de man, ik neem dan 11. Hij moet één euro betalen. Hier is immers $1 + 1 = 11$. Wat kocht deze man?

We spelen met meetkunde

4. In een nieuwe verkaveling zijn alle straten evenwijdig of loodrecht op elkaar. Tom wandelt van zijn huis 1km in westelijke richting langs de Parkstraat tot aan de pizzeria en vandaar stapt hij 1km in noordelijke richting langs de Nieuwstraat naar het huis van zijn ouders. Hoe groot is de afstand tussen het huis van Tom en de ouderlijke woning? Verklaar waarom hier $1 + 1 = \sqrt{2}$.

5. Veronderstel dat de Parkstraat en de Nieuwstraat elkaar niet loodrecht sneden dan zou $1 + 1 = 1$ kunnen zijn. Onder welke hoek moeten de twee straten elkaar dan snijden.

We spelen met afrondingen

6. Heel dikwijls worden getallen afgerond, denk maar aan de benzineprijzen die tot op drie cijfers na de komma worden gegeven, maar zo kan je natuurlijk met eurocenten niet betalen.
Stel op je rekentoestel **A**$= 1,4$ en **B**$= 1,3$ (doe dit met de **STO** instructie) en bereken vervolgens **A+B**.
Wijzig nu met het **MODE** menu de display van **FLOAT** naar **0**. Bekijk nu **A**, **B** en **A+B** en verklaar waarom $1 + 1 = 3$.

7. Zoek getallen **A** en **B** waarvoor ook onder deze omstandigheden $1 + 1 = 1$

8. Verklaar waarom je hier nooit $1 + 1 = 4$ kan uitkomen.

Zet je rekenmachine terug in **MODE FLOAT**.

Het doel van deze activiteit is de leerlingen op een korte en eenvoudige manier te laten kennismaken met een zeer uitgebreid wiskundig onderwerp. TI wil zo leerkrachten en leerlingen aanmoedigen om meer te leren over dit onderwerp via de uitbreiding en door persoonlijk onderzoek.

Wanneer is 1+1≠2, uitbreiding

Voor de leerling

- Een *groep* is een algebraïsche structuur met één operator (zoals de optelling) die aan vier voorwaarden voldoet.

  - **Inwendig:** Als a en b tot de verzameling behoren, dan behoort $a + b$ ook tot de verzameling;
  - **Associativiteit:** Voor elke a, b en c in de verzameling, $a + (b + c) = (a + b) + c$;
  - **Eenheidselement:** Er is een eenheidselement voor de optelling (dat we 0 noemen) zodat voor alle a: $a + 0 = 0 + a = a$;
  - **Invers:** Elk element a heeft een invers voor de optelling (we noemen dit $-a$) zodat $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

  Er bestaat ook een interessante groep met uitsluitend de elementen 0 en 1 erin, en waarin de optelling gedefinieerd wordt zoals in bijgevoegde tabel:

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	0

  Voor welke eigenschap van een groep is het hier absoluut noodzakelijk dat $1 + 1 \neq 2$? Waarom *vereist* het invers dat $1 + 1 = 0$?

- Men kan bij groepen ook de vermenigvuldiging gebruiken. Voor de verzameling $\{1, -1\}$ geven we de resultaten in bijgevoegde tabel:

*****	**1**	**−1**
1	1	−1
−1	−1	1

  Kan je nu ook zelf de tabel aanvullen voor een groep met drie elementen voor de optelling waarbij je 0 als eenheidselement gebruikt?

+	**0**	**1**	**2**
0			
1			
2			

Verwante onderwerpen

Er zijn twee verschillende groepen met vier elementen. De ene is zoals de groepen die je gezien hebt voor twee en drie elementen (cyclische groepen genoemd), de andere is de groep van Klein. Alle hier beschouwde groepen beschikken nog over een extra eigenschap nl. de commutativiteit: $a + b = b + a$ voor alle elementen a en b.
De optelling en de vermenigvuldiging van reële getallen is commutatief. Dergelijke groepen die ook over de commutatieve eigenschap beschikken noemen we Abelse groepen. (Genoemd naar de Noorse wiskundige Niels Abel(1802-1829). In 2001 nam de Noorse regering ter gelegenheid van zijn 200e geboortedag in 2002 het initiatief tot het instellen van de Abelprijs, met als doel de wiskunde te promoten, in het bijzonder voor jonge mensen.)
Niet alle groepen zijn ook Abelse groepen, de meest bekende niet-Abelse groep is wellicht de multiplicatieve groep van de 2×2 matrices.

Bijkomende bronnen

- Een mooi overzicht over kleine eindige groepen zoals hier bekeken kan je vinden op:
  `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/modalg/smallgroups.html`
- Je kan uiteraard ook terecht op:
  `http://nl.wikipedia.org/wiki/Groepentheorie`
- En vrij actueel omdat een Belg, Jacques Tits, de Abelprijs gewonnen heeft, bekendgemaakt op 28/3/2008.
  `http://www.abelprisen.no/en/prisvinnere/2008/marcus/index.html`

Groei, meetkundige rij

Onderwerp: Meetkundige rijen
Doel: expliciet voorschrift vinden voor de $n-$de term van een meetkundige rij.
Materiaal: TI-83 Plus/TI-84 Plus.

Inleiding

In Identiteitscrisis komt Charlie op het spoor van een methode om te frauderen door geld van bankrekeningen te halen. De dader haalt hier geld af van een rekening en gaat het tekort dan aanzuiveren door geld van twee rekeningen af te halen. De dader houdt dan zelf het extra geld. Vervolgens haalt hij geld van vier rekeningen om het tekort voor de twee aan te zuiveren enz. Dit levert een meetkundige rij met reden 2. Bij deze activiteit zullen de leerlingen dezelfde reden 2 gebruiken voor een toelage probleem en dan zullen ze nog enkele meetkundige rijen met andere reden gebruiken om het begrip meetkundige rij te leren kennen.

Bespreek met de leerlingen:

Leg uit aan de leerlingen, indien ze nog niets van rijen gezien hebben, dat de eerste term niet altijd zo vanzelfsprekend gekend is. In vraag 5, is de € 100 op de rekening gezet in het begin (jaar 0). In vraag 6 is de vraag: na elke terugkaatsing, zodat de eerste term hier de eerste terugkaatsing is. Deze voorbeelden willen een klasdiscussie daarover tot stand brengen.

Een meetkundige rij is van de vorm $u_n = u_1.q^{n-1}$

Antwoorden op de vragen voor de leerlingen:
1. ar^{n-1} **2.** 512; 524288 **3.** € 5.368.709,12 **4a.** € 100.000 (dit komt van $a = 10$, $r = 10$ en $n = 5$ zodat $10.10^{5-1} = 10^5$) **4b.** de antwoorden kunnen verschillen, maar na 9 iteraties gaat het al over 1.000.000.000 mensen en bij de tiende iteratie is het meer dan de bevolking van de aarde. Dit is wat Charlie vooral wil uitleggen. **5.** € 81.497 wanneer 43 jaar voorbij is. **6.** 5,90 m.

Groei, meetkundige rij

In Identiteitscrisis ontdekt Charlie een financiële fraude. De dader haalt geld van rekeningen en zet het er daarna weer op door geld af te halen van dubbel zoveel rekeningen waarbij hij het extra geld zelf houdt. Dit is een voorbeeld van een meetkundige rij met reden 2.

Een meetkundige rij is een rij waarbij elke term verkregen wordt door de voorgaande term in de rij te vermenigvuldigen met een vast getal, de reden of het quotiënt genoemd.

Voorbeeld: in een meetkundige rij met a als eerste term en reden r is de tweede term ar, de derde term ar^2 enz.

Deze rij kan geschreven worden als a, ar, ar^2, ar^3, ...

1. Geef de $n-$de term van de rij uit het voorbeeld hierboven.

2. In het geval waar Charlie mee bezig is, is de eerste term 1 en de reden is 2. De rij is 1, 2, 4, 8, 16,.... Hoeveel bankrekeningen zijn er nodig voor de tiende term? Hoeveel voor de twintigste term?

3. Een analoog probleem wordt soms het toelage probleem genoemd. Veronderstel dat ouders overleggen over een toelage voor hun kind. Het kind stelt voor dat ze hem op de eerste dag van de maand 1 cent geven, op de tweede dag 2 cent, op de derde dag 4 cent enz. Wat de ouders dan zouden moeten betalen op de dagen van de eerste week staat in bijgevoegde tabel:

Dag	**Bedrag van de dag**
1	€ 0,01
2	€ 0,02
3	€ 0,04
4	€ 0,08
5	€ 0,16
6	€ 0,32
7	€ 0,64

Wat krijgt het kind dan op dag 30?

4. Een ander voorbeeld is een kettingmail. Vroeger ging het hier om kettingbrieven maar het systeem is natuurlijk al aangepast aan het internet. Een typisch voorbeeld: iemand krijgt een mail met 5 namen en de vraag om € 1 te storten naar de persoon bovenaan de lijst, die naam dan te verwijderen, zijn eigen naam te zetten onderaan en die mail dan door te sturen naar tien personen. Men belooft dan dat zodra de eigen naam bovenaan komt het geld zal binnenstromen.

- **a.** Bereken hoeveel de persoon in het meest ideale geval dan zal krijgen.
- **b.** Verklaar de redeneringsfout dat alle deelnemers rijk zullen worden.
- **c.** Zoek op wat een piramidespel is, wat de Belgische wet hierover zegt en wat Albanië hiermee te maken heeft.

5. Veronderstel dat een student na zijn studies op de leeftijd van 22 jaar € 100 op de bank zet en dit daar laat staan tot hij in pensioen gaat op 65 jaar. Veronderstel ook dat de intrest vast is nl; 5%.
Stel de meetkundige rij op die de waarde van zijn geld jaar na jaar aangeeft. Wat is de reden van deze rij? Hoeveel geld kan hij bij pensionering van de bankrekening halen?

6. Termen van een meetkundige rij worden niet altijd groter. Indien de absolute waarde van de reden kleiner is dan 1 dan worden de absolute waarden van de termen in de rij steeds kleiner. Veronderstel dat een bal van 10 meter hoogte naar beneden wordt gegooid. Nadat de bal tegen de grond botst kaatst die terug naar boven tot op 90% van de hoogte en dat herhaalt zich steeds opnieuw. Welke hoogte bereikt de bal na de vijfde bots?

Het doel van deze activiteit is de leerlingen op een korte en eenvoudige manier te laten kennismaken met een zeer uitgebreid wiskundig onderwerp. TI wil zo leerkrachten en leerlingen aanmoedigen om meer te leren over dit onderwerp via de uitbreiding en door persoonlijk onderzoek.

Meetkundige rij, uitbreiding

Inleiding

Meetkundige rijen komen voor in veel andere vakken. Celsplitsing in biologie bijvoorbeeld resulteert in een meetkundige rij. Ook in sociologie en economie komt dit begrip voor.

Bijkomende bronnen

Volgende websites kunnen van dienst zijn:

- `http://mathworld.wolfram.com/GeometricSequence.html`
- `http://teachers.henrico.k12.va.us/math/HCPSAlgebra2/`

Voor de leerlingen:

Een klassiek probleem gaat over de persoon die het schaakspel uitvond. De koning was zo onder de indruk dat hij de uitvinder al wat hij wou wilde geven. De uitvinder vroeg 1 graankorrel voor het eerste vakje, 2 graankorrels voor het tweede vakje, 4 graankorrels voor het derde vakje enz. De koning antwoordde dat de uitvinder dom was om zoiets te vragen, hij had de helft van zijn koninkrijk willen geven. Zoek uit wat de uitvinder vroeg, bereken hoeveel graankorrels hij moet krijgen voor alle 64 vakjes, vermenigvuldig dit met het gewicht van een graankorrel. Vergelijk dit ook met de totale graanproductie in de wereld vandaag.
Zoek uit hoe groot de landoppervlakte op aarde is. Veronderstel dat per cm^2 er een graankorrel wordt gelegd, hoe groot is dan de oppervlakte met graankorrels?

Verwante onderwerpen:

Bestudeer ook andere rijen, zoals de rekenkundige rij, de rij van de priemgetallen (zie ook `http://www.musicoftheprimes.com/`), de harmonische rij.

Hoe dateren we

Onderwerp: Exponentieel verval
Doel: De betekenis van exponentieel verval leren kennen en de koolstof 14 dateringsmethode.
Materiaal: TI-83 Plus/TI-84 Plus en een ovenschaal met een zak van 89 gram M&M's™ en een zak Reese's™ van 113 gram.

Inleiding

Het FBI moet onderzoeken waarom iemand bij de datering van een oude schedel vermoord werd.
Reeds vele jaren gebruiken wetenschappers de C-14 methode voor datering van heel oud materiaal. C-14 is een radioactief isotoop van koolstof dat voortdurend nieuw wordt aangemaakt tot een organisme sterft. Daarna zal de hoeveelheid C-14 in dat organisme exponentieel afnemen. Dit laat wetenschappers toe, gebruik makend van exponentiële functies, de leeftijd te schatten van een organisme.

Bij deze activiteit gebruiken we een snoepmodel om de tijd te bepalen nodig voor exponentieel verval. De verkregen data kunnen in grafiek gezet worden en beschreven worden met een formule. Leerlingen die reeds logaritmen hebben bestudeerd kunnen de algebraïsche formule afleiden om de leeftijd te bepalen als functie van de hoeveelheid C-14.

Wetenschappelijke verklaring:
In de aflevering Bones of Contention geeft Charlie aan Don de wiskundige verklaring van deze dateringsmethode, een mooie synthese van chemie, biologie en fysica die Willard F. Libby een Nobelprijs opleverde in 1960.
Iedere dag komt er kosmische straling, straling uit de ruimte in de atmosfeer van de aarde terecht. Daar kunnen we niets aan doen. Iedereen op deze planeet wordt per uur een paar honderdduizend keer geraakt door kosmische straling. Het gebeurt ook wel dat de kosmische straling botst met een deeltje in de atmosfeer. Wanneer een atoom in de atmosfeer zo geraakt wordt, kan er een secundaire straling vrijkomen in de vorm van een klein deeltje, een energierijk neutron. Dit neutron kan op zijn beurt weer botsen met een stikstofatoom. Zoals bekend bestaat de lucht om ons heen ongeveer voor 80% uit stikstof. Na zo'n botsing met een stikstofatoom kan een stikstof-15 atoom ontstaan (bevat 7 protonen en 8 neutronen). Dit radioatieve atoom vervalt weer tot koolstof-14 (6 protonen, 8 neutronen) en een waterstofatoom (1 proton, nul neutronen). C-14 is radioactief, met een halveringstijd van 5730 jaar. Belangrijk is te onthouden dat C-14 continu aangemaakt wordt via een hele reeks processen, die door de kosmische straling in gang worden gehouden.

Antwoorden op de vragen voor de leerlingen:
2. Antwoorden variëren, maar zullen dicht bij 50 liggen. **3.** Wanneer n het antwoord is op vraag 1, zal de waarde ingevoerd bij $t = 1$ gelijk zijn aan $100 - n$. Antwoorden zullen verschillen, maar het aantal atomen verwijderd op $t = 2$ zal ongeveer 25 zijn. Dit aantal wordt afgetrokken van het aantal bij $t = 1$ in de tabel en geeft dan wat er bij $t = 2$ moet ingevuld worden. **4.** Antwoorden verschillen maar men moet iets bekomen in de buurt van 100, 50, 25, 12, 6, 3. **5.a** De twee grafieken snijden in het punt $(1844,65;4)$, zodat het bot bij benadering 1845 jaar oud is. **5b.** $t = 5730 \times \log_{1/2}(\dfrac{y}{A_\epsilon})$

Hoe dateren we

In Bones of Contention legt Charlie de wiskunde uit van de dateringsmethode met koolstof 14. Deze methode wordt door wetenschappers en archeologen gebruikt om de leeftijd te bepalen van hout, bot, of andere substanties die ooit levend materiaal hebben bevat. De techniek steunt op het feit dat een redelijk constante hoeveelheid van de koolstof in elk levend materiaal bestaat uit het onstabiele isotoop C-14, dat langzaam omzet in stikstof. Wanneer het organisme leeft dan komt er ongeveer evenveel C-14 bij als er weggaat, maar wanneer het organisme sterft begint langzaam de afname van C-14. Het gaat traag, maar voorspelbaar, zo dat elke 5730 jaar de hoeveelheid C-14 gehalveerd is. (We zeggen daarom dat C-14 een halfwaardetijd heeft van 5730 jaar.) Wanneer je een bot vindt waarvan de hoeveelheid C-14 slechts de helft bedraagt van de hoeveelheid C-14 in een levend bot, dan kan je besluiten dat je vondst een bot is van iemand die 5730 jaar geleden overleed.

Een model voor radioactief verval

Laat ons eens kijken naar de wiskunde van het proces dat C-14 omzet in stikstof.
Je hebt een bakplaat nodig een zak van 89 gram M&M's^{TM} (om de C-14 atomen voor te stellen) en een zak Reese's van 113 gram (dit zijn dan de stikstof atomen).

1. Giet de C-14 atomen over de bakplaat uit en tel er exact 100. Kies liefst deze waarop je de M goed kan zien. Je kan dan onderstaande tabel voor $t = 0$ al invullen.

Tijd t	C-14 atomen
0	
1	
2	
3	
4	
5	

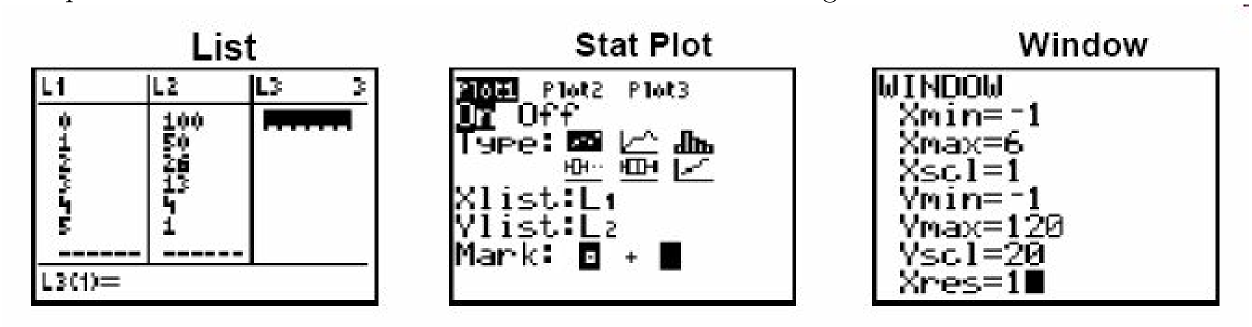
2. Meng de atomen op de bakplaat goed. Verwijder nu deze met de M bovenaan. Trek dit aantal af van 100 en schrijf het resultaat in de tabel bij $t = 1$. Vervang dan de C-14 atomen die je hebt weggenomen door de andere snoepjes die de stikstofatomen voorstellen.

3. Meng de atomen opnieuw grondig en neem de C-14 atomen met de M bovenaan er weer uit. Trek dit aantal af van wat je had op $t = 1$ en schrijf het resultaat in de tabel bij $t = 2$. Vervang weer de weggenomen C-14 atomen door de stikstofatomen.

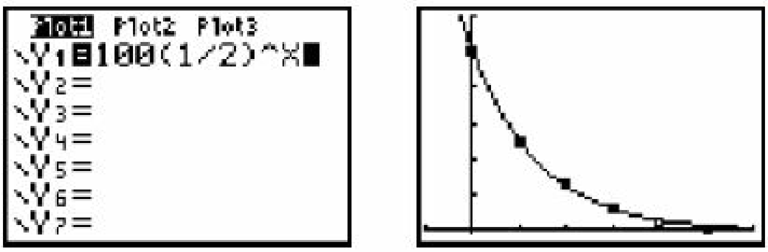
4. Herhaal dit proces tot de ganse tabel is ingevuld. Na 5 keer zou je bijna allemaal stikstofatomen moeten hebben.

Data weergeven en in een grafiek zetten

Vul de aantallen van de tabel in in L_1 en L_2 van de GRM, zoals op het scherm hieronder. In de STAT PLOT window zet je Plot1 op ON en kies je voor scatter plot zoals op het tweede scherm. Kies dan voor de windowinstellingen van het derde scherm.



In het Y= window het functievoorschrift intikken en GRAPH duwen, dan zie je de grafiek mooi passen op de scatter plot.



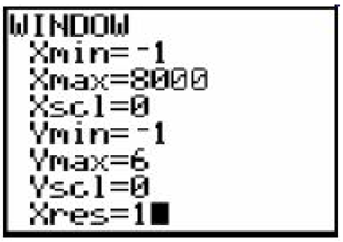
Koolstof 14 dateringsmethode

Het doel van deze simulatie was om aan te tonen dat C-14 exponentieel vermindert volgens de vergelijking $y = A.\left(\frac{1}{2}\right)^t$, waarbij A de hoeveelheid C-14 is aanwezig op tijdstip $t = 0$. Bij $t = 1$ is nog ongeveer de helft van het materiaal over, een vierde op tijdstip $t = 2$ enz. Elke tijdseenheid vertegenwoordigt de halfwaardetijd van het materiaal en dat is voor C-14 5730 jaar.

Wanneer we t vervangen door $\frac{t}{5730}$ dan kunnen we meten in jaren. A wordt ook wel vervangen door A_ϵ de hoeveelheid C-14 aangepast aan de omgevingsfactoren.

5. Veronderstel dat een wetenschapper een oud bot vindt dat 4 eenheden C-14 bevat. De wetenschapper denkt dat dit overeenkomt met 5 eenheden van nu. Hoe oud is dit bot dan? (Hint: zoek hoeveel jaar (t) er nodig zijn om van 5 eenheden C-14 te vervallen naar 4 eenheden C-14.) Je kan t op twee manieren vinden.

a) **Grafische oplossing:** Maak de grafiek van de functie $y_1 = 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ en $y_2 = 4$ met de windowinstellingen van hieronder (zorg dat ook zeker de STAT PLOT af staat).



Zoek dan het snijpunt. Wat is de benaderde leeftijd van het bot?

b) **Algebraïsche oplossing** (voor wie logaritmen kent)
Los de vergelijking $y_1 = 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ op naar t. Je kan dan y ingeven en je kent de bijbehorende t of hier de ouderdom van het bot.

Verjaardag

Onderwerp: Kansrekenen via complement
Doel: Het complement van een gebeurtenis gebruiken om de kans te berekenen voor het verjaardagsprobleem en analoge toepassingen.
Materiaal: TI-83 Plus/TI-84 Plus.

Inleiding

Wanneer Charlie les geeft over at random en kansrekening vermeldt hij het bekende verjaardagsprobleem. Dit probleem kan als weddenschap geformuleerd worden op een party: wedden dat er minstens 2 mensen hier op dezelfde dag verjaren. Het klinkt verrassend dat er slechts 23 mensen aanwezig moeten zijn om 50% kans te hebben. Indien er 60 personen aanwezig zijn dan is het zo goed als zeker dat er twee mensen aanwezig zijn die op dezelfde dag verjaren. Via deze oefeningen willen we leerlingen leren werken met het complement van een kans. Door de kans te berekenen dat er geen overeenkomst is kunnen ze via het complement de kans op overeenkomst sneller vinden dan rechtstreeks.

Bespreek met de leerlingen:

Herbekijk de betekenis van kans en hoe die wordt uitgedrukt. In het bijzonder beschouw je de kans van een aantal onafhankelijke gebeurtenissen die berekend worden door de kansen van de individuele gebeurtenissen te vermenigvuldigen.

Veronderstel steeds dat er 365 dagen zijn in een jaar en dat de verjaardagen mooi verspreid zijn over het jaar.

Vraag eerst aan de leerlingen hoeveel mensen er samen in een kamer moeten zijn zodat de kans dat er twee op dezelfde dag jarig zijn minstens 50% is. Een veel gegeven antwoord is 183. Nadat iedereen zowat zijn idee gegeven heeft kan je in een grote klas al eens vragen of er twee op dezelfde dag jarig zijn (misschien heb je dadelijk geluk) of je kan iedereen vragen hun verjaardag en die van hun gezinsleden op te schrijven. Je kan dan de briefjes verzamelen en de resultaten random op bord noteren.

Voor sommige leerlingen is het misschien goed het programma BIRTHDAY echt te laten intikken in hun rekenmachine, het kan echter ook worden gedownload (gratis) via: `http://education.ti.com/exchange` en zoek daar naar 7463.

Antwoorden op de vragen voor de leerlingen:

1.

aantal wagens	P(geen match)	P(match)
1	1	0
2	0,9	0,1
3	0,72	0,28
4	0,504	0,496
5	0,3024	0,6976
6	0,1512	0,8488
7	0,06048	0,93952
8	0,018144	0,981856
9	0,0036288	0,9963712
10	0,00036288	0,99963712

2. 5 wagens

3. 5 mensen (0,61)

4. 8 mensen (0,95)

5. 13 rekeningen (0,55)

6. 22 rekeningen (0,91)

7. 23 mensen (0,507)

8. 41 mensen (0,903)

Verjaardag

Wanneer Charlie les geeft over at random en kansrekening vermeldt hij het bekende verjaardagsprobleem. Dit probleem kan als weddenschap geformuleerd worden op een party: wedden dat er minstens 2 mensen hier op dezelfde dag verjaren. Hoeveel mensen moeten er op de party aanwezig zijn om een weddenschap te kunnen afsluiten waarbij de kansen op winst of verlies ongeveer even groot zijn? Maak nu dadelijk een schatting en noteer die vooraleer je verder gaat.

De meeste mensen overschatten dit aantal. De rechtstreekse berekeningen zijn ook niet zo gemakkelijk. Het wordt veel eenvoudiger wanneer we dit via het complement bekijken. Dit betekent dat we eerst de kans gaan berekenen dat geen twee mensen op dezelfde dag jarig zijn (P(geen match)). We zullen dit voorstellen door $P(\neg M)$ en kunnen dan $P(M) = 1 - P(\neg M)$ berekenen.

Wanneer er één persoon in de kamer is dan is er duidelijk geen kans dat twee op dezelfde dag jarig zijn, maar wanneer er een tweede persoon in de kamer komt kunnen we beginnen rekenen, dan zal er geen match zijn wanneer de tweede persoon geboren is op de 364 overblijvende dagen die verschillend zijn van de verjaardag van de eerste persoon.

$$P(\neg M) = \frac{364}{365} \qquad \text{en} \qquad P(M) = 1 - \frac{364}{365} = \frac{1}{365}$$

Wanneer er drie personen samen zijn dan zal er geen match zijn als die derde persoon jarig is op één van de 363 dagen waarop geen van de twee vorige personen verjaart. Voor drie personen geldt dus:

$$P(\neg M) = \left(\frac{364}{365}\right).\left(\frac{363}{365}\right) \approx 0,99 \qquad \text{zodat} \qquad P(M) \approx 0,01$$

Omdat deze breuken redelijk lastig zijn, zullen we het probleem eerst nog wat eenvoudiger maken om er daarna weer op terug te komen.

1. De nummerplaten van auto's in België die met drie letters beginnen, eindigen met drie cijfers. Laten we alleen dit laatste cijfer bekijken. Vervolledig de volgende tabel om de kans te vinden dat een bepaald aantal auto's een nummerplaat heeft die eindigt op hetzelfde cijfer.

aantal wagens	**P(geen match)**	**P(match)**
1	1	1-1=0
2	0,9	1-0,9=0,1
3	(0,9).(0,8)=0,72	
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

2. Lees nu af uit de tabel wat het minste aantal wagens is (de steekproefgrootte) dat je moet nemen opdat de kans dat er overeenkomst is groter is dan 0,5.

3. We kunnen nu ook i.p.v. verjaardagen, geboortemaanden nemen, dat is iets eenvoudiger. Laten we veronderstellen dat elke geboortemaand even waarschijnlijk is (dat is niet echt zo, o.a. omdat maanden een verschillend aantal dagen hebben). Wanneer we dezelfde redenering als hiervoor gebruiken, wat is dan het kleinste aantal mensen dat je moet samen brengen opdat de kans dat er twee zijn met dezelfde geboortemaand groter zou zijn dan 0,5?

4. Hoeveel mensen moet je minstens samen brengen opdat die kans groter zou zijn dan 0,9?

Het volgende programma kan gebruikt worden om met de GRM dergelijke problemen te simuleren.

```
PROGRAM: BIRTHDAY
:ClrHome
:Input "TOTAL POSSIBLE?",T
:1→A
:1→N
:Lbl 1
:ClrHome
:While N≠T
:A*(T+1-N)/T→A
:Disp "NUMBER",N,"PROB NO MATCH",A,"PROB MATCH",1-A
:N+1→N
:Pause
:Goto 1
:End
```

Wanneer je dit programma laat lopen zal het eerst vragen naar het totaal aantal mogelijkheden (vb. 365 voor de verjaardagen, 12 voor de geboortemaanden, 10 voor de eindcijfers van de nummerplaten enz.). Telkens wanneer je ENTER drukt, neemt het aantal in de steekproef met één toe en de kans op geen match en de kans op match worden weergegeven. Dit programma maakt het niet alleen makkelijker om op de volgende vragen te antwoorden, maar toont ook aan hoe de kans op een match heel klein van start gaat maar dan heel snel toeneemt naarmate de steekproef groter wordt.

5. Gebruik dezelfde redenering om te bepalen wat het kleinste aantal random eurobiljetten is zo dat er minstens 50% kans is dat de laatste twee cijfers van het serienummer op minstens twee biljetten gelijk zijn.

6. Beschouw opnieuw het probleem uit de vorige vraag maar nu voor minstens 90%.

7. Bekijk nu het oorspronkelijke probleem van Charlie in zijn klas. Hoeveel personen moeten er minstens samen in een kamer zijn zodat de kans dat er twee op dezelfde dag verjaren minstens 50% is?

8. Zelfde vraag als hiervoor maar nu voor minstens 90%?

Het doel van deze activiteit is de leerlingen op een korte en eenvoudige manier te laten kennismaken met een zeer uitgebreid wiskundig onderwerp. TI wil zo leerkrachten en leerlingen aanmoedigen om meer te leren over dit onderwerp via de uitbreiding en door persoonlijk onderzoek.

Complement van een kans, uitbreiding

Inleiding

Charlie merkt in zijn les op dat mensen veel fouten maken en slechte keuzes maken omdat ze de wiskunde van de kansrekening niet begrijpen. Men moet bepaalde technieken leren maar ook een zekere terughoudendheid aanleren t.o.v. dingen die als vanzelfsprekend gepresenteerd worden.
Samenvallende gebeurtenissen moeten wiskundig benaderd worden, men mag zomaar niet op zijn gevoel afgaan. Wat te denken van de volgende problemen: er zijn 42 presidenten van Amerika geweest, moet men dan verwonderd zijn wanneer er 2 dezelfde verjaardag hadden? Er zijn er wel nog geen 42 gestorven, maar zou het verwonderlijk zijn dat er 2 op eenzelfde dag in het jaar overleden zijn?
Wil je hierover meer lezen:
`http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/coincidence.shtml`

Verwante onderwerpen

- Er zijn veel andere onderwerpen (zeker in de combinatieleer en de kansrekening) waarbij het eenvoudiger is het complement eerst te bekijken i.p.v. rechtstreeks naar een oplossing te zoeken. Zo zijn er de kaartspelproblemen die ook al snel ingewikkeld kunnen worden.
- Het verjaardagprobleem kan ook uitgebreid worden tot n overeenkomsten i.p.v. slechts 2. Voor een uitgebreide uiteenzetting hierover kan je terecht op
`http://mathworld.wolfram.com/BirthdayProblem.html`

Bijkomende bronnen

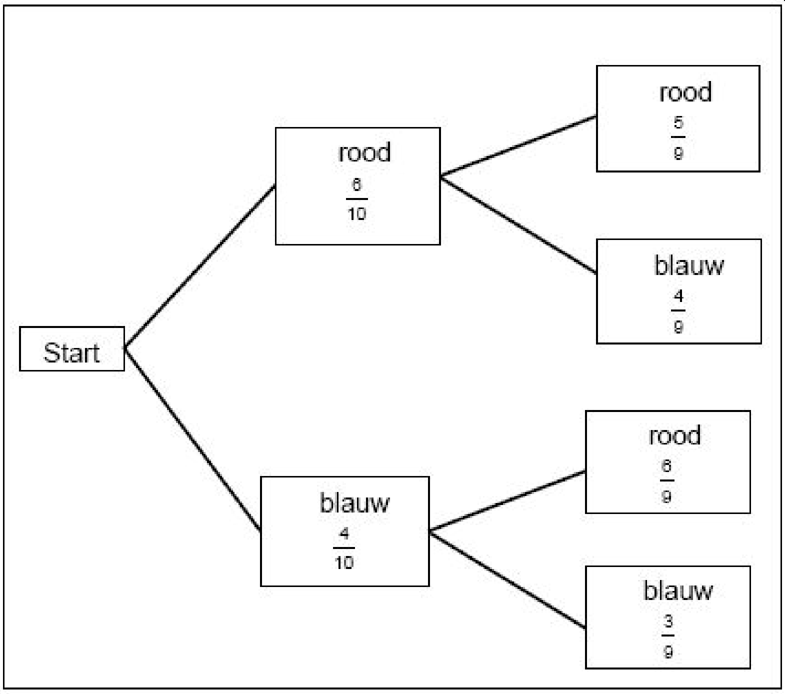
- Voor een applet die het verjaardagprobleem simuleert kan je terecht op
`http://www.mste.uiuc.edu/reese/birthday`
- Voor een ganse les over de geschiedenis van het probleem:
`http://www.teacherlink.org/content/math/interactive/probability/lessonplans/birthday/home.html`

Hoe betrouwbaar is een test

Onderwerp: Kansbomen voor voorwaardelijke kansen.
Doel: Kansbomen voor voorwaardelijke kansen kunnen maken, begrijpen en interpreteren.
Materiaal: TI-83 Plus/TI-84 Plus.

Inleiding

Leerlingen zijn vertrouwd met het vinden van een kans op een eenvoudige gebeurtenis, zoals de kans op het nemen van een rode bal uit een vaas met gekleurde ballen. Beschouw bijvoorbeeld een vaas met 6 rode en 4 blauwe ballen. De kans om een rode bal te nemen is $\frac{6}{10}$. Wanneer nu gevraagd wordt wat de kans is dat een tweede bal rood is, dan zal het antwoord afhangen van het feit of de eerste bal weer in de vaas is teruggelegd of niet. Indien de eerste bal terug in de vaas werd gelegd dan is de kans identiek met de eerste trekking omdat de gebeurtenissen *onafhankelijk* zijn van elkaar. Wanneer die eerste bal echter niet is teruggelegd dan is de kans de kans dat de tweede bal rood is wanneer de eerste bal rood was: $\frac{5}{9}$ en de twee gebeurtenissen zijn *afhankelijk*.
Voorwaardelijke kans (de kans op A *op voorwaarde* van B) heeft te maken met *afhankelijke* gebeurtenissen, de kans op de tweede gebeurtenis hangt af van het resultaat van de eerste gebeurtenis. Een boomdiagram kan hier voor de leerlingen heel goed helpen om dit in te zien.



Een dergelijke kansboom helpt de leerlingen om voorwaardelijke kansen te berekenen door te vermenigvuldigen binnen de kansboom.
De kans dat de eerste bal rood is en de tweede bal blauw is gelijk aan $(\frac{6}{10}).(\frac{4}{9}) = \frac{4}{15}$

Bespreek met de leerlingen:

In de aflevering berekend risico probeert Charlie een zeer grote verzameling variabelen voor te stellen met een reuzegroot boomdiagram. Hij heeft zeer ingewikkelde algoritmen nodig, maar het basisconcept kunnen wij ook begrijpen wanneer we onafhankelijke en afhankelijke gebeurtenissen en voorwaardelijke kans kennen.

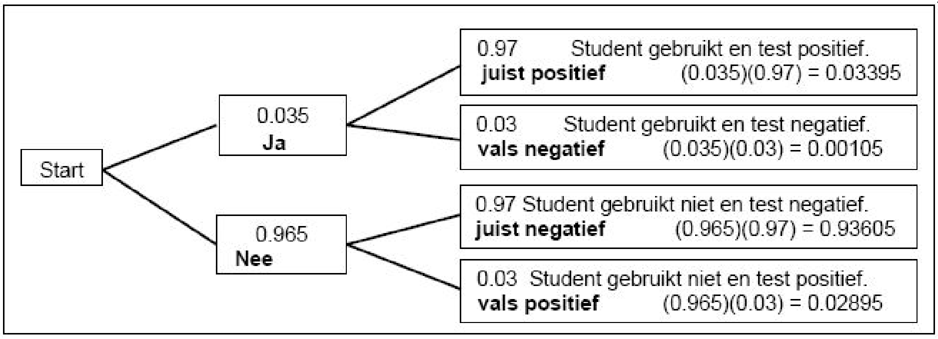
Een veelgebruikt voorbeeld voor voorwaardelijke kans komt uit de medische sector bij de test op medicijnen. De kans dat een medicijn doeltreffend is hangt af van zeer veel factoren, zoals de gezondheid van de personen en of het medicijn correct werd ingenomen. Bedrijven proberen deze variabelen onder controle te hebben bij de tests, maar deze tests zijn nooit volledig foutloos. Zo kan een firma adverteren dat uit een test blijkt dat medicijn A in 97% van de gevallen een goed resultaat oplevert.

De leerlingen zullen nu nagaan wat de resultaten van dergelijke tests precies betekenen en hoe ze die moeten interpreteren. Ze maken kennis met begrippen als *vals positief* en *vals negatief*.

Antwoorden op de vragen voor de leerlingen:
1. $0,03395$
2. $0,97$
3. $0,03$
4. $(0,035)(0,97) + (0,965)(0,03) = 0,0629$
5. $((0,035)(0,97)/(0,0629)) \approx 0,54$
6. $P(\text{gebruiker en positief}) = 0,03325$, $P(\text{gebruiker en negatief}) = 0,00175$,
$P(\text{niet-gebruiker en positief}) = 0,04825$, $P(\text{niet-gebruiker en negatief}) = 0,91675$.
De kans dat iemand die positief test een gebruiker is, is ongeveer $0,41$ en dus opvallend klein.

Hoe betrouwbaar is een test

Recente studies wijzen uit dat ongeveer 3,5% van de studenten steroïden of andere pepmiddelen gebruiken. De nauwkeurigheid van de test om dit te controleren is bij benadering 97%. Dit betekent dat in 3% van de gevallen de test een verkeerd resultaat oplevert (dit kan zowel vals positief als vals negatief zijn).
Het probleem kan voorgesteld worden in een kansboom:



Gebruik deze kansboom om de kansen te berekenen dat:

1. een student gebruikt en positief test

2. een student positief test op voorwaarde dat hij of zij een gebruiker is

3. een student positief test op voorwaarde dat hij of zij niet gebruikt

4. een student positief test

5. een student positief test en een gebruiker is (hint: beschouw dit als de verhouding van de kans dat een student gebruikt en positief test en de kans dat een student positief test).

6. Construeer een kansboom zoals het voorbeeld voor een nieuwe test die een betrouwbaarheid heeft van slechts 95%. Zoek dan opnieuw het antwoord op vraag 4. Vergelijk de antwoorden op vraag 4 voor de beide gevallen.

Het doel van deze activiteit is de leerlingen op een korte en eenvoudige manier te laten kennismaken met een zeer uitgebreid wiskundig onderwerp. TI wil zo leerkrachten en leerlingen aanmoedigen om meer te leren over dit onderwerp via de uitbreiding en door persoonlijk onderzoek.

Hoe betrouwbaar is een test, uitbreiding

Inleiding

Boomdiagrammen zijn heel geschikt om voorwaardelijke kansen voor te stellen en meer inzicht te bieden in dit probleem. Een andere manier om dit voor te stellen is via een tabel.

	Ja	**Nee**	Totaal
Pos.	34	29	63
Neg.	1	936	937
Totaal	35	965	1000

Voor de student

Zoek informatie over andere tests, medische of andere, en hun respectievelijke garanties op nauwkeurigheid. Bereken de bijbehorende kansen op vals positief en vals negatief. Wat kan men doen om de resultaten zo betrouwbaar mogelijk te maken?

Verwante onderwerpen

Zoek ook op wat de regel van Bayes in dit verband betekent en waar dit nog zoal gebruikt wordt.

Screening van verdachten

Onderwerp: Voorwaardelijke kans en Baysiaanse filters
Doel: Het aspect voorwaardelijke kans in een Baysiaanse filter uitleggen.
Materiaal: TI-83 Plus/TI-84 Plus.

Inleiding

Thomas Bayes (1702-1761) was geestelijke en wiskundige die bijna niets heeft gepubliceerd over wiskunde, maar het weinige dat hij geschreven heeft is van grote betekenis. Zijn ideeën over voorwaardelijke kans (de kans op A gegeven B) hebben moderne theorieën over beslis-kunde beïnvloed en vormen de basis voor vele filterprogramma's, meest bekend nu de spam filters voor onze e-mail inbox.

Voorbeeld: wanneer we met een dobbelsteen gooien en we mogen gokken wat het resultaat was, dan is de kans dat we het goed hebben $\frac{1}{6}$. Wanneer we echter op voorhand de informatie krijgen dat er een oneven getal is gegooid, dan is onze kans op succes bij het gokken gestegen tot $\frac{1}{3}$.

Bespreek met de leerlingen:

In "**Judgement Day** "helpt Charlie het FBI om uit een heleboel misdadigers de meest relevante verdachten te halen. Hij gebruikt een logische filter om voor een specifieke misdaad de meest waarschijnlijke daders uit te filteren.
Hier een voorbeeld:
veronderstel dat er vier verdachten zijn:

Verdachte 1	**Verdachte 2**	**Verdachte 3**	**Verdachte 4**
1.88m	1.60m	1.65m	1.84m
106kg	75kg	66kg	90kg
bruin haar	rood haar	zwart haar	blond haar

dan is de kans dat verdachte 1 de misdaad heeft gepleegd $\frac{1}{4}$, wanneer we over geen extra informatie beschikken. Voor de andere verdachten is dat ook zo.
Wanneer we echter extra informatie krijgen dan zal de kans dat elke individuele verdachte echt de misdaad gepleegd heeft wijzigen. Wanneer bijvoorbeeld een getuige beweert dat de verdachte zeker 1.80m groot was, dan zal de kans dat verdachte 4 de misdaad heeft gepleegd, rekening houdend met de getuigenverklaring stijgen tot $\frac{1}{2}$. Dit is een heel eenvoudig voorbeeld van een Baysiaanse filter, of het proces van de herberekening van kansen wanneer men over extra informatie beschikt.

Antwoorden op de vragen voor de leerlingen: geval 1: a. 1/6 b. 1/2 **geval 2**: 1/3 **geval 3**: a. 1/3 b. 1; verdachte 5 moet de misdadiger zijn. **geval 4**: 0; verdachte 3 kan niet verantwoordelijk zijn voor de brand. **jouw geval**: antwoorden verschillen; controleer.

Screening van verdachten

De zes verdachten in de tabel hieronder worden onderzocht voor hun betrokkenheid in vier onafhankelijke zaken. Gebruik de tabel met de gegevens over de verdachten om te antwoorden op de vragen:

Verdachte 1	**Verdachte 2**	**Verdachte 3**	**Verdachte 4**	**Verdachte 5**	**Verdachte 6**
1.90m	1.72m	1.62m	1.82m	1.82m	1.77m
100kg	93kg	73kg	86kg	97kg	80kg
blond haar	zwart haar	blond haar	bruin haar	rood haar	bruin haar
baard	baard	sik	baard	sik	geen baard

geval 1 De Flikken onderzoeken een roofoverval en ze weten dat die gepleegd werd door één van de verdachten van de tabel.
a. Wat is de kans dat verdachte 2 de roofoverval pleegde?
b. De Flikken ontvangen een tip dat de overval gepleegd werd door een donkerharige (zwart of bruin haar) man met haar op zijn gezicht. Bereken nu de kans dat verdachte 2 de dader is.

geval 2 Een grote man (1.80m of nog groter) werd op de plaats van een aanslag gezien. Bereken de kans dat dit verdachte 1 was.

geval 3 Na onderzoek van de voetsporen die gevonden werden in de modder op de plaats waar een kind werd ontvoerd besluit de technische recherche dat de dader minstens 90kg moet wegen.
a. Bereken de kans dat verdachte 5 de ontvoerder is.
b. Een ooggetuige meldt zich en hij beweert dat de persoon die hij zag wegvluchten met het kind een sik had. Bereken gebruik makend van het verslag van de getuige opnieuw de kans dat verdachte 5 de ontvoerder is en verklaar je antwoord.

geval 4 Witse onderzoekt een tip dat een man met donker haar kleiner dan 1.80m gezien werd bij een opslagplaats vlak voordat die in brand werd gestoken. Bereken de kans dat verdachte 3 de brandstichter was. Verklaar je antwoord.

Jouw geval Bedenk een scenario waarbij verdachte 6 een kans van $\frac{1}{2}$ heeft om als dader te worden opgepakt.

Het doel van deze activiteit is de leerlingen op een korte en eenvoudige manier te laten kennismaken met een zeer uitgebreid wiskundig onderwerp. TI wil zo leerkrachten en leerlingen aanmoedigen om meer te leren over dit onderwerp via de uitbreiding en door persoonlijk onderzoek.

Spam filters en Bayes

Inleiding

Een Baysiaanse spam filter werkt door het analyseren van spam mails en niet-spam mails. Door te bekijken welke woorden of combinaties van woorden veel voorkomen in spam maar heel zelden in niet-spam kan de filter bepalen welke mails een grote kans hebben om spam te zijn en welke niet. Een dergelijke filter kan dat ook leren.
Een simpel voorbeeld van een berekening:

$$P(\text{spam}|\text{viagra}) = \frac{P(\text{viagra}|\text{spam}).P(\text{spam})}{P(\text{viagra})}$$

Door heel veel e-mails te onderzoeken kan men die kansen benaderen.

Verwante onderwerpen

`http://www.paulgraham.com/antispam.html`
Op deze website staan links naar websites waar de spamfilters meer in detail worden beschreven, ook wel redelijk wiskundig.

`http://www.process.com/precisemail/bayesian_filtering.htm` De tekst over de introductie tot Baysiaanse filters en hoe die spam uit je mailbox houden is toegankelijk voor leerlingen uit de hoogste wiskundeklassen met 6 of 8 uur wiskunde.
De stelling van Bayes moeten ze kunnen begrijpen en dus ook de toepassing ervan.

Voor de student

Beschrijf hoe jij je persoonlijke spamfilter zou willen maken, gebruik makend van een Baysiaanse filter.

- Brainstorm over woorden en combinaties van woorden die spam kunnen kenmerken.
- Geen enkele spamfilter zal perfect zijn. Bespreek wat best zou zijn: af en toe spam doorlaten of af en toe een niet-spam mail weggooien.
- Bespreek methoden die spammers zouden kunnen gebruiken om toch voorbij de spamfilters te geraken. Hoe wijzigen ze hun e-mails om dat te doen?
- Wat moet de uroloog die graag op de hoogte blijft over viagra doen om toch de voor hem geschikte mails te ontvangen?

Nog meer over waarschijnlijkheid

Gebruik de applicatie Probability Application op je GRM. Hiermee kan je het gooien met dobbelstenen simuleren, munten gooien enz. In de settings kan je de kansen ook zelf manipuleren.

Logistische regressie

Onderwerp: Kansrekenen en logistische regressie
Doel: Logistische regressie gebruiken om de kans van een gebeurtenis te berekenen.
Materiaal: TI-83 Plus/TI-84 Plus.

Inleiding

In deze aflevering gebruikt Charlie logistische regressie om te proberen bepalen welke verdachte meest waarschijnlijk de volgende keer zal toeslaan. In deze activiteit zullen de leerlingen een logistische regressie toepassen op een dataset om te bepalen wat de kans is dat de verdachte mannelijk of vrouwelijk is wanneer zijn lengte gegeven is.

Gegeven de lengte, wat is dan meest waarschijnlijk een mannelijke verdachte (1) of een vrouwelijke verdachte (0)? De leerlingen zullen een experimentele kans bepalen gebaseerd op een dataset. We zullen de GRM gebruiken en de logistische regressie om resultaten te voorspellen.

Deze methode gelijkt een beetje op de methode die professionele statistici gebruiken, maar zij zullen eerder eerst het natuurlijk logaritme nemen van de kansen dat gebeurtenissen zich voordoen en dan lineaire regressie toepassen. Deze methode wordt belicht in de uitbreiding van deze toepassing

Bespreek met de leerlingen:

1. Veronderstel dat men je vertelt dat in een groep studenten 3 mannelijke en 77 vrouwelijke studenten een lengte hebben van 159 cm. Hoe zou je dan de experimentele kans bepalen dat een persoon die random uit deze groep gekozen wordt mannelijk is?
(antwoord: $3/80 \approx 3,8\%$)

2. De volgende logistische regressie vergelijking geeft de kans dat een persoon mannelijk is voor een gegeven lengte x (in meter):

$$P(x) = \frac{0,97}{1 + 2,87.10^{14}.e^{-19x}}$$

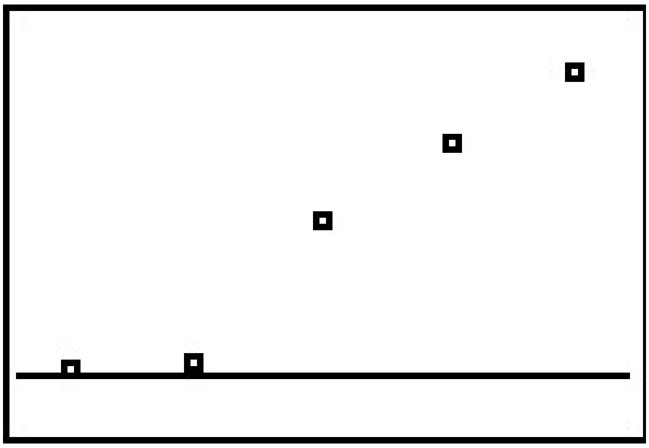
Wanneer je deze vergelijking gebruikt, wat is dan de kans dat een persoon uit de groep van vraag 1 mannelijk is?
(antwoord: $\approx 4\%$)

3. Wanneer je de grafiek hebt van een dataset hoe kan je dan een functievoorschrift vinden dat erbij past? (Je kan deze vraag zo stellen wanneer de leerlingen al over regressie gehoord hebben of anders kan je deze gelegenheid gebruiken om hen dit uit te leggen.)
(antwoord: kijk naar de vorm van de grafiek en kies op de GRM een gepaste regressie)

Antwoorden op de vragen voor de leerlingen:

1. $P(1,54) \approx 0,0175$, $P(1,64) \approx 0,0357$, $P(1,74) \approx 0,5$, $P(1,84) \approx 0,75$, $P(1,94) \approx 0,9833$

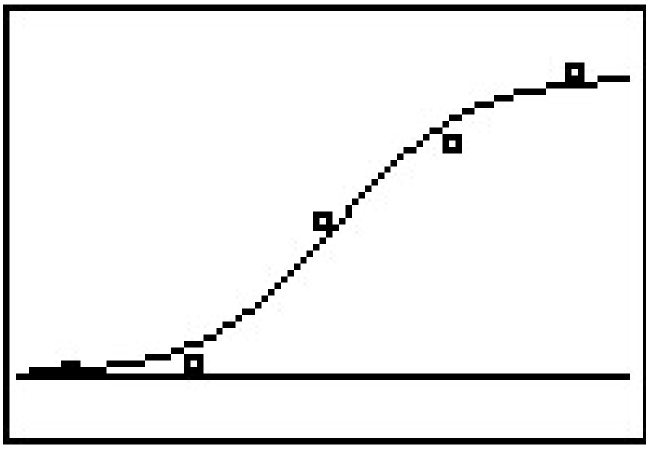
2. De scatterplot wordt hieronder gegeven



3.a

$$P(x) = \frac{0,97}{1 + 2,87.10^{14}.e^{-19x}}$$

3.b $a \approx 2,87.10^{14}$, $b \approx 19,03$ en $c \approx 0,97$



4.a $P(1,62) \approx 0,0,0757$, $P(1,72) \approx 0,3508$, $P(1,86) \approx 0,8618$

4.b De tweede getuige is waarschijnlijk het meest betrouwbaar afgaande op de kansen die uit het model af te leiden zijn.

Logistische regressie

Agent Don Eppes probeert een misdaad op te lossen waarbij de getuigenis van sommigen fout zou kunnen zijn. Verschillende ooggetuigen gaven wel allen ongeveer dezelfde lengte aan voor de drie verdachten maar ze waren het niet eens over het geslacht van die verdachten. Don vraagt aan zijn broer Charlie of er geen wiskundige manier is om te helpen bepalen welke van de getuigenissen meest waarschijnlijk zijn. Charlie suggereert om kansrekening te gebruiken en een regressiemodel.

1. Charlie verzamelde de gegevens over de lengte die je kan vinden in onderstaande tabel. Bereken op basis van deze gegevens de kans dat een persoon met een bepaalde lengte mannelijk is.

Lengte (m)	**♯ mannen**	**♯ vrouwen**	**P(man|lengte)**
1.54	1	56	
1.64	2	54	
1.74	31	31	
1.84	33	11	
1.94	59	1	

2. maak een scatterplot door de lengtes op de horizontale as te zetten en de kansen P(man|lengte) op de verticale as.

Charlie beseft dat hij hier geen lineaire regressie kan gebruiken, omdat zo een model naarmate dat de lengte groter wordt zou leiden tot een kans die groter is dan 1. Hij denkt aan een logistische functie die een ondergrens en een bovengrens heeft net zoals kansen. Hij besluit dus een logistische regressie te gebruiken. Een logistische functie is gebaseerd op een natuurlijk logaritme met grondtal e.

3. De grafiek die je bij oefening 2 hebt gemaakt heeft een vorm die gelijkt op de grafiek van een logistische groeifunctie. De algemene vergelijking van een dergelijke functie die gegeven wordt door je GRM, is:

$$P(x) = \frac{c}{1 + a.e^{-bx}}$$

a. Gebruik nu je GRM om deze vergelijking te vinden die best past bij je grafiek uit vraag 2. Je gebruikt hiervoor de tabel uit vraag 1, je zet de gegevens over de lengte in Lijst1 en de bijbehorende kansen in Lijst2.
STAT, CALC, B:Logistic $\mathbf{L_1}$,$\mathbf{L_2}$

b. Bepaal de waarden van a, b en c en schets de grafiek van de verkregen functie in hetzelfde assenstelsel als de scatterplot uit vraag 2.

4. De eerste getuige schatte de lengte van de verdachten op 1.62 m, 1.72 m en 1.86 m., waarbij hij er zeker van was dat de verdachten allemaal vrouwen waren. De tweede getuige gaf ongeveer dezelfde lengte aan maar zei dat het ging om twee vrouwen en een man. De derde getuige zei dat het drie mannen waren.

a. Gebruik het logistische model nu om te bepalen wat de kans is dat elk van de verdachten mannelijk is.

b. Welke getuige spreekt dan waarschijnlijk de waarheid? Verklaar je antwoord.

Juist of fout

Onderwerp: De binomiaalformule
Doel: Kansen vinden met de binomiaalstelling en hun betekenis interpreteren.
Materiaal: TI-83 Plus/TI-84 Plus.

Inleiding

In Mind Games is Charlie onthutst doordat hij een zogezegd paranormaal begaafd persoon verkeerdelijk de kleur van de kaarten (zwart of rood) hoort schatten van 25 kaarten op een rij.
De kans dat je ze allemaal verkeerd hebt is even groot als de kans dat je ze allemaal goed hebt. In deze activiteit passen we de binomiaalstelling toe op de kans om correct het resultaat te raden bij een aantal gebeurtenissen. Men kan dit op allerlei dingen toepassen. De leerlingen moeten weten hoe ze $(a+b)^n$ moeten uitwerken voor $n \leq 4$. Wanneer je reeds de driehoek van Pascal hebt bestudeerd dan sluit dit er mooi bij aan. Wanneer je leerlingen al de meer algemene formule

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

kennen, dan kan je dit ook in deze activiteit gebruiken.

Bespreek met de leerlingen:

De leerlingen moeten vertrouwd zijn met de definitie van een eenvoudige kans, alsook met het feit dat de kans op twee of meer onafhankelijke gebeurtenissen gevonden wordt door de individuele kansen van die gebeurtenissen met elkaar te vermenigvuldigen. Ze moeten ook weten dat de kans op het complement van een gebeurtenis A gegeven wordt door $1 - P(A)$. In deze activiteit noemen we J de kans dat men juist gokt en F de kans dat men fout gokt. Er geldt dan $J + F = 1$, zodat $(J + F)^n = 1$. n zal hier het aantal antwoorden voorstellen op vragen naar de kleur van een kaart of het aantal antwoorden op een multiple choice vraag.
De notatie $\binom{n}{r}$ kan gebruikt worden en dan hebben we nog een heel aantal notaties met C waarbij de n en de r zowat overal staan in publicaties. We zullen het hier nu eens ${}_nC_r$ noteren omdat dit voor de leerlingen het best overeen komt met de methode om dit in te tikken op de GRM. Laat hen opmerken dat dit allemaal hetzelfde is. Het kan ook nodig zijn eerst met je leerlingen te bespreken of te herhalen wat combinaties precies zijn en hoe ze berekend worden.
Algemeen: het aantal manieren om uit n objecten er r tegelijk te kiezen (zonder dat de volgorde belangrijk is) wordt genoteerd: ${}_nC_r$ en wordt gedefinieerd als

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$n! = n.(n-1).(n-2).\ldots.1$ en $0! = 1$

Antwoorden op de vragen voor de leerlingen:

1. $J^3 = \frac{1}{8} = 0,125$, de kans dat je ze alle 3 juist hebt.
$3J^2F = \frac{3}{8} = 0,375$, de kans dat tweemaal juist en één keer fout wordt gekozen.
$3JF^2 = \frac{3}{8} = 0,375$, de kans op één maal juist en twee keer fout.
$F^3 = \frac{1}{8} = 0,125$, de kans dat je ze alle 3 fout hebt.

2. $J^4 + 4J^3F + 6J^2F^2 + 4JF^2 + F^4$, allebei $\frac{1}{16} = 0,0625$ **3.** $\frac{6}{16} = 0,375$.

4.

Uitdrukking	**Uitwerking**	**Kansen**
$(J+F)$	$J+F$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$(J+F)^2$	$J^2+2JF+F^2$	$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$
$(J+F)^3$	$J^3+3J^2F+3JF^2+F^3$	$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$
$(J+F)^4$	$J^4+4J^3F+6J^2F^2+4JF^2+F^4$	$\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}$

5.

Aantal kaarten	**Kans op alles juist**	**Kans op de helft juist**	**Kans op alles fout**
4	$\frac{1}{16} = 0,0625$	$\frac{6}{16} = 0,375$	$\frac{1}{16} = 0,0625$
6	$\frac{1}{2^6} = 0,015625$	$\frac{20}{2^6} = 0,3125$	$\frac{1}{2^6} = 0,015625$
10	$\frac{1}{2^{10}} = 0,0009765625$	$\frac{252}{2^{10}} = 0,24609375$	$\frac{1}{2^{10}} = 0,0009765625$
20	$\frac{1}{2^{20}} \approx 0,0000009536743$	$\frac{184756}{2^{20}} \approx 0,176197052$	$\frac{1}{2^{20}} \approx 0,0000009536743$
30	$\frac{1}{2^{30}} \approx 0,0000000009313$	$\frac{155117520}{2^{30}} \approx 0,144464448$	$\frac{1}{2^{10}} \approx 0,0000000009313$

6. Neen, het is slechts een half voor 2 kaarten. Het blijkt te dalen naarmate het aantal kaarten stijgt.

7. $\left(\frac{1}{4}\right)^{25} \approx 8,88178 \times 10^{-16}$ **8.** $\left(\frac{3}{4}\right)^{25} \approx 7,52543 \times 10^{-4}$

9. $({}_{25}C_{20})\left(\frac{1}{4}\right)^{20}\left(\frac{3}{4}\right)^{5} \approx 1,14669 \times 10^{-8}$

Juist of fout

In Mind Games is Charlie verwonderd wanneer een paranormaal begaafd persoon probeert de kleur van een kaart te voorspellen en dit 25 keer na elkaar verkeerd heeft. Omdat een kaart een gelijke kans heeft om rood of zwart te zijn is de kans dat men het juist heeft (en ook de kans dat men het verkeerd heeft) telkens gelijk aan $\frac{1}{2}$

Voor twee kaarten is de kans dat men het voor beide kaarten goed heeft gelijk aan $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ ofwel $\frac{1}{4}$.

Voor elke kaart kan een gok juist of fout zijn. Wanneer we de kans op juist voorstellen door J en de kans op fout door F en wanneer we bovendien de eerst geraden kaart vetgedrukt voorstellen dan zien we dat de mogelijkheden zijn:

$$(\mathbf{J}+\mathbf{F})(J+F) = \mathbf{J}(J+F) + \mathbf{F}(J+F) = \mathbf{J}J + \mathbf{J}F + \mathbf{F}J + \mathbf{F}F$$

Vermits we alleen geïnteresseerd zijn in het totale aantal keer juist of fout gekozen, is de volgorde van voorkomen van de kaarten niet belangrijk. Er is dus 1 manier om ze allebei goed te kiezen, er zijn 2 mogelijkheden om er eentje goed en eentje fout te hebben en er is 1 mogelijkheid om ze allebei fout te kiezen.

Dit resultaat kan geschreven worden als $(J+F)^2 = J^2+2JF+F^2$ en wanneer we de waarden voor J en F invullen krijgen we

$J^2 = \frac{1}{4}$, $2JF = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{4}$ en $F^2 = \frac{1}{4}$.

(Deze breuken werden met opzet niet vereenvoudigd.)

1. Voor 3 kaarten hebben we $(J+F)^3 = J^3 + 3J^2F + 3JF^2 + F^3$, waaruit we kunnen afleiden dat de kans om de kleur 3 keer correct te hebben gelijk is aan: $J^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Verklaar nu ook de andere termen in het rechterlid van de vergelijking.

2. Schrijf voor 4 kaarten $(J+F)^4$ uit. Bereken dan de kans om 4 keer de kleur juist (of verkeerd) te hebben.

3. Wanneer je het antwoord op vraag 2 nog eens bekijkt, wat is dan de kans om bij het gokken precies twee van de vier keer de kleur goed te hebben?

4. Vervolledig bijgevoegde tabel met de resultaten uit vragen 1, 2 en 3. In de derde kolom schrijf je de kansen met sommen en vereenvoudig je de resultaten niet. Beschrijf de patronen die je opmerkt in de tabel.

Uitdrukking	**Uitwerking**	**Kansen**
$(J+F)$	$J+F$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$(J+F)^2$	$J^2+2JF+F^2$	$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$
$(J+F)^3$		
$(J+F)^4$		

Kijk nu terug naar de mogelijkheden bij 2 kaarten. Er zijn 2 mogelijkheden om een kleur goed te kiezen en een kleur verkeerd, omdat je de correcte kleur ofwel eerst ofwel laatst kan kiezen.
In het geval van 3 kaarten worden de mogelijke uitkomsten gegeven door:
$(J+F)(J+F)(J+F)$. Dit resultaat toont dat we 2 keer J kunnen krijgen en 1 keer F door J uit te kiezen uit 2 van de factoren en F uit de overgebleven derde factor.

Het aantal verschillende manieren om 2 objecten te kiezen uit een groep van 3 objecten wanneer de volgorde niet belangrijk is, wordt een combinatie van 2 uit 3 genoemd. Dit kan op verschillende manieren genoteerd worden vb $\binom{3}{2}$, maar we kunnen dit hier ook door ${}_3C_2$ aangeven omdat dit zo goed lijkt op de manier waarop we dit in de GRM moeten intikken om het resultaat te verkrijgen.

$${}_4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Voor kleine getallen is het mogelijk dit zo uit te rekenen, zeker voor grotere getallen kunnen we de GRM gebruiken.
4 nCr 2(voor **nCr** $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{\text{PRB}}$ $\boxed{3}$.)

5. Vervolledig de volgende tabel:

Aantal kaarten	**Kans op alles juist**	**Kans op de helft juist**	**Kans op alles fout**
4	$\frac{1}{16} = 0,0625$	$\frac{6}{16} = 0,375$	$\frac{1}{16} = 0,0625$
6			
10			
20			
30			

6. Na lange tijd zal men alleen door te raden ongeveer de helft juist en de helft fout hebben. Voor een groot aantal pogingen mag men dus verwachten dat de kans dat men juist de helft juist en de helft fout heeft 50% is. Wanneer je kijkt naar je vorige antwoorden, lijkt je dit dan inderdaad zo? Waarom?

Voor de vragen 7, 8 en 9 veronderstellen we dat een student 25 multiple choice vragen moet oplossen in een test waarbij er voor elke vraag 4 mogelijkheden zijn.

7. Zoek de kans om bij alle 25 vragen het goede antwoord te gokken. (Zoek eerst naar J en F).

8. Wat is de kans om alle 25 vragen fout te raden?

9. Wat is de kans om precies 20 van de 25 vragen juist te hebben (wanneer de student er niets van kent en dus alleen maar gokt)?

Wij zijn nummer 1

Onderwerp: De wet van Benford.
Doel: De wet van Benford onderzoeken.
Materiaal: TI-83 Plus/TI-84 Plus.

Inleiding

In Running Man legt Charlie uit hoe de wet van Benford kan gebruikt worden om gefabriceerde data op te sporen. De wet van Benford beschrijft het verrassende feit dat in veel natuurlijk voorkomende datasets de cijfers 1 en 2 veel meer voorkomen als eerste cijfer van de getallen dan alle andere cijfers. Het is zo dat in ongeveer 30% van de gevallen het eerste cijfer van de getallen een 1 is.
Dit fenomeen werd voor het eerst ontdekt in 1881 door de astronoom Simon Newcomb toen hij ontdekte dat de beginpagina's van zijn boek met logaritmetafels meer versleten waren dan de andere bladzijden. Dr. Frank Benford, fysicus bij General Electric Company, herontdekte deze wet in 1938 en stelde de hypothese voorop dat getallen met een laag eerste cijfer meer voorkomen dan getallen met hogere eerste cijfers. Gedurende 6 jaar analyseerde hij meer dan 20.000 getallen, o.a. fysische constanten, beurswaarden, meerdieptes, getallen uit een krant. Toen zijn onderzoek zijn hypothese bevestigde ontwikkelde hij een formule die de kans aangeeft dat het eerste cijfer van een getal d is:

$$P(d) = \log\left(1 + \frac{1}{d}\right)$$

Er zijn wel enkele beperkingen voor deze wet van Benford. De verzameling getallen mag niet bestaan uit toegekende waarden zoals telefoonnummers of SIS-kaart nummers, ze mogen ook niet uniform verdeeld zijn zoals loterijnummers en mogen geen vooropgezet minimum of maximum hebben. Twee veel voorkomende toepassingen zijn populatiedata en financiële informatie, maar ook huisnummers en Fibonacci nummers tonen dezelfde verrassende resultaten.
Veel mensen veronderstellen dat getallen uniform en random verdeeld zijn en dat alle cijfers evenveel kans hebben om als eerste cijfer van een getal voor te komen. Dit heeft als logisch gevolg dat mensen de wet van Benford niet zullen beschouwen wanneer ze documenten met getallen vervalsen. En hierdoor zal bijvoorbeeld de Amerikaanse belastingscontroledienst (IRS) de wet van Benford gebruiken om te bepalen of bepaalde belastingsaangiften extra moeten gecontroleerd worden of niet.

Bespreek met de leerlingen:

1. Je moet een lijst maken van 100 getallen die in de kranten stonden gedurende de vorige week. Denk je dat elk cijfer evenveel kans maakt om voor te komen als eerste cijfer van die getallen?
2. Stel dat de helft van de leerlingen in de klas die lijst zouden verzinnen i.p.v. echt in de kranten te gaan zoeken, waarop zouden ze dan letten opdat niemand zou ontdekken dat ze die getallen verzonnen hebben?
3. Bij deze activiteit zal je een hypothetische verzameling data genereren voor de kostprijs van benzine. Indien benzine € 1.00 kost op tijdstip $t = 0$ en we veronderstellen een jaarlijkse inflatie van 5%, schrijf dan een functievoorschrift voor $c(t)$ dat gebruikt kan worden voor het berekenen van de kostprijs van benzine de volgende t jaar.

Antwoorden op de bespreking met de leerlingen:

1. De antwoorden hierop zullen verschillen. Leerlingen bedenken dit tijdens de activiteit.

2. Ook hier zullen de antwoorden verschillen. Bespreek hier dat het niet zo is dat elk cijfer evenveel kans heeft om voor te komen als eerste cijfer van een getal.

3. $c(t) = e^{0.05t}$

Antwoorden op de vragen voor de leerlingen:

1.a € 1.11; € 1.28, **1.b** $t = 14$
1.c

Kost (in euro per liter)	€2.00	€ 3.00	€ 4.00	€ 5.00	€ 6.00	€ 7.00	€ 8.00	€ 9.00	€ 10.00
t **in jaren**	14	22	28	33	36	39	42	44	47

1d-1e.

Kost interval	€ 1.00-€1.99	€ 2.00-€ 2.99	€ 3.00-€ 3.99	€ 4.00-€ 4.99	€ 5.00-€ 5.99	€ 6.00-€ 6.99	€ 7.00-€ 7.99	€ 8.00-€ 8.99	€ 9.00-€ 9.99
aantal jaren	14	8	6	5	3	3	3	2	3
% **tijd**	30%	17%	13%	11%	6%	6%	6%	4%	6%

1f. Wanneer de kostprijs toeneemt van 1 euro naar 2 euro dan betekent dit een stijging van 100%. Wanneer de kostprijs daarentegen stijgt van 2 euro naar 3 euro dan neemt dit slechts met 50% toe. De procentuele toename vermindert dus naarmate de prijs in euro stijgt. De prijzen blijven dus het langst in het interval tussen 1 euro en 1.99 euro.

2.a

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(d)$	0.301	0.176	0.125	0.097	0.079	0.067	0.058	0.051	0.046

2.b De waarden in de beide tabellen zijn ongeveer dezelfde. De verschillen zijn veroorzaakt door afrondingen naar het dichtstbijzijnde jaar in vraag 1. Indien deze periode kleiner zou zijn, dan lagen de resultaten dichter bij de resultaten uit vraag 2.
3. De dataset van Larry volgt de wet van Benford niet zodat het een zelfverzonnen dataset kan zijn.

Wij zijn nummer 1

In deze aflevering spreekt Charlie over de wet van Benford, die kan worden gebruikt om vervalste data op te sporen door te kijken naar het eerste cijfer van de getallen. In 393 gaat het over de 3, in 7295 over de 7. Veel mensen denken dat alle cijfers evenveel kans hebben om voor te komen als eerste cijfer van een getal. De wet van Benford zegt echter dat in de meeste gewone datasets getallen met een 1 of een 2 als eerste cijfer veel meer voorkomen dan getallen met een ander eerste cijfer.

Om de wet van Benford te illustreren zullen we kijken naar een voorbeeld over de benzineprijs.

1. Veronderstel dat op tijdstip $t = 0$ de prijs van een liter benzine € 1.00 was. Om het niet te moeilijk te maken veronderstellen we dat de benzineprijs stijgt door een jaarlijkse inflatie van 5%. De kostprijs van een liter benzine na t jaar wordt dan gegeven door de formule $c(t) = e^{0.05t}$.

a. Hoeveel kost 1 liter benzine na 2 jaar? En na 5 jaar?

b. Bereken na hoeveel jaar de benzine voor het eerst meer dan 2 euro zal kosten.

c. Vervolledig onderstaande tabel om te zien na hoeveel jaar elke volgende eurogrens zal bereikt worden.

Kost (in euro per liter)	€2.00	€ 3.00	€ 4.00	€ 5.00	€ 6.00	€ 7.00	€ 8.00	€ 9.00	€ 10.00
t **in jaren**	14	22							

d. Bereken het aantal jaar dat de benzineprijs binnen de aangegeven intervallen zal liggen. Gebruik deze tabel dan om te berekenen hoeveel jaar de benzineprijs beneden de 10 euro per liter zal blijven.

Kost interval	€ 1.00-€1.99	€ 2.00-€ 2.99	€ 3.00-€ 3.99	€ 4.00-€ 4.99	€ 5.00-€ 5.99	€ 6.00-€ 6.99	€ 7.00-€ 7.99	€ 8.00-€ 8.99	€ 9.00-€ 9.99
aantal jaren	14	8							
% **tijd**	30%								

e. De tabel geeft nu informatie over de kostprijs van een liter benzine voor de volgende 47 jaar. Bereken het percentage van de tijd dat de kostprijs in elk prijsinterval was.

f. Waarom is dit percentage het hoogst in het eerste interval?

2. Benford ontwikkelde de volgende formule die de kans aangeeft dat het eerste cijfer van een getal d is:

$$P(d) = \log\left(1 + \frac{1}{d}\right)$$

a. Gebruik deze formule om de volgende tabel in te vullen:

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(d)$									

b. Vergelijk deze kansen met je antwoorden op vraag 1d. Waarom zijn er verschillen?

3. Veronderstel dat Charlie datasets krijgt van drie verschillende personen en dat hij één van de drie ervan verdenkt zelf de data te hebben verzonnen. Hij telt in elke dataset het voorkomen van de eerste cijfers en zet dit in de volgende tabel. Gebruik de wet van Benford om te achterhalen wie de vervalser is.

cijfer 1	**aantal keer**		
	Larry	Karl	Mark
1	320	390	452
2	192	230	264
3	176	164	185
4	160	120	147
5	320	103	117
6	102	86	102
7	100	75	87
8	110	66	78
9	120	60	68

SIR Modellen

Onderwerp: Verhoudingen en formules gebruiken.
Doel: De leerlingen zullen evenredige grootheden leren gebruiken om de effecten van een epidemie te voorspellen. Ze leren ook de resultaten te verklaren.
Materiaal: TI-83 Plus/TI-84 Plus en een spreadsheet.

Inleiding

Wanneer een onbekende besmetting een stijgend aantal sterfgevallen veroorzaakt in Los Angeles roept het FBI de hulp in van Charlie om de bron van de besmetting te vinden. Hiervoor gebruikt Charlie een SIR model. Met dit model probeert hij voorspellingen te doen over de epidemie. We willen hier het SIR model uitleggen en toepassen op een populatie. Met de GRM zullen we lijsten opslaan en scatter plots maken voor de analyse van het probleem.
Om de spreadsheet te downloaden en de lijst die gebruikt wordt: ga naar
`http://education.ti.com/exchange` en zoek naar 7720.

Bespreek met de leerlingen:

Een wiskundig model opstellen van een epidemie is vrij moeilijk omdat men meestal met zeer veel variabelen moet rekening houden. Er is echter een doorbraak gekomen in 1927 door Kermack en McKendrick. Zij verdeelden de aangetaste populatie in drie toestanden: **S**usceptible, **I**nfected en **R**ecovered, dit werd bekend onder de naam **SIR** model. Mensen in de populatie gaan over van S naar I en dan naar R.
Sommige SIR modellen zijn zeer complex, maar het model dat we hier zullen bekijken is eenvoudig.
In dit model veronderstellen we dat de populatie zich bevindt in een afgesloten gebied (er kan niemand in of uit), de populatie is ook vast (er zijn geen geboortes of natuurlijke sterfgevallen) en de ziekte wordt alleen door persoonlijk contact overgedragen.
Benadruk bij de leerlingen dat de waarden die voorspeld worden door het SIR model wiskundige resultaten zijn die men moet trachten te interpreteren op een goede manier (zo kan het model bijvoorbeeld 3,1 zieke mensen voorspellen wat eigenlijk onmogelijk is).

Wanneer je de SIR model formules die we hier zullen gebruiken verklaart, vermeld dan aan de leerlingen dat niet iedereen die geïnfecteerd is de ziekte zal doorgeven aan elke persoon waarmee hij in contact komt. Zieken zullen de ziekte alleen aan een fractie (a) van de personen die ze ontmoeten overdragen. De snelheid waarmee S verandert is $-aSI$. De snelheid waarmee I verandert zal toenemen met deze die juist besmet zijn (aSI) en verminderen met deze die hersteld zijn van de ziekte (bI)

$$\begin{aligned} S' &= -aSI \\ I' &= aSI - bI \\ R' &= bI \end{aligned}$$

Antwoorden op de vragen voor de leerlingen:

1. Omdat 5 mensen die besmet waren genazen.
2. $S' = -33,75;\quad I' = 27,6$ en $R' = 6,15$.
3.

Dag	S	I	R	S'	I'	R'
0	1400,00	100,00	0,00	-28,00	23,00	5,00
1	1372,00	123,00	5,00	-33,75	27,60	6,15
2	1338,25	150,60	11,15	-40,31	32,78	7,53
3	1297,94	183,38	18,68	-47,60	38,43	9,17
4	1250,34	221,81	27,85	-55,47	44,38	11,09
5	1194,87	266,19	38,94	-63,61	50,30	13,31
6	1131,26	316,49	52,25	-71,61	55,78	15,82
7	1059,65	372,28	68,07	-78,90	60,28	18,61
8	980,75	432,56	86,69	-84,85	63,22	21,63
9	895,91	495,78	108,32	-88,83	64,05	24,79
10	807,07	559,82	133,10	-90,36	62,37	27,99

4. De snelheid waarmee de waarden in de drie groepen veranderen stijgt omdat het aantal geïnfecteerde personen groter wordt, wat als gevolg heeft dat meer mensen het virus verspreiden.
5. Dag 18, 847 personen zijn geïnfecteerd.
6. Dag 16

SIR Modellen

Wanneer een onbekende besmetting een stijgend aantal sterfgevallen veroorzaakt in Los Angeles roept het FBI de hulp in van Charlie om de bron van de besmetting te vinden. Hiervoor gebruikt Charlie een SIR model. Met dit model probeert hij voorspellingen te doen over de epidemie en de kracht ervan te beoordelen.

Epidemies hebben een verwoestend effect op de samenleving. In 1918 stierven tussen 20 en 40 miljoen mensen aan de griep. Het Ebola virus breekt geregeld uit in Afrika om onbekende redenen. Proberen te voorspellen wat er in het geval van een epidemie gaat gebeuren is een moeilijke taak omwille van de manier waarop deze pathogenen verspreiden.
Om een epidemie beter te begrijpen werd het SIR model uitgewerkt. De Wereld Gezondheidsorganisatie (WHO) verzamelt en analyseert voortdurend data om te detecteren hoe een ziekte zich verspreidt.

Een **SIR** model veronderstelt dat elke persoon in de populatie behoort tot één van de volgende drie groepen:

- **S**usceptible (kan geïnfecteerd zijn)
- **I**nfected (heeft de ziekte)
- **R**ecovered (heeft een immuniteit opgebouwd tegen de ziekte of is erdoor overleden)

Wanneer mensen geïnfecteerd zijn gaan ze van staat **S** naar staat **I** en wanneer ze genezen gaan ze van **I** naar **R**.

Het vereenvoudigde SIR model hier veronderstelt:

- De populatie bevindt zich in een afgesloten gebied (niemand komt erin of gaat eruit)
- De populatie is vast (geen geboortes of natuurlijke sterfgevallen)
- De ziekte wordt alleen overgedragen door direct, individueel contact.

Wanneer we nadenken over het model wordt het duidelijk dat de aantallen in de verschillende groepen voortdurend veranderen. De snelheid waarmee mensen geïnfecteerd geraken (I') zal toenemen wanneer meer mensen ziek worden en de ziekte kunnen overdragen. De snelheid waarmee S en R veranderen (S') en (R') zal ook wijzigen met de tijd.
We modelleren dit wiskundig op de volgende manier:

$$\begin{aligned} S' &= -aSI \\ I' &= aSI - bI \\ R' &= bI \end{aligned}$$

Hierbij is a de transmissiecoëfficiënt en b de herstelcoëfficiënt.
Bijvoorbeeld: veronderstel dat er in een school van de 1500 leerlingen 100 besmet zijn met de griep. Neem aan dat de herstelcoëfficiënt 1/20 is (d.w.z. dat het 20 dagen duurt vooraleer je volledig genezen bent) en dat de transmissiecoëfficiënt 0,0002 is (dit is de kans per dag dat een persoon besmet wordt door de ziekte).

Omdat 100 leerlingen besmet zijn, op dag 0, geldt: $S = 1400$, $I = 100$ en $R = 0$.
Wanneer we het model gebruiken dat hiervoor beschreven werd zal $S' = -28$, $I' = 23$ en $R' = 5$. Dit betekent dat 28 leerlingen ziek werden terwijl 5 leerlingen genazen.

Dag	**S**	**I**	**R**	**S'**	**I'**	**R'**
0	1400,00	100,00	0,00	-28,00	23,00	5,00

1. Indien 28 studenten niet langer in categorie S zitten, waarom verandert de besmettingssnelheid (I') dan niet naar 28?

Om de waarden voor S, I en R te berekenen voor dag 1, tel je de overeenkomstige waarden van hun veranderingen (S', I' en R') van dag 0 erbij op.

2. Wanneer je dan de nieuwe waarden voor S, I en R gebruikt kan je de nieuwe S', I' en R' berekenen.
Het is belangrijk om te beseffen dat dit wiskundige resultaten zijn (11,15 mensen dat bestaat natuurlijk niet), maar om zo dicht mogelijk bij het model te blijven moeten we met deze waarden verder rekenen en mogen we niet afronden tussendoor.

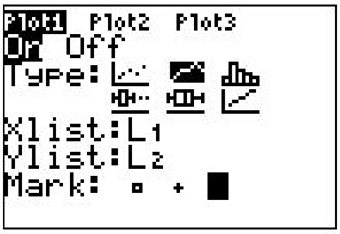
Dag	**S**	**I**	**R**	**S'**	**I'**	**R'**
0	1400,00	100,00	0,00	-28,00	23,00	5,00
1	1372,00	123,00	5,00			

3. Vervolledig nu de ganse tabel.

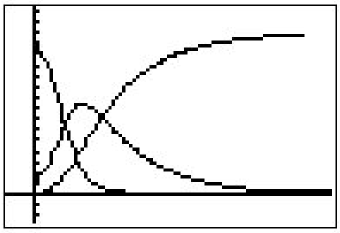
Dag	**S**	**I**	**R**	**S'**	**I'**	**R'**
0	1400,00	100,00	0,00	-28,00	23,00	5,00
1	1372,00	123,00	5,00			
2	1338,25	150,60	11,15			
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

4. Wat gebeurt er met S', I' en R' en waarom?

Met de datalijst is het mogelijk om tegelijk de grafieken te zien van S, I en R. Je kan van je leraar of van de website `http://education.ti.com/exchange` en zoek naar 7720, de lijsten voor de eerste 100 dagen bekomen.



Duw [2nd][STAT PLOT] en selecteer **Plot1**. Gebruik de settings die je hierboven ziet. Doe dit ook voor de andere lijsten.



Duw [ZOOM] en selecteer **9:ZoomStat**. Je ziet de grafiek van S (plot1), I (plot2) en R (plot3)

5. Met trace kan je vinden op welke dag er de meeste infecties waren en hoeveel.

6. Wanneer overtreft het aantal herstelde personen het aantal geïnfecteerde?

Notities

Numb3rs is een Amerikaanse misdaadserie van CBS. Een FBI inspecteur lost misdaden op met de hulp van zijn broer, een geniale professor in de wiskunde. De serie toont aan dat de wiskunde onverwachte oplossingen kan bieden voor complexe problemen die ontstaan bij het zoeken naar misdadigers. Het script is gebaseerd op ware feiten.

Texas Instruments heeft een overeenkomst gesloten met CBS om samen met de Amerikaanse vereniging van wiskundeleerkrachten de serie te gebruiken om op een hedendaagse manier de toepasbaarheid van wiskunde aan leerlingen (en hun ouders) te tonen. Zo kunnen ze wellicht ook beter begrijpen dat wiskunde voor hun professionele toekomst heel belangrijk kan zijn.

De wiskunde die gebruikt wordt in de afleveringen werd vertaald naar activiteiten voor de leerlingen in de klas. Dit cahier wil hiervan enkele voorbeelden tonen aangepast aan ons onderwijs.

Er worden 11 uitnodigende opgaven behandeld waarbij telkens de doelgroep wordt vermeld. De opgaven bevatten een bijdrage voor de leerkracht en de leerlingen. Vaak wordt er ook verwezen naar extra materiaal op het internet.

.

Geertrui Van Eetvelde is leerkracht aan O.L.Vr. Presentatie Humaniora te Sint-Niklaas

Augustus 2008

Texas Instruments