Cahiers T³ Europe

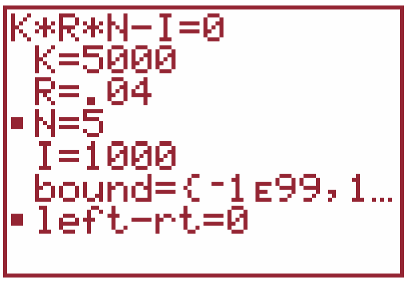
Vlaanderen nr. 5

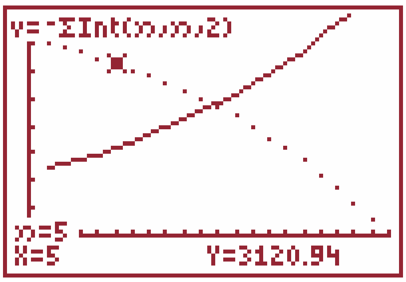
T³ EUROPE

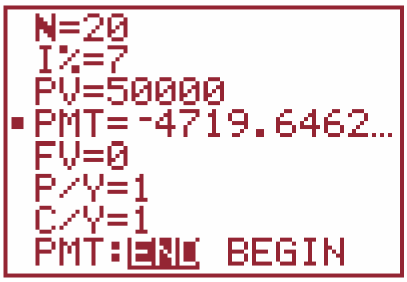
# Financiële wiskunde

## met de TI-83/84 Plus

*Etienne Goemaere*




KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

# Financiële wiskunde

**met de TI-83/84 Plus**

*Etienne Goemaere*

T³ EUROPE

## INHOUD

Wanneer we tijdens de lessen Wiskunde overstappen naar het gebruik van een grafisch rekentoestel, de TI-83/84 Plus (SE), dan kunnen we verscheidene doelstellingen nastreven die anders moeilijk realiseerbaar zijn en dus een meerwaarde betekenen.

- We zetten de leerlingen aan tot het nemen van ICT stappen door hen voor repetitieve bewerkingen te wijzen op bepaalde handigheden van de grafische rekenmachine of door er hen eenvoudige programmaatjes voor te leren schrijven.

- Eenmaal de leerlingen hun basisformules beheersen ( apart geëvalueerd ) kunnen (zelfgeschreven) programma's het rekenwerk verlichten zodat meer tijd overblijft voor inzicht bevorderende oefeningen of oefeningen met een grotere moeilijkheidsgraad.

- We kunnen de leerlingen op een eenvoudige manier doorheen verschillende oplosmethodes loodsen en hen zelf een oordeel laten vormen.

# I) Het gebruik van de Solver

Als we herhaaldelijk eenzelfde formule moeten gebruiken dan kan het handig zijn om deze in te voeren in de Solver

**1)** Voorbeeld 1 De intrestformule voor enkelvoudige intrest $I = k \cdot i \cdot n$

- We herschrijven de formule zodat in het linkerlid 0 staat $0 = k \cdot i \cdot n - I$
- Druk en kies `0:Solver`
- Zien we `EQUATION SOLVER` staan dan kunnen we een vergelijking invullen, is dit nog niet zo dan volstaat een druk op de opwaartse pijltoets **}** om daar te komen.

  De vergelijking $0 = k \cdot i \cdot n - I$ kunnen we niet invullen met kleine letters omdat variabelen onder grote letters opgeslagen worden.

  Stellen we $\begin{cases} K = \text{het kapitaal} \\ R = \text{de rentevoet} \\ N = \text{de periode} \\ I = \text{de intrest} \end{cases}$, dan kunnen we de vergelijking $0 = K \cdot R \cdot N - I$ ingeven.

  Drukken we op **Í** dan kunnen we nu waarden ingeven bij de verschillende variabelen. Geven we zo bij drie van de vier variabelen een waarde in dan wordt de vierde berekend door op Solve ( ***f*** **Í** ) te drukken.

```
K*R*N-I=0
 K=5000
 R=4.75E-4
 N=180
▪I=427.5
 bound={-1E99,1…
▪left-rt=0
```

```
K*R*N-I=0
 K=5000
 R=.04
▪N=5
 I=1000
 bound={-1E99,1…
▪left-rt=0
```

…

Hiermee kunnen de leerlingen in een handomdraai vinden dat de tijd nodig voor een kapitaalsverdubbeling (intrest = kapitaal) bij enkelvoudige intrest alleen afhangt van de rentevoet en niet van het kapitaal.

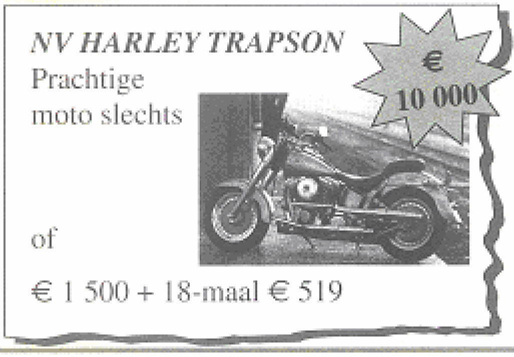
Doe dit maar eens.

**2)** <u>Voorbeeld 2</u>    <u>Berekening van een JKP bij consumentenkrediet</u>

**OEFENINGEN**

*Bron: Financiële Algebra (Pienter, uitgeverij Van In)*

**1**




Het lastenpercentage $L$ =

Het jaarlijkse kostenpercentage JKP =

Het maandelijks lastenpercentage L berekenen we als:

$$\frac{M-\frac{K}{n}}{K}\quad\left\{\begin{array}{l}\text{M de mensualiteit (afkortingsbedrag)}\\ \text{n het aantal mensualiteiten}\\ \text{K het ontleende (konsumentenkrediet)}\end{array}\right.$$

Hier is dit $\dfrac{519-\dfrac{8500}{18}}{8500}\approx 0{,}005503$.

Een exacte formule voor de berekening van een jaarlijks kostenpercentage (JKP) bestaat niet. Beschikken we over het lastenpercentage dan wordt het jaarlijks kostenpercentage benaderd door $L\cdot 24\cdot\dfrac{n}{n+1}$.

Hier is dit 12,5127%

```
(519-8500/18)/85
00
         .005503268
Ans*24*18/19
         .125126935
```

Wettelijk mag een consumentenkrediet niet alleen meer gekenmerkt worden door het maandelijks lastenpercentage. Vandaar dat een bepaling van het jaarlijks kostenpercentage op die manier ook nog weinig gebeurt.

Om het jaarlijks kostenpercentage te bepalen los van het maandelijks lastenpercentage beschouwen we het consumentenkrediet als een annuïteit. Met de ingebouwde financiële functies van de TI-84 Plus is het jaarlijks kostenpercentage zelfs op verschillende manieren te berekenen.

- Een eerste mogelijkheid, die ook nog altijd gebruik maakt van het lastenpercentage, doet een beroep op de Solver

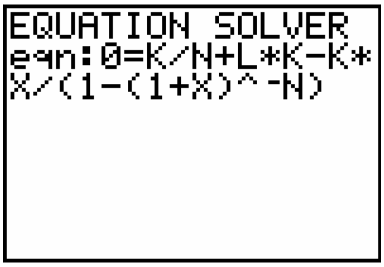
Enerzijds weten we dat het maandelijks te betalen bedrag, de mensualiteit M, te berekenen is als

$$\frac{K}{n} + L \cdot K \qquad \text{met} \begin{cases} \text{K het ontleende kapitaal} \\ \text{L het maandelijks lastenpercentage (1).} \\ \text{n het aantal mensualiteiten} \end{cases}$$

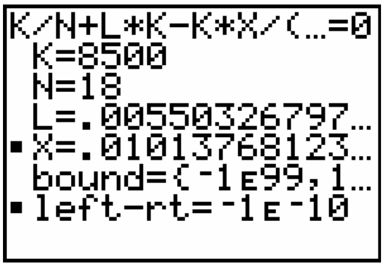
Bekijken we anderzijds de mensualiteit als een maandelijks te betalen termijnbedrag van een annuïteit dan geldt dat M gelijk is aan

$$\frac{K \cdot i}{1 - u^{-n}} \quad \text{hierin is} \quad u = 1 + i \quad \text{met} \quad i \quad \text{de jaarlijkse rentevoet (2).}$$

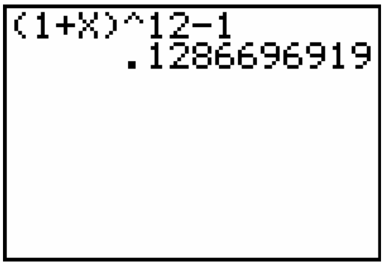
De gelijkstelling van (1) aan (2) levert ons de vergelijking $\frac{K}{n} + L \cdot K = \frac{K.i}{1 - u^{-n}}$ op die we, na herschrijven, kunnen inbrengen in de Solver .




Vullen we de gegevens en het gevonden lastenpercentage in dan bekomen we een maandelijkse rentevoet waaruit we de gelijkwaardige reële rentevoet kunnen berekenen.



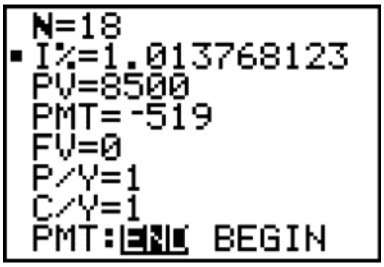

Die bedraagt 12,8670%.
Het resultaat 12,5127% van de benaderingsformule wijkt op het eerste zicht misschien niet zoo veel af, maar 3 tienden van een procent is niet niks in de financiële wereld.

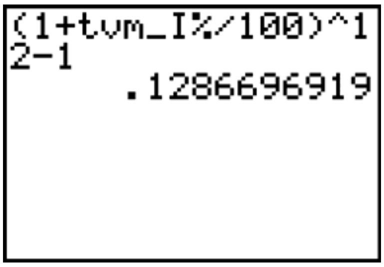



- Een tweede mogelijkheid is dat we met de TVM Solver van de annuïteit de maandelijkse rentevoet bepalen en hieruit de reële rentevoet.

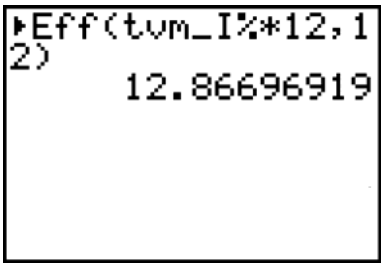
Na het invullen van de gegevens onder N, PV, PMT (negatief!) volstaat de toetsencombinatie **y** **í** om naast I de maandelijkse rentevoet te zien verschijnen.

De reële rentevoet vinden we met de betrekkingen voor gelijkwaardige rentevoeten.

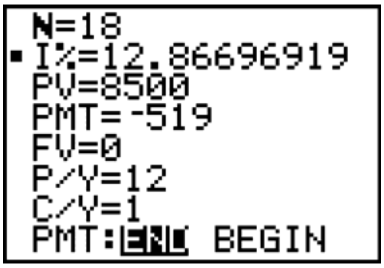



Opmerking: voor de berekening van reële rentevoet kunnen we ook gebruik maken van de functie ▶ Eff(nominale, aantal kapitalisaties) die een reële rentevoet berekend voor een gegeven nominale en de aard van de gegeven kapitalisatie.



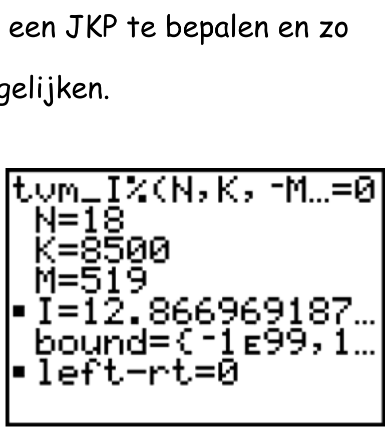

- Een derde mogelijkheid is de reële rentevoet ineens te berekenen in de TVM Solver




Geven we onder N het aantal maanden in en onder PMT het maandelijkse termijnbedrag dan bekomen we bij I% de jaarlijkse rentevoet door P/Y=12 en C/Y=1 te stellen.

Stoppen we onderstaande vergelijking in de Solver, dan bekomen we een gebruiksvriendelijk scherm dat ons in staat stelt in een handomdraai een JKP te bepalen en zo bijvoorbeeld verschillende kredieten met elkaar te vergelijken.

```
0 = tvm_I%(N,K,-M,0,12,1)-I
```




$$\text{waarbij} \begin{cases} N = \text{aantal maanden} \\ K = \text{bedrag van het krediet} \\ M = \text{de mensualiteit} \\ I = \text{de reële rentevoet (maal 100)} \end{cases}$$

Controleer op die manier maar eens de verschillende JKP van volgende kredieten.

## OEFENINGEN

**4** In een advertentie troffen we volgende reclameboodschappen aan. Welk maandelijks lastenpercentage wordt bij de leningsvormen gehanteerd?
Wat is het overeenkomstige benaderend / exact jaarlijkse kostenpercentage?

*Krap bij kas*

BELLEKREDI
Kredietmakelaar

*Helpt u*

*Dringend geld nodig ? ? ?*
Op lange termijn en gemakkelijk betalen
**GRATIS ADVIES**
JKP van 8,6 tot 19,5

€ 3 000 = 20 x € 170,35 € 7 000 = 42 x € 209,58
€ 5 000 = 30 x € 204,95 € 9 000 = 42 x € 285,25
€ 7 000 = 36 x € 254,37 € 10 000 = 60 x € 201,50

Tweekerkenstraat 456 8460 Westkerke (059)59 59 59 elke dag tot 23 uur

***Bron: Financiële Algebra (Pienter, uitgeverij Van In)***

Zo zijn er nog tal van formules in de financiële algebra waar het oplossen van standaardoefeningen heel gemakkelijk met de Solver kan .

Het feit dat de leerlingen hier nog altijd zelf de formules moeten omvormen naar een op nul gelijkgestelde vergelijking, kan als een extra oefening op formulekennis ervaren worden.

Opmerking

Niet alleen de grafische rekenmachine leent zich tot het automatiseren van bepaalde processen. Liefhebbers van Excel zullen nu wellicht al inspiratie opgedaan hebben om iets dergelijks voor hun favoriete ICT gereedschap te gaan ontwikkelen.

***(In het leerwerkschrift "Financiële algebra", uit de reeks Pienter uitgegeven bij Van In, vinden we op de meegeleverde cd-rom al deze Excel-bijdrages)***

## 3) Zelf aan de slag met de formules voor:

- de eindwaarde bij enkelvoudige intrest $K = k \cdot (1 + i \cdot n)$

$$\begin{cases} k = \textit{ beginkapitaal} \\ i = \textit{de rentevoet per periode} \\ n = \textit{ het aantal periodes} \\ K = \textit{ het eindkapitaal} \end{cases}$$

- de eindwaarde bij samengestelde intrest in $k_n = k \cdot (1 + i)^n$

$$\begin{cases} k = \textit{ beginkapitaal} \\ i = \textit{de rentevoet per periode} \\ n = \textit{ het aantal periodes} \\ k_n = \textit{ het eindkapitaal} \end{cases}$$

- de berekening van het lastenpercentage van een consumentenkrediet $L = \dfrac{M - \frac{K}{n}}{K}$

$$\begin{cases} K = \textit{ het ontleende kapitaal} \\ L = \textit{het lastenpercentage} \\ n = \textit{ het aantal maanden} \\ M = \textit{ de mensualiteit} \end{cases}$$

# II) Programma's om aan intrestrekenen te doen

Een andere oplossingsmogelijkheid die de grafische rekenmachine ons biedt om ICT in onze lessen wiskunde binnen te halen, bestaat uit het gebruiken (schrijven) van programma's.

Laten we ons hier niet afschrikken door dat zware woord "programma".

Dat het schrijven van een TI-84 Plus-programma geen onoverkomelijke hindernis is mag blijken uit volgende paragraaf.

**1)** <u>Programma dat de intrest berekent</u> bij gegeven waarden voor beginkapitaal, rentevoet en aantal periodes

- Druk op

- Ga met de pijltoets naar NEW en druk op Í
  (dus 1:CREATE NEW werd gekozen)

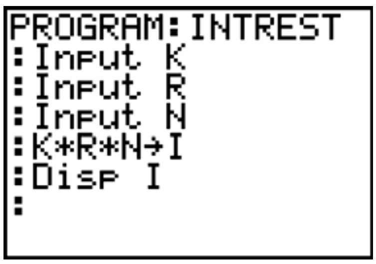
- Geef een naam in bv "INTREST" (je mag hier de letters intikken zonder *f* of A-LOCK te moeten gebruiken)

- We vragen naar de ingave van het beginkapitaal met Input K
  Deze regel bekomen we door op te drukken , met de pijltoets naar I/O te gaan , 1 in te drukken (om 1:Input te bekomen) , vervolgens op *f* ( te drukken (letter K) en tenslotte te ENTERen

- Op analoge manier vragen we om rentevoet R en aantal periodes N in te geven

- We bereken de intrest als het produkt K*I*N en slaan dit op (toets STO➔) in de variabele I

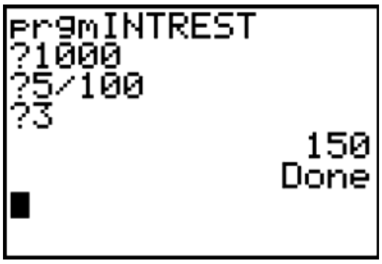
- Om het resultaat te laten zien geven we het commando Disp I in door te drukken om , te bewegen naar I/O en 3 te drukken en vervolgens *f* ¡ (dus I)



Bemerk de overeenkomst tussen de taal van de wiskunde en het programmaatje:

| | | |
|---|---|---|
| **Gegeven**: | kapitaal | **Input** K |
| | rentevoet | **Input** R |
| | periode | **Input** N |
| Gevraagd | intrest | |
| Oplossing | K.i.n=I | K*R*N→R |
| | | Disp R |

Drukken we nu op **y** **z** dan komen we in ons basisscherm. Om het programma nu te gebruiken drukken we op en kiezen onder de EXEC het juiste programma door te ENTERen.
Zoals je hiernaast ziet is het programma verre van gebruiksvriendelijk.

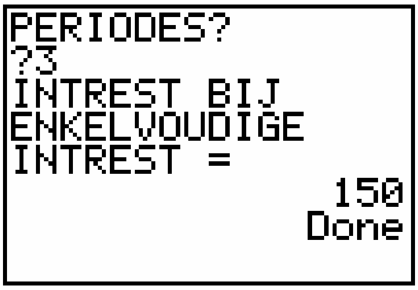



Daarom gaan we er op de gepaste plaatsen commentaar aan toevoegen door op te drukken, te kiezen voor EDIT en het juiste programma.
Sta je op de eerste regel dan kan je met 2nd INS ENTER een lege regel toevoegen.
In die regel zetten we nu via I/O 3:Disp het commando Disp dat we laten volgen door de gewenste tekst **tussen aanhalingsteken** (bij de +)

Plaats zo voor:
- de input van k de commentaar "KAPITAAL? "
- de input van r de commentaar "RENTEVOET? "
- de input van n de commentaar "PERIODES? "
- de output van I de commentaar "INTREST BIJ "
  "ENKELVOUDIGE INTREST ="

(gebruik A-LOCK om vlug de tekst in te tikken)

Het programma kan nu ook gebruikt worden door iemand die niet weet hoe het programma geschreven is



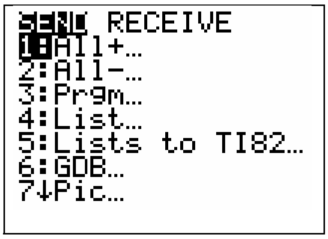

*Opmerking:*
*Het is niet zeker niet de bedoeling dergelijk programma te gaan gebruiken om van de formules af te zijn. Belangrijk is het kennismaken met ICT-mogelijkheden en het wegnemen van een zekere drempelvrees. De leerlingen zelf een programma laten schrijven ( ≠ het gebruiken in de oefeningen) kan hen zelfs helpen bij het memoriseren van de formule.*

## 2) Intrest met de TI-84 Plus met het programma FINANC

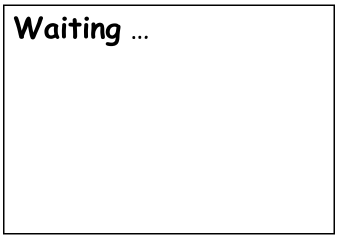
Het programmaatje FINANC staat niet standaard op de TI-84 Plus maar kunnen we er als volgt op plaatsen.

*(FINANC is onder andere te downloaden op [http://users.pandora.be/etienne_goemaere/](http://users.pandora.be/etienne_goemaere/) of te vinden op de cd-rom die hoort bij het werkschrift "Financiële algebra" uit de reeks Pienter)*

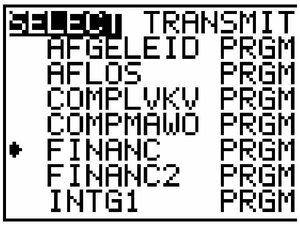
- Het toestel dat het programma moet ontvangen zetten we klaar om te ontvangen met de toetsencombinatie **y** [LINK], het kiezen van RECEIVE en het drukken van 1 (1:RECEIVE ENTER)





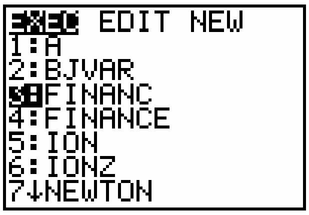


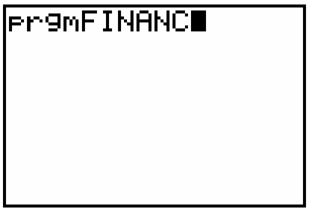

- Het toestel dat het programma moet verzenden zetten we klaar om te verzenden met de toetsencombinatie **y** [LINK], het bij SEND kiezen van 3:Prgm, het markeren van het te verzenden programma FINANC, het drukken op **Í** , het selecteren van TRANSMIT en het drukken op **Í**

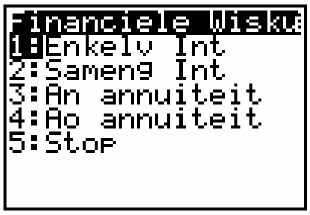





Eenmaal het programma op uw toestel aanwezig ga je als volgt te werk:
Druk op , kies voor EXEC ?:FINANC, druk op **Í**



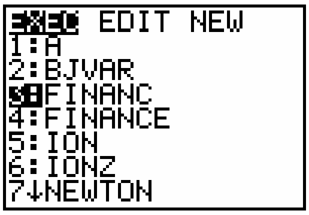



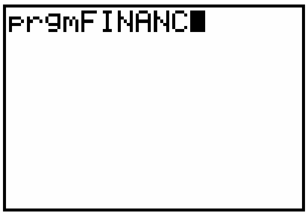

Het programma werkt niet op de TI-83 (kleine letters?), maar er is een versie die dit wel doet: FINANC2 (te downloaden op hetzelfde adres als hierboven).

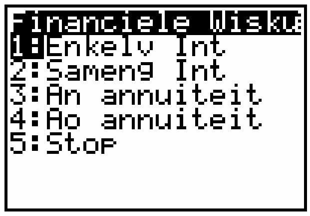
*Opmerking: bij het programma FINANC geven we het procent p ( =100 · i ) in en bij FINANC2 de rentevoet i.*

Wie het programma naar eigen behoeften wil aanpassen vindt achteraan in bijlage de programmacode.

*i) Voor enkelvoudige intrest kiezen we voor 1:Enkelv Int*



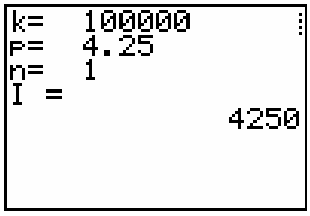




- **Intrestberekening**

**Gegeven** kapitaal van €100000 aan 4,25% gedurende 1 jaar

**Gevraagd** intrest

**Oplossing** kies voor 1:Intrest, vul in k = 100000 i = 4.25 n =1
en druk op í

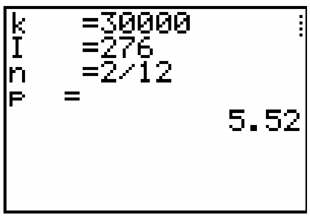




- **Rentevoet berekenen**

**Gegeven** kapitaal €30000 gedurende 2maanden levert €276 intrest op

**Gevraagd** rentevoet

**Oplossing** kies voor 3:I, vul in k = 30000 I =276 n =2/12
en druk op í

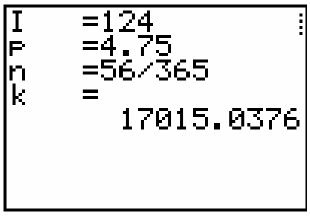



- **Kapitaalsberekening**

**Gegeven** kapitaal brengt na 56 dagen tegen 4,75% , €124 intrest op

**Gevraagd** kapitaal

**Oplossing** kies voor 2:Kapitaal , vul in I = 124 i =4.75
n=56/365 en druk op í

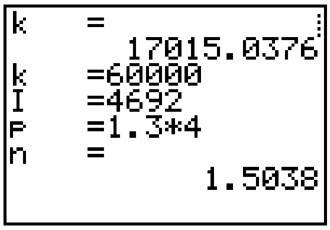




- **Berekening periode**

**Gegeven** €60000 brengt €4692 intrest op aan 1,3 % per trim

**Gevraagd** periode

**Oplossing** kies voor 4:TIME , vul in INT = 4692 I=1.3∗4 en druk op í


*Uiteraard houdt dit programma niet in dat de leerlingen de formules niet meer moeten kennen, noch dat ze die moeten kunnen gebruiken op een klassieke manier. Eenmaal de leerlingen echter aangetoond hebben de basisformules onder de knie te hebben, kunnen met behulp van dergelijke programma's opdrachten aangesneden worden die anders voor bepaalde leerlingen net iets te hoog gegrepen zijn.*

Voorbeeld (we werken hier binnen een systeem van enkelvoudige intrest)

**4**

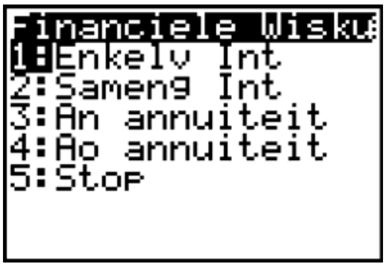
Iemand plaatst 25 000 euro gedurende 5 maanden tegen 1,25 %. Onmiddellijk daarop wordt het verkregen kapitaal herbelegd voor 8 maanden. Aan het slot van deze periode is het kapitaal aangegroeid tot 25 381 euro.

a) Wat is de rentevoet van de laatste 8 maanden?

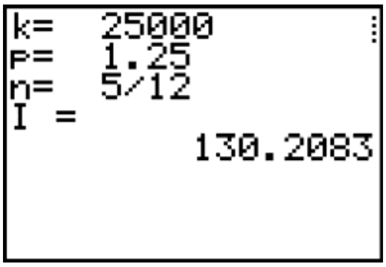
b) Wat is de gemiddelde rentevoet voor de totale beleggingsduur?

*Bron: Financiële Algebra (Pienter, uitgeverij Van In)*

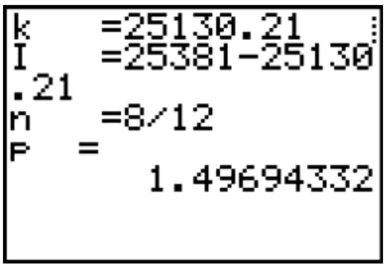
We berekenen eerst het kapitaal na 5 maanden

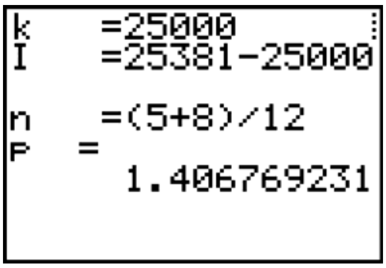







Kapitaal na 5 maanden is dus 25130,21. Vermits de eindwaarde nog eens 8 maanden later 25381 is, is de intrest gelijk aan het verschil (kunnen we zo intikken in het programma) We berekenen nu de jaarlijkse rentevoet. Op analoge manier berekenen we de gemiddelde rentevoet.

## Voorbeelden om zelf te proberen

Gelukmans wint bij de Lotto 123 946,76 euro. Hij schenkt hiervan aan zijn kinderen Ingrid en Fred elk 30986,69 euro. De rest kan hij beleggen tegen 14% bruto (netto intrest = bruto intrest -15% roerende voorheffing) door staatsobligaties te kopen. Hij koopt met het geld echter een huis en een appartement die hij verhuurt voor 173,53 euro en 198,31 euro per maand. Hij voorziet jaarlijks 942 euro voor onderhoud en belastingen. Heeft hij een goede belegging gedaan?

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

Een persoon zet 100000 euro voor 14 jaar tegen enkelvoudige intrest uit. De eerste 5 jaar tegen 5%, de volgende 6 jaar tegen 5,75%. Tegen welk procent werd gedurende de laatste periode belegd als die persoon na de volle periode over 224620,20 euro beschikt?

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

*ii) Voor samengestelde intrest kiezen we voor 2:Sameng  Int*

De gebruiksformaliteiten zijn gelijkaardig aan deze uiteengezet voor het systeem van enkelvoudige intrest.

Laten we daarom ineens kijken naar een aantal moeilijker opdrachten.

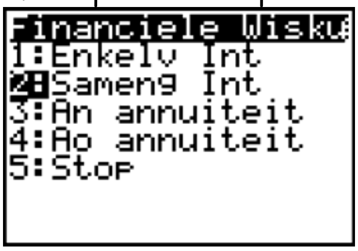
<u>Voorbeeld</u>   (We werken in een systeem van samengestelde intrest)

4

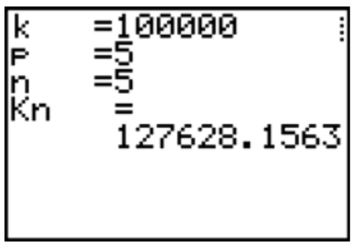
Een persoon plaatst 100 000 euro voor 14 jaar. De eerste 5 jaar tegen 5 %, de volgende 6 jaar tegen 5,75 %. Tegen welk procent werd gedurende de laatste periode belegd als hij na de volle periode over 224 260,20 euro beschikt?

*bron: Financiële algebra (Pienter; uitgeverij Van In)*

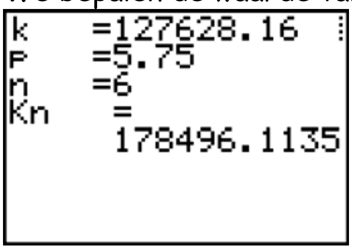
We bepalen het kapitaal na 5 jaar SI aan 5%



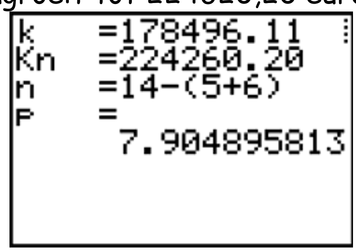





We bepalen de waarde van het kapitaal 127628,16  euro na 6 jaar SI aan 5,75%




We bepalen de rentevoet die zorgt dat het kapitaal van 178496,11 euro in het resterende aantal jaar aangroeit tot 224620,20 euro.

## Probeer zelf volgende opgaven

6

Iemand belegt twee kapitalen van 10 000 euro en 20 000 euro op samengestelde intrest. Als het grootste kapitaal belegd wordt tegen de hoogste rentevoet en het kleinste kapitaal tegen de laagste rentevoet, dan heeft hij na 15 jaar een totaal kapitaal van 63 670,08 euro. Belegt hij de grootste som tegen de laagste rentevoet en het kleinste tegen de hoogste dan heeft hij na 5 jaar een totaal kapitaal van 63 216,42 euro.
Tegen welke rentevoeten werden de kapitalen belegd?

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

***Bron: Financiële algebra (Pienter: uitgeverij Van In)***

11

Een beginnend zakenman heeft de volgende schulden bij een financiële instelling: 2 miljoen te betalen over 4 jaar; 4 miljoen te betalen over 5 jaar en 2 maanden; 3 miljoen te betalen over 8 jaar en 9 maanden.
Hij wil alle schulden binnen 6 jaar ineens terugbetalen. Met welk bedrag kan dit als de financiële instelling 8 % per jaar aanrekent?

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

***bron: Financiële algebra (Pienter-uitgeverij VanIn)***

# III) In het rood gaan komt je duur te staan.

Via volgende toepassing kunnen verschillende doelstellingen nagestreefd worden:

- de leerlingen wijzen op verschillende oplosmethodes en hen laten ontdekken wat de voor- en nadelen van gevolgde werkwijzen zijn
- de leerlingen in contact brengen met het begrip rij

Probleemstelling

Als laatste jaarsstudent ben ik beetje bij beetje voor €2151 in het rood komen te staan op mijn rekening. Daarmee ben ik zelfs onder de limiet van €1875 gegaan. Vermits ik nu mijn eigen boterham verdien, zal mijn rekening wel vlug aangezuiverd zijn.
Daarbij denk ik aan een maandelijkse storting van € 75 . Mijn bank gebruikt voor mijn kredietkaart een maandelijkse rentevoet 1,05% en rekent maandelijks €31.25 aan voor elke maand dat ik boven het limietbedrag sta.
Hoelang zal het duren vooraleer ik onder de €1875 in het rood sta en hoelang zal het duren vooraleer zo mijn rekening aangezuiverd is?

1ste manier van oplossen

Iedere maand ontstaat een schuld (N) die berekend wordt uit de schuld van de vorige maand

De situatie na 1 maand:

$$\begin{aligned} N &= 2151 + 1{,}05\% \text{ van } 2151 + 31{,}25 - 75 \\ &= 2151 + 0{,}0105.2151 + 31.25 - 75 \\ N &= 2151.(1 + 0{,}0105) + 31.25 - 75 \\ &= 2151.1{,}0105 - 43{,}75 \\ &= 2129{,}8355 \end{aligned}$$

De situatie na 2 maand:

$$\begin{aligned} N &= 2129{,}8355 + 1{,}05\% \text{ van } 2129{,}8355 + 31{,}25 - 75 \\ N &= 2129{,}8355.1{,}0105 - 43{,}75 \\ &= 2108{,}448773 \end{aligned}$$

De situatie na 3 maand:

$$\begin{aligned} N &= 2108{,}448773 + 1{,}05\% \text{ van } 2108{,}448773 + 31{,}25 - 75 \\ N &= 2108{,}448773.1{,}0105 - 43{,}75 \\ &= \quad ... \end{aligned}$$

Hierbij bemerken we dat de manier van berekenen telkens weer dezelfde is:

**Nieuwe schuld = Oude schuld . 1,0105-43.75**

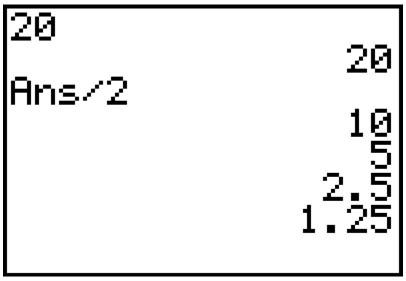
Nu bezit de TI-83 voorgeprogrammeerd de mogelijkheid om

een ingegeven bewerking te blijven herhalen op het getal

dat in ANS zit.

Kijk maar eens wat er gebeurt als je volgende zaken

ingeeft:

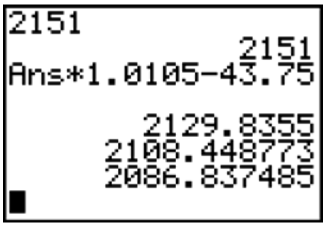


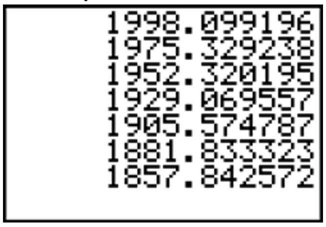

2Ø í /2 í í í í

Deze eigenschap kunnen we hier gebruiken om op een vlugge manier de evolutie van de maandelijkse situatie te bekijken en van zodra we zien dat de schuld onder de 1875 komt gaan we naar een nieuwe formule moeten overschakelen omdat dat het bedrag €31,25 niet meer bij mijn schuld komt.

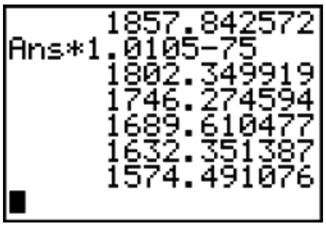
We zullen evenwel niet mogen vergeten te tellen hoeveel maal we op í gedrukt hebben zodat we het aantal maanden kennen dat nodig is om eerst onder de €1875 en vervolgens om onder 0 te komen.

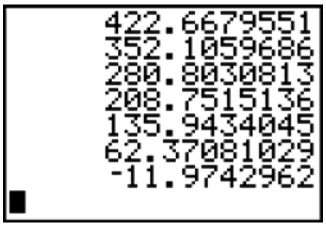
Nieuwe schuld = **Oude schuld . 1,0105-43.75**




vanaf dit moment wordt de schuld berekend als **oude schuld . 1,0105-75**



2de manier van oplossen

De voorgaande manier van oplossen heeft als nadeel ………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………………………………………

Vandaar dat we even kijken naar een meer elegante manier van oplossen.

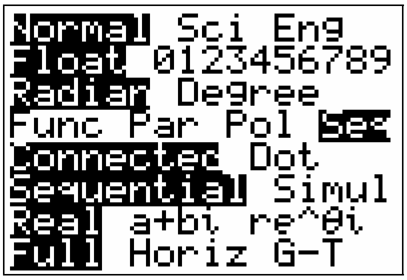
Bekijken we nog de werkwijze

| n | schuld na n maanden | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 2151 | | u(0) |
| 1 | 2151.1,0105 – 43,75<br>u(0)*1.0105 – 43.75 | 2129,8355 | u(1) |
| 2 | 2129,8355.1,0105-43,75<br>u(1)*1.0105 – 43.75 | 2108,4488 | u(2) |
| | . . . | | |
| | **u(n – 1) * 1.0105 – 43.75** | | **u(n)** |

We bouwen hier een **rij** van waarden op volgens een vast stramien

nieuwe schuld = oude schuld + verandering

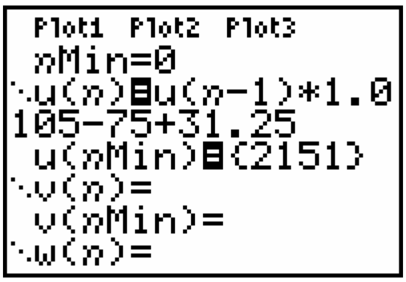
**Vandaar dat we de z van ons toestel op Seq (sequence) zetten**



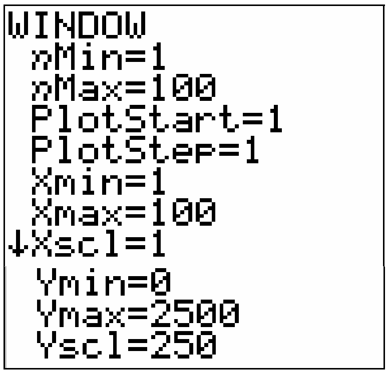

De beginschuld u(0) =2151 .

Elke maand wordt nieuwe schuld *u(n)* berekend als de oude schuld *u(n-1)* maal de rentefactor, vermindert met het maandelijks betaald bedrag en vermeerdert met het bedrag voor de overschrijding van het limietbedrag.

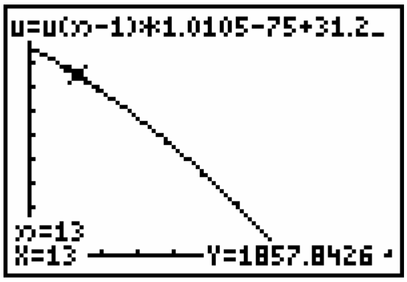
Druk op **o** en voer in zoals hiernaast.



Om nu na te gaan wanneer de schuld onder de 1875 euro komt, kunnen we, na het instellen van het p , naar de grafische voorstelling van de reeks kijken ( s en r ).



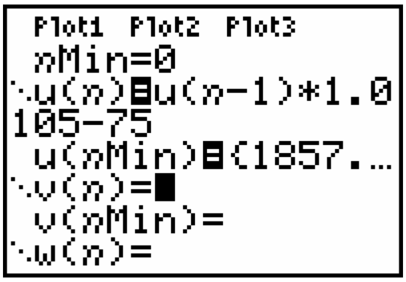

Na een tijdje op de pijltjestoetsen drukken vinden we dat de schuld onder de 1875 euro gaat na 13 maanden.
Je hebt dan al 13 keren 75 euro betaald (=975 euro) om dus 293,1574 euro schuld weg te werken en in de situatie te komen dat je niet langer maandelijks 31.25 euro supplementair moet betalen.



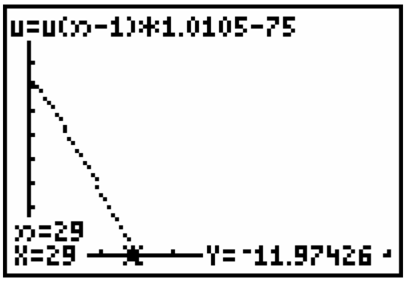

Vanaf nu ziet de afbouw van de schuld er anders uit

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | | 1857,8426 <br><1875 | v(0) |
| 14 | 1857,8426.1,0105-75 <br>v(0) * 1.0105 – 75 | 1802,3499 | v(1) |
| 15 | 182,3499.1,0105-75 <br>v(1) * 1.0105 – 75 | 1746,2746 | v(2) |
| | . . . | | |
| | **v (n – 1) * 1.0105 – 75** | | **v (n)** |
| | . . . | | |
| 42 | | -11,9743<0 | |

Vanaf nu mag dus uit de formule de 31,25 geschrapt worden en de beginschuld op 1868,75 gezet worden




We kijken nu net zoals hierboven hoelang het duurt vooraleer de schuld volledig weggewerkt is (eventueel na aanpassen **p** )




Het duurt dus nu nog eens 29 maanden (dus weer €2175 gestort) vooraleer de schuld volledig weggewerkt is. De totale duur komt daarmee op 42 maanden (3 jaar en 6 maand) en er werd dus €3150 betaald om een schuld van €2151 weg te werken

Deze manier van werken is natuurlijk uiterst geschikt om aan te passen aan andere situaties. Ga zelf eens na

- hoelang het voor het gegeven voorbeeld duurt als je 100 euro maandelijks kunt missen.

- Ik wens een schuld af te lossen van €4500 en zal hiertoe elke maand €200 storten bij de bank. De bank rekent mij een intrest op de uitstaande schuld aan tegen een maandelijkse rentevoet van 0,75%. Tevens moet ik maandelijks 0,5% intrest bijbetalen zolang mijn schuld boven €2500 staat.
  Hoelang zal het duren vooraleer ik onder het kaskrediet van €2500 kom?
  Hoelang zal het duren vooraleer mijn schuld geheel afgelost is?

## IV) De TVM-Solver - Financiële functies op de TI-84 Plus

In wat volgt wordt gebruik gemaakt van de specifieke financiële functies van de TI-84 Plus. Daarom vooraf een woordje uitleg over de betekenis van de verschillende functies.

Bij renteberekeningen kan de TI-84 Plus bijzonder goed worden ingezet omdat een daarvoor speciaal ontworpen applicatie, *Finance* genaamd, direct beschikbaar is:

**[APPS]1:Finance ...**

Ook de TI-83 kent *Finance*, echter niet als applicatie of programma, maar als functie (onder een "knop": **[2nd][MATH]**).


We zullen hieronder alleen de toepassing op de TI-84 Plus behandelen (de werking en bediening ervan op de TI-83 is overigens geheel gelijk aan die op de TI-84 Plus).

Bij renteberekeningen wordt gewerkt met variabelen die op de GR met specifieke namen worden aangegeven.

TI-naam betekenis

1: **N** – totaal aantal perioden, looptijd, aantal termijnen

2: **I%** – rentepercentage per jaar/periode (Eng. *interest*), vaak aangegeven met $p$ ($i = p/100$)

3: **PV** – kapitaal, beginwaarde (Eng. *present value*), soms ook aangegeven met k

4: **PMT** – periodieke betaling (storting, inleg), annuïteit (Eng. *payment*)

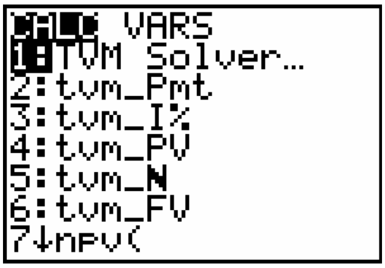
5: **FV** – eindwaarde, slotwaarde (Eng. *future value*, ook wel *final value*), soms aangegeven met $k_n$

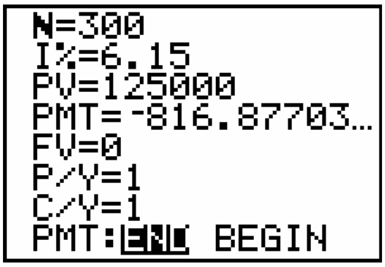
6: **P/Y** – aantal betalingstermijnen per jaar/periode (Eng. *payment periods per year*)

7: **C/Y** – aantal rentetermijnen per jaar/periode (Eng. *compounding periods per year*)

De berekeningen kunnen het eenvoudigst worden uitgevoerd met de zogenoemde

TVM-Solver (TVM staat voor *Time Value Money*).




In principe wordt een berekening met TVM-Solver bepaald door de eerste vijf variabelen (N, I%, PV, PMT, FV).

Bij vier gegeven waarden kan dan de vijfde worden berekend.

De waarden voor P/Y en C/Y dienen evenwel bekend te zijn (de standaard waarde van P/Y is gelijk aan 1). Wordt een waarde voor P/Y ingevoerd dan wordt C/Y daaraan automatisch gelijk.

Als C/Y ongelijk moet zijn aan P/Y, dan moet die waarde ook worden ingevoerd.

Daarnaast is het nodig aan te geven *hoe* de betalingen moeten plaats vinden:

- aan het eind van de termijn: *postnumerando*; TVM-variabele **PMT:END** ;
- aan het begin van de termijn: *prenumerando*; TVM-variabele **PMT:BEGIN** .

De standaard waarde voor **PMT** is **END**.

Voorts is het nodig te weten, dat ontvangsten op de GR standaard worden weergegeven als *negatieve getallen*.

Betalingen (stortingen) moeten (standaard) worden ingegeven als *positieve getallen*.

# IV) Een aflossingstabel genereren met TI-84 Plus

*We wensen een aflossingstabel te creëren voor een lening van 50000 euro terug te betalen met 20 jaarlijkse constante termijnen. De door de bank aangerekende jaarlijkse rentevoet bedraat 7%.*

**1)** <u>We geven de formules zelf in</u>

We zorgen dat ons toetsel geen oude lijsten bevat.

Hiervoor drukken we **y Ã** (dus `MEM`), druk 4:`ClrAllLists`, **Í** en nogmaals **Í** .

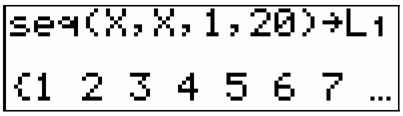
We drukken ook op **…** en kiezen voor `5:SetUpEditor` en **Í** om de standaardlijsten $L_1$, ... , $L_6$ in het venster te zien.

We maken een lijst aan met de volgnummers 1 tot 20

Hiervoor :

- drukken we **y …** (dus `LIST`),
- gaan naar OPS (met **~**) ,
- kiezen 5:seq( [let op niet Seq ],
- typen vervolgens `X,X,1,2Ø)`,
- drukken **¿ y À** (dus $L_1$)
- drukken nogmaals **Í**

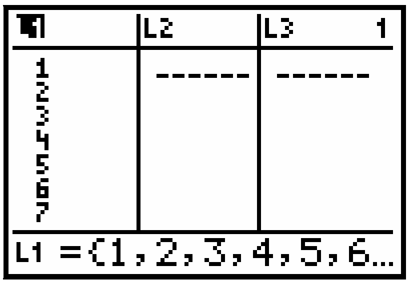
Op het scherm verschijnt




Druk ju nu op **…** ,

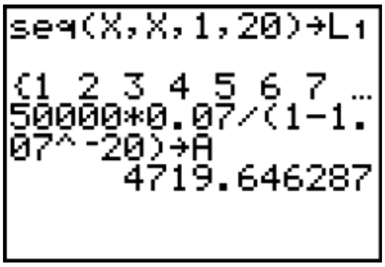
kies je voor `1:Edit`

dan zie je de aangemaakte lijst



We berekenen het termijnbedrag a

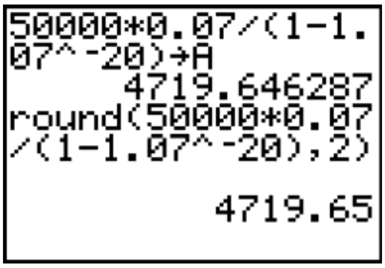
$$a = \frac{V \cdot i}{1-u^{-n}} \quad \begin{cases} V = \text{het ontleende kapitaal} \\ n = \text{het aantal periode} \\ u = 1+i \text{ met i de rentevoet per periode} \end{cases}$$ en slaan dit op als *A*




Wensen we dat de termijn opgeslagen wordt afgerond naar boven op bijvoorbeeld 2

cijfers na de komma dan kan dat als volgt:

- druk
- selecteer NUM
- druk **Á**
- typ nu 5ØØØØ*Ø.Ø7/(1-1.Ø7^-2Ø),2)
-druk **¿** ***f*** A
- druk **Í**




Opmerking:

we kunnen de functie round ook bekomen via

[CATALOG], drukken op R, met **†** bewegen tot bij

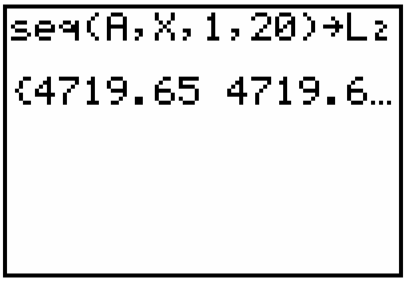
round( en het drukken van **Í**

We maken een tweede lijst aan waar 20 keer hetzelfde constante termijnbedrag instaat

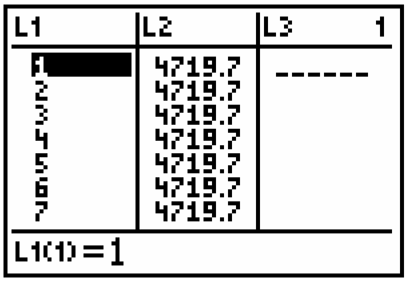
- druk **y Ê** (CATALOG)
- druk S
- met **†** bewegen tot bij seq(
- druk **Í**
- typ nu A, X,1,2Ø)
- druk **¿** $L_2$ ( **y Á**)

het resultaat:

In het basisscherm




In de lijsteneditor ( STAT 1:Edit)




We bereken het eerste kapitaalsbestanddeel $k_1 = a.u^{-n}$ en slaan het op in K

A∗1.Ø7^-2Ø ¿ K

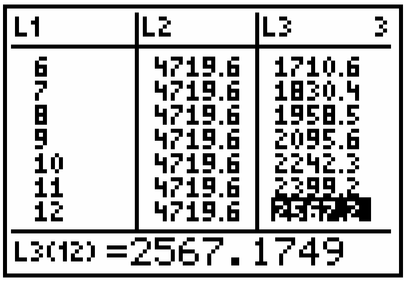
We bouwen een lijst op met de opeenvolgende kapitaalsbestanddelen

seq(K∗1.Ø7^(X-1),X,1,2Ø) ¿ $L_3$

Ook hier kunnen we zorgen voor een precisie op 2 cijfers na de komma door in te tikken:

seq(round(K∗1.Ø7^(X-1),2),X,1,2Ø) ¿ $L_3$

Als we de pijltjestoets gebruiken kunnen we doorheen de rij scrollen. We kunnen uiteraard ook terug gaan kijken naar het resultaat in de lijsteneditor.




De lijst met de rentebestanddelen kunnen we het best aanmaken in de lijsteneditor

Waar we ook staan we scrollen tot heel bovenaan tot we in de rij staan waar de lijstnamen staan. We gaan met de zijwaartse pijltoets naar $L_4$ en drukken op ENTER. Hierdoor komen we onderaan in het scherm terecht waar we voor $L_4$ de volgende formule invullen:

"$L_2 - L_3$" en terug op ENTER drukken.

Let op de aanhalingstekens waar we de formule tussen plaatsen. Die zorgen ervoor dat na het drukken op Í in de lijsthoofding niet de lijst met uitkomsten tussen aanhalingstekens komt, maar de immer aanpasbare formule.

Het resultaat:

| L2 | L3 | L4 4 |
|---|---|---|
| 4719.7 | 1219.7 | 3500 |
| 4719.7 | 1305 | 3414.6 |
| 4719.7 | 1396.4 | 3323.3 |
| 4719.7 | 1494.1 | 3225.5 |
| 4719.7 | 1598.7 | 3120.9 |
| 4719.7 | 1710.6 | 3009 |
| 4719.7 | 1830.4 | 2889.3 |

L4(1)=3500

Om tenslotte de kolom van de schuldsaldi er te krijgen moeten we gebruik maken van een formule voor het schuldsaldo na m aflossingen:

$$V_m = V \cdot \frac{u^n - u^m}{u^n - 1} \qquad \begin{cases} V = \text{het ontleende kapitaal} \\ V_m = \text{het schuldsaldo na m aflossingen} \\ u = 1 + i \quad \text{met i de rentevoet} \end{cases}$$

seq(round(50000*(1.07^20-1.07^X)÷(1.07^20-1),4) ,X,1,20) ¿ $L_5$

| L3 | L4 | L5 5 |
|---|---|---|
| 2939.2 | 1780.5 | 22496 |
| 3144.9 | 1574.7 | 19351 |
| 3365 | 1354.6 | 15986 |
| 3600.6 | 1119.1 | 12386 |
| 3852.6 | 867.01 | 8533.2 |
| 4122.3 | 597.32 | 4410.9 |
| 4410.9 | 308.76 | 0 |

L5(20)=0

Deze manier van werken is vooral nuttig om de verschillende formules in te oefenen.

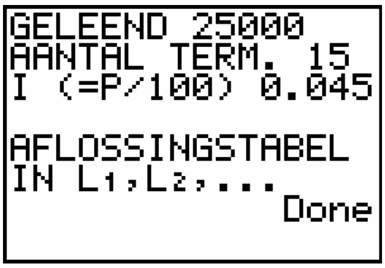
Wil je meer het ontstaan van de kapitaal- en rentebestanddelen uit de uitstaande schuld benadrukken, dan kun je weer de tabel op een andere manier laten ontstaan.

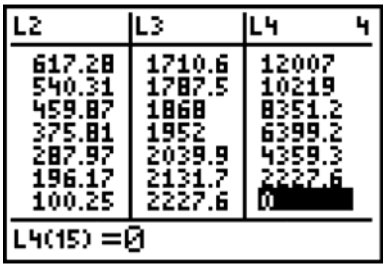
We kunnen ook gebruik maken van de ingebouwde financiële functies van de TI-84 Plus.

Een programma schrijven dat ineens een aflossingstabel genereert, gebruik makende van de formules, is niet eens zo moeilijk. We kunnen het de leerlingen zelfs als taak meegeven bij wijze van inoefenen van de formules. Het gebruik van dergelijk programma stel je wel het best uit tot het moment dat ze al zelf een aantal keer een aflossingstabel hebben opgesteld en/of het moment dat deze vaardigheid getoetst werd.

Hieronder de programmacode van zo'n programma AFLOST

```
ClrHome
ClrLists L1,L2,L3,L4,L5,L6
Input "GELEEND ",L
Input "AANTAL TERM. ",N
Input "I (=P/1ØØ) ",I
round(L*I/(1-(1+I)^⁻N),2)→A
seq(A,X,1,N)→L1
L*I/(1-(1+I)^⁻N)*(1+I)^⁻N→K
seq(round(K*(1+I)^(X-1),2),X,1,N)→L3
L1-L3→L2
seq(L*((1+I)^N-(1+I)^X)/((1+I)^N-1),X,1,N)→L4
round(L4,2)→L4
Disp "AFLOSSINGSTABEL"
Disp "IN L1,L2,... "
```

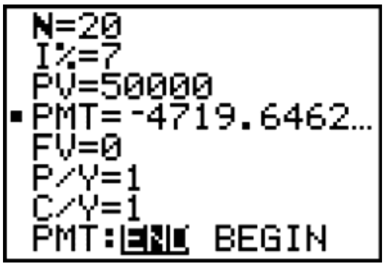


**2)** <u>Gebruik maken van de ingebouwde financiële functies</u>

## HEEL BELANGRIJK: zorg dat in de TVM Solver de annuïteit ingegeven is en het termijnbedrag berekend werd.

Activeer de applicatie `FINANCE` , kies `1: TVM Solver` , vul de gegevens in en laat de termijn berekenen.




- We maken een lijst met volgnummers aan in $L_1$

  `seq(X,X,1,2Ø)` ¿ $L_1$

- **Berekening termijnbedrag in het standaardscherm [ `2:tvm_Pmt` ]**

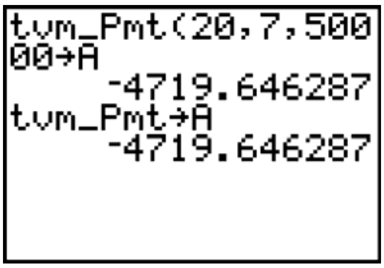
  Start de applicatie FINANCE en ga met † naar `2:tvm_Pmt en druk` Í

  Bij deze functie ziet de volgorde van de in te vullen argumenten er als volgt uit

  **`tvm_Pmt(N,I%,PV,FV,[P/Y,C/Y])`** (de laatste twee hoeven alleen ingevuld te worden als ze afwijken van de standaardwaarden P/Y=1,C/Y=1)

  Hier tikken we `tvm_Pmt(2Ø,7,5ØØØØ)` ¿ A in.

  Als het termijnbedrag in de TVM-Solver berekend werd, volstaat zelfs `tvm_Pmt` ¿ A.



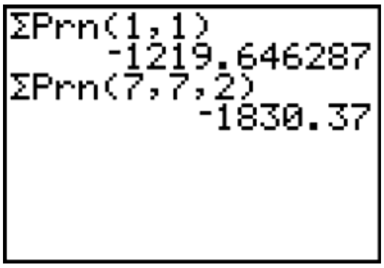

Bemerk dat de uitkomst negatief is. Dit is te verantwoorden door het feit dat het hier om een te betalen bedrag gaat.

We maken een lijst aan waar 20 keer dezelfde constante termijn instaat.
Druk **y** … (dus `[LIST]` , ga naar OPS, en druk · [we kiezen voor 5: `seq(` ] , typ nu `A , X,1,2Ø)` en druk ¿ $L_2$

- **Berekening van de kapitaalsbestanddelen   [ Ø:SPrn(   ]**

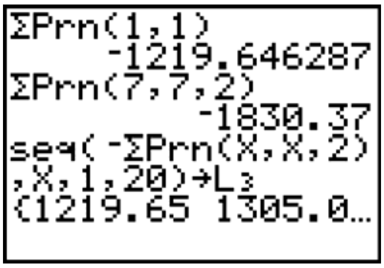
Start FINANCE en ga met de neerwaartse pijltoets naar Ø:**S**Prn(

Bij deze functie ziet de volgorde van de (al dan niet noodzakelijk) in te vullen argumenten er als volgt uit **S**Prn( pmt1,pmt2[roundvalue]). Deze functie berekent het afgeloste kapitaal tussen twee opgegeven termijnbetalingen (pmt). Vullen we hier twee keer hetzelfde in dan berekent deze functie de kapitaalsaflossing van die termijn.



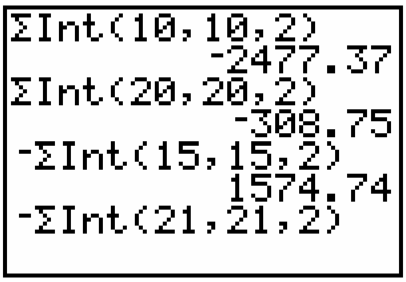

Reken je liever met positieve kapitaalsbestanddelen dan tik je uiteraard - **S**Prn in

Om nu de volledige lijst met kapitaalsbestanddelen in $L_3$ te krijgen, gaan we als volgt te werk: **y** **…** ( dus LIST) , beweeg naar OPS en kies 5:seq , plaats het – teken (niet de bewerking!) , start FINANCE, en kiezen voor Ø:**S**Prn( en drukken op **Í** , nu typen we X,X,2),X,1,2Ø) **¿** $L_3$




- **Berekening van de rentebestanddelen   [ Sint(   ]**

Ofwel kies je hier voor $L_2 - L_3$ **¿** $L_4$ , ofwel maak je ook hier gebruik van de ingebouwde functie **S**int(pmt1,pmt2,[roundvalue]) die de betaalde intresten betaald tussen twee opgegeven termijnbetalingen (pmt) en die dus eveneens het rentebestanddeel van een termijn zal geven als we twee keer hetzelfde invullen

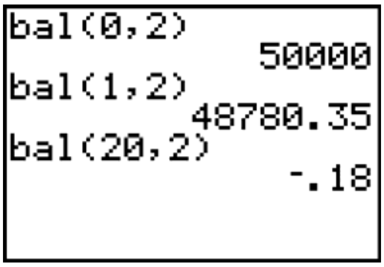



Voor de rij van de rentebestanddelen:

seq(-**S**int(X,X,2),X,1,2Ø) **¿** $L_4$

- **Berekening van de schuldsaldi [ `bal(` ]**

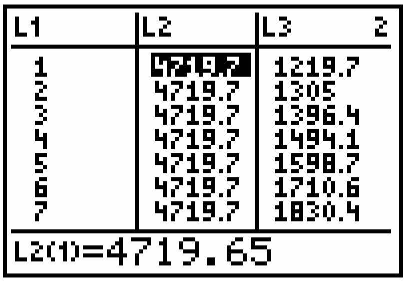
De ingebouwde functie die hiervoor kan gebruikt worden is
`bal(npmt[,roundvalue])`




Voor de rij met schuldsaldi afgerond op 2 cijfers na de komma geven we in:

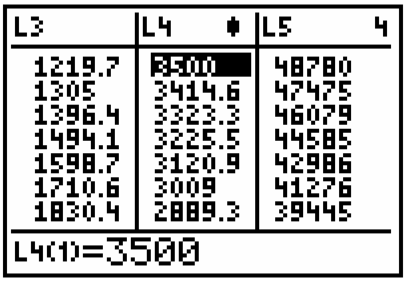
seq(bal(X,2),X,1,20) ¿ $L_5$

Als we nu tenslotte naar de lijsteditor gaan via STAT 1:Edit kunnen we de volledige schuldaflossingtabel overlopen



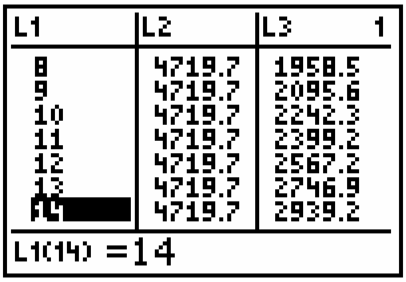
| L1 | L2 | L3 2 |
|---|---|---|
| 1 | 4719.7 | 1219.7 |
| 2 | 4719.7 | 1305 |
| 3 | 4719.7 | 1396.4 |
| 4 | 4719.7 | 1494.1 |
| 5 | 4719.7 | 1598.7 |
| 6 | 4719.7 | 1710.6 |
| 7 | 4719.7 | 1830.4 |

L2(1)=4719.65



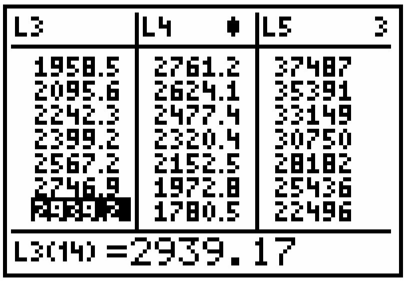
| L3 | L4 | L5 4 |
|---|---|---|
| 1219.7 | 3500 | 48780 |
| 1305 | 3414.6 | 47475 |
| 1396.4 | 3323.3 | 46079 |
| 1494.1 | 3225.5 | 44585 |
| 1598.7 | 3120.9 | 42986 |
| 1710.6 | 3009 | 41276 |
| 1830.4 | 2889.3 | 39445 |

L4(1)=3500



| L1 | L2 | L3 1 |
|---|---|---|
| 8 | 4719.7 | 1958.5 |
| 9 | 4719.7 | 2095.6 |
| 10 | 4719.7 | 2242.3 |
| 11 | 4719.7 | 2399.2 |
| 12 | 4719.7 | 2567.2 |
| 13 | 4719.7 | 2746.9 |
| 14 | 4719.7 | 2939.2 |

L1(14) =14

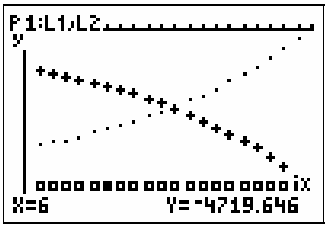


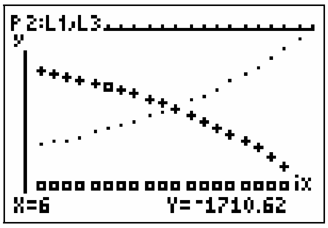
| L3 | L4 | L5 3 |
|---|---|---|
| 1958.5 | 2761.2 | 37487 |
| 2095.6 | 2624.1 | 35391 |
| 2242.3 | 2477.4 | 33149 |
| 2399.2 | 2320.4 | 30750 |
| 2567.2 | 2152.5 | 28182 |
| 2746.9 | 1972.8 | 25436 |
| 2939.2 | 1780.5 | 22496 |

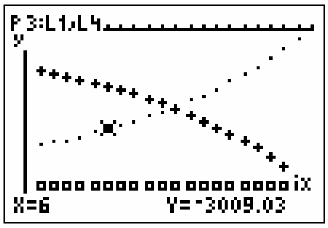
L3(14) =2939.17

Voor een grafische illustratie van de gevonden resultaten zorgen we eerst dat onder Y= niets meer ingegeven staat van functies en dan kiezen we voor **y o** (dus STAT PLOT) . We kiezen daar nu bijvoorbeeld `1:Plot1` en drukken op **Í** , wie kiezen voor `On`, voor het type **"** en zet bij `Xlist:`$L_1$ en bij `Ylist:`$L_2$ , druw op **p** en zet het zo dat $x \in [-1, 21]$ en $y \in [-500, 5000]$. Hiermee hebben we een voorstelling van de constante termijn.

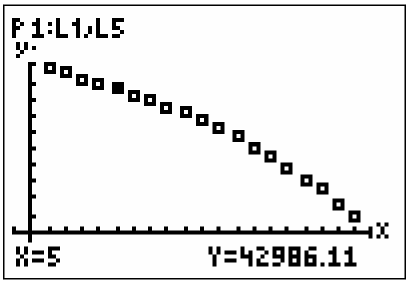
Als we een voorstelling wensen van kapitaalsbestanddelen en rentebestanddelen dan voeren we bij `2:Plot2` `Ylist` voor $L_3$ en bij `3:Plot3` voor $L_4$. Dit geeft onderstaande beelden bij een druk op **r** en door bewegen met de pijltjestoetsen




Wens je de schuldsaldi voorstellen dan kies je eerst andere vensterinstellingen $x \in [-1, 21]$, en $y \in [-5000, 55000]$ zet je de Plots2 en 3 af en geef je bij Ylist de 5[de] lijst in




De programmacode van een programma (AFLOS) dat werkt op basis van deze TI-83-functies:

```
ClrHome
Input "GELEEND ",L
Input "DUUR ",N
Input "PROCENT ",R
ClrLists L1,L2,L3,L4,L5,L6
seq(X,X,1,N)→L1
seq(round(⁻tvm_Pmt(N,R,L,Ø,1,1),2),X,1,N)→L2
seq(round(⁻ΣInt(X,X),2),X,1,N)→L3
seq(round(⁻ΣPrn(X,X),2),X,1,N)→L4
seq(round(bal(X),2),X,1,N)→L5
Disp "TERMIJNBEDRAG",round(L2(1),2)
Disp "AFLOSSINGSTABEL"
Disp "IN L1,L2, ... "
```

**Let op: dit programma werkt maar correct als voorafgaand in de TVM-Solver de annuïteit ingegeven werd en het termijnbedrag berekend.**

## 3) De schuldaflossingstabel in de sequence MODE van het toestel

Druk op MODE en selecteer Seq


Het nadeel van deze **z** is evenwel dat we maar toegang hebben tot 3 tabellen. We laten hier dan ook de lijst met volgnummers en met de constante termijn vallen.

Druk nu op Y= en vul onderstaande zaken in

nMin=1

u(n)= -**S**Prn(n,n,2)

u(nMin)= -**S**Prn(1,1,2)

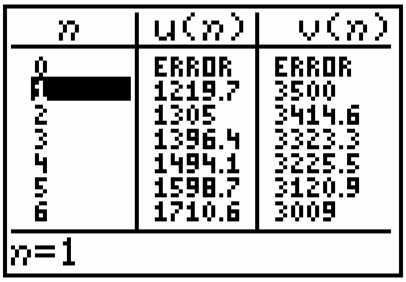
v(n)= -**S**Int(n,n,2)

v(nMin)= -**S**Int(1,1,2)

w(n)=bal(n,2)

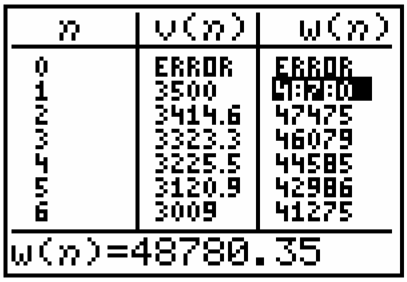
w(nMin)= bal(1,2)

Druk op **y** **p** (= TBL SET) en zet TblStart = 1 en △Tbl = 1, de rest op Auto
Druk nu op **y** **s** (=TABLE)



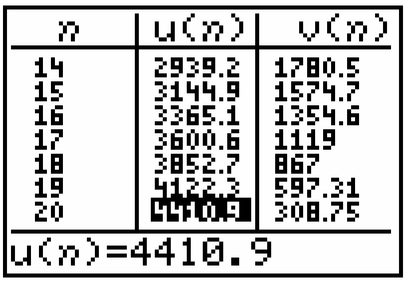
| n | u(n) | v(n) |
|---|---|---|
| 0 | ERROR | ERROR |
| 1 | 1219.7 | 3500 |
| 2 | 1305 | 3414.6 |
| 3 | 1396.4 | 3323.3 |
| 4 | 1494.1 | 3225.5 |
| 5 | 1598.7 | 3120.9 |
| 6 | 1710.6 | 3009 |

n=1



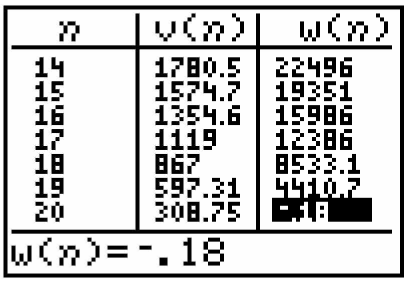
| n | v(n) | w(n) |
|---|---|---|
| 0 | ERROR | ERROR |
| 1 | 3500 | 48780 |
| 2 | 3414.6 | 47475 |
| 3 | 3323.3 | 46079 |
| 4 | 3225.5 | 44585 |
| 5 | 3120.9 | 42986 |
| 6 | 3009 | 41275 |

w(n)=48780.35



| n | u(n) | v(n) |
|---|---|---|
| 14 | 2939.2 | 1780.5 |
| 15 | 3144.9 | 1574.7 |
| 16 | 3365.1 | 1354.6 |
| 17 | 3600.6 | 1119 |
| 18 | 3852.7 | 867 |
| 19 | 4122.3 | 597.31 |
| 20 | 4410.9 | 308.75 |

u(n)=4410.9



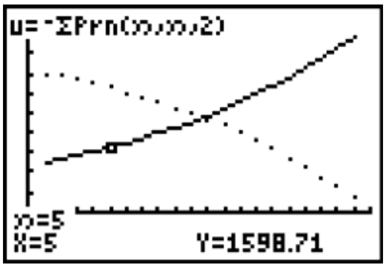
| n | v(n) | w(n) |
|---|---|---|
| 14 | 1780.5 | 22496 |
| 15 | 1574.7 | 19351 |
| 16 | 1354.6 | 15986 |
| 17 | 1119 | 12386 |
| 18 | 867 | 8533.1 |
| 19 | 597.31 | 4410.7 |
| 20 | 308.75 | -.18 |

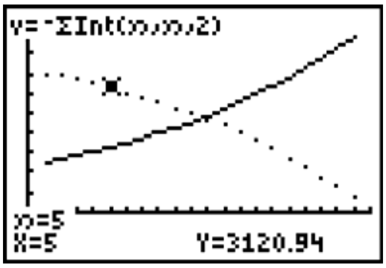
w(n)=-.18

Bemerk dat het bewegen in deze tabel niet zo vlot gaat.

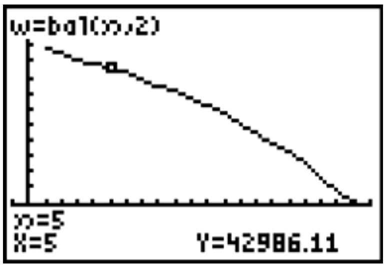
Via **s** kunnen we een grafische voorstelling maken van

1) de rente- en kapitaalbestanddelen



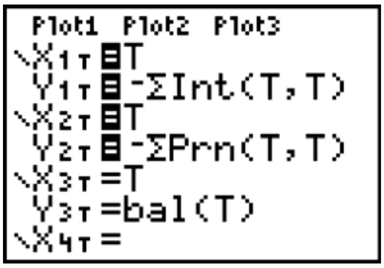



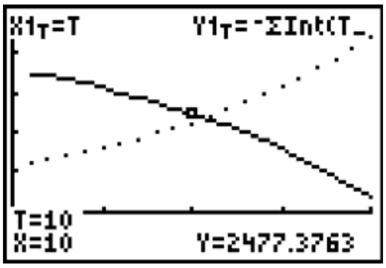

2) de schuldsaldi (grafisch venster aanpassen)

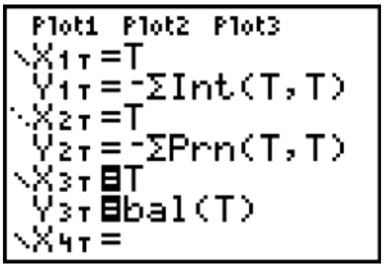


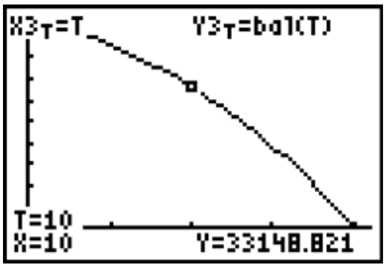

## 4) De schuldaflossing in de parametermode

Een laatste mogelijkheid is werken in de “parameter”-modus. Ook hier moeten we echter eerst de gegevens van de annuïteit ingeven in de TVM-Solver.

# V) Voorbeelden op schuldaflossing met de TI-84 Plus

Eenmaal de leerlingen aangetoond hebben zelf een aflossingstabel te kunnen opstellen zonder ICT-middelen kunnen we bijvoorbeeld het grafische rekentoestel aanwenden om toepassingen als leningen met variabele rentevoet en het samenbrengen van een nog lopende lening en een nieuwe lening te behandelen.

Voorbeeld 1

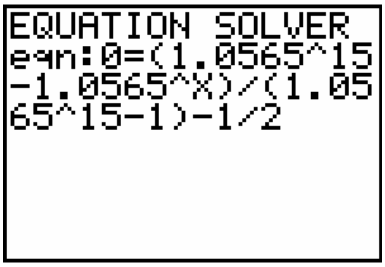
*Janie en Jan hebben een lening lopen van 65 000 euro over 15 jaar. Ze betalen de lening maandelijks af. De door de bank gehanteerde rentevoet bedraagt 5,65%.*
*Hoeveel stortingen moeten ze doen vooraleer de schuld minstens gehalveerd is.*

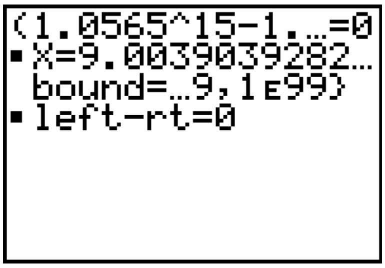
1ste oplossingmethode

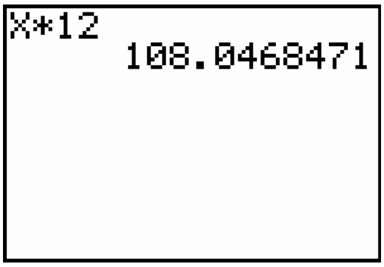
Gebruiken we de formule voor het schuldsaldo dan bekomen we de vergelijking

$$32\ 500 = 65\ 000 \cdot \frac{1{,}0565^{15} - 1{,}0565^{m}}{1{,}0565^{15} - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1{,}0565^{15} - 1{,}0565^{m}}{1{,}0565^{15} - 1}.$$

Het oplossen van deze vergelijking kan voor vele leerlingen een struikelblok zijn.
Herschrijven we de vergelijking op nul en geven we die in in de Solver dan is de oplossing een kwestie van seconden.







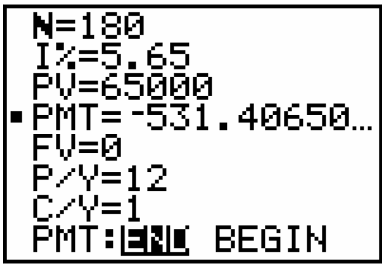

Vermits we hier werken met de jaarlijkse rentevoet is het aantal maandelijkse stortingen nodig om minstens de schuld gehalveerd te hebben 109 maanden.

Wie denkt, na ingave van de annuïteit in de TVM-Solver, het probleem op te lossen in de Solver door het ingeven van de vergelijking `Ø = bal(X)-32 5ØØ`, zal van een kale reis terugkomen.
De reden hiervoor is het feit dat de bal-functie werkt voor gehele waarden van het argument.

Tweede oplossingmethode

Willen we de oplossing een extra dimensie geven, of het probleem op een tweede manier oplossen, dan kunnen we als volgt te werk gaan:

- breng, indien nog niet gedaan, de annuïteit in in de TVM-Solver

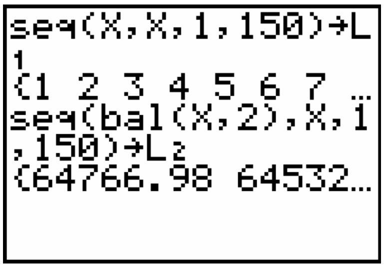



- genereer een rij met volgnummers van 1 tot 150 en sla ze op in $L_1$

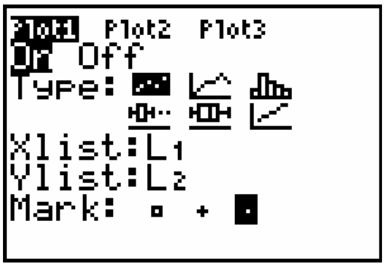
  seq(X,X,1,150) ¿ [L1]

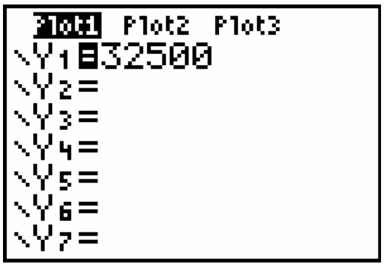
- genereer de rij met schuldsaldi en sla ze op in $L_2$

  seq(bal(X),X,1,150) ¿ [L2]

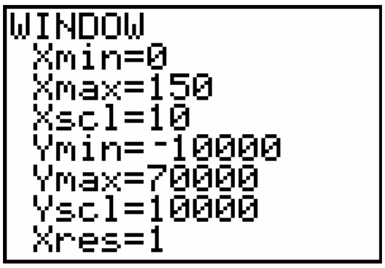



- definieer een statistische plot, type puntenwolk, voor $L_1$,$L_2$ en de functie Y = 32500

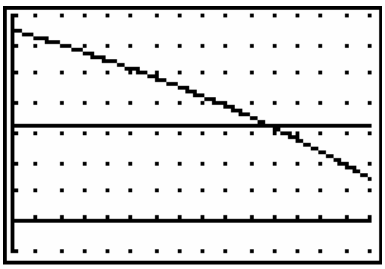



- kies en gepast grafisch venster




- laat alles tekenen en schat waar de twee grafische voorstellingen elkaar snijden



- vertrekkende van de schatting 105 (het snijpunt ligt tussen 10 en 11 keren de Xscl van 10 maanden) kunnen we vlug achterhalen welke bal(X) kleiner dan 32500 wordt.

```
bal(105)
      33653.80392
bal(108)
       32517.8626
bal(109)
      32135.73372
```

<u>Voorbeeld 2</u>

*Janie en Jan hebben 10 jaar geleden een lening aangegaan van 65 000 euro over 15 jaar. Ze betalen de lening maandelijks af. De variabele rentevoet (in een systeem van 5-5-5) bedroeg 5,65%. Thans daalt de rentevoet tot 4,58%.*

*Bepaal de hoeveel ze maandelijks moesten betalen bij aanvang van de lening en hoeveel maandelijks in de resterende periode.*

- We geven de annuïteit in in de TVM-Solver en laten het termijnbedrag berekenen

```
 N=180
 I%=5.65
 PV=65000
 PMT=-531.40650…
 FV=0
 P/Y=12
 C/Y=1
 PMT:END BEGIN
```

*Janie en Jan betaalden 531,41 per maand*

- We laten het schuldsaldo bereken na 10 jaar. Wetende dat dit schuldsaldo in feite de nieuwe beginschuld is voor de resterende periode laten we die berekenen bij PV

```
 N=180
 I%=5.65
 PV=bal(120)
 PMT=-531.40650…
 FV=0
 P/Y=12
 C/Y=1
 PMT:END BEGIN
```

wordt na í

```
 N=180
 I%=5.65
 PV=27814.74788
 PMT=-531.40650…
 FV=0
 P/Y=12
 C/Y=1
 PMT:END BEGIN
```

- We passen tenslotte N, I% aan en laten de nieuwe termijn (PMT) berekenen

```
 N=60
 I%=4.58
 PV=27814.74788
▪PMT=-518.38117…
 FV=0
 P/Y=12
 C/Y=1
 PMT:END BEGIN
```

*Janie en Jan betalen 518,38 per maand*

## Voorbeeld 3

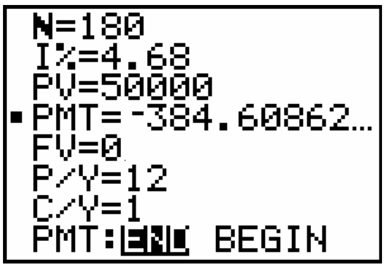
*Een echtpaar moet van een lening van 95 000 euro die 20 jaar geleden aangegaan werd nog gedurende 5 jaar en 3 maanden maandelijkse afbetalingen doen van 778,19 euro als ze voor dringende verbouwingen genoodzaakt zijn een nieuwe lening over 15 jaar aan te gaan van 50 000 euro. Deze laatste betalen ze eveneens terug te betalen met maandelijkse termijnbedragen. De huidige jaarlijkse rentevoet die de bank hen zal aanrekenen, bedraagt 4,68%.*

*Omwille van het feit dat de rentevoeten nog nooit zo laag geweest zijn overwegen ze een samenbrengen van het schuldsaldo van de oude lening met het bedrag nodig voor de verbouwing en de opzeggingsvergoeding tot één lening. Als ze dit doen moeten ze de bank voor het vervroegd stopzetten van de oude lening vijf termijnbedragen van de oude lening opzeggingsvergoeding betalen.*

*Weegt deze te betalen vergoeding op tegen de historisch lage rentevoet waarvan ze nu kunnen profiteren?*

Als ze overwegen de oude lening verder te betalen en daarnaast een nieuwe lening aangaan.

- Voor de oude lening moeten ze nog 63 keer 778,19 euro betalen.
  Dus 49 025,97 euro.
- Met de TVM-Solver bepalen we vlot wat ze maandelijks voor de nieuwe lening moeten betalen.




Voor het afbetalen van de oude lening betalen ze dus 180 keer 384,61 euro, dus 69 229,80 euro.

Alles samen zullen ze nadat beide lening afbetaald zijn 118 255,70 euro betaald hebben.

Als ze overwegen de twee leningen samen te voegen.

- Het schuldsaldo van de oude lening kunnen we met de bal-functie bepalen nadat de oude annuïteit ingevoerd werd en we van deze de rentevoet bepaald hebben.
  De rentevoet:

```
 N=240
▪I%=7.999950299
 PV=95000
 PMT=-778.19
 FV=0
 P/Y=12
 C/Y=1
 PMT:END BEGIN
```

We bepalen het schuldsaldo van de oude lening als bal(177). We doen dit naast PV zodat in een volgende stap daar eenvoudig het bedrag van de nieuwe lening en de opzeggingsvergoeding kunnen gaan bij optellen.

```
N=240
I%=7.999950299
PV=bal(177)
PMT=-778.19
FV=0
P/Y=12
C/Y=1
PMT:END BEGIN
```

wordt na een druk op Í

```
N=240
I%=7.999950299
PV=40201.85401
PMT=-778.19
FV=0
P/Y=12
C/Y=1
PMT:END BEGIN
```

We gaan nu naar PV en tikken daar achter het bedrag: + 50000 + 3*778.19
Na een druk op Í kennen we het bedrag van de overkoepelende lening

```
N=240
I%=7.999950299
PV=92536.42401
PMT=-778.19
FV=0
P/Y=12
C/Y=1
PMT:END BEGIN
```

We vullen nu de rest van de gegevens van de nieuwe lening aan en laten het termijnbedrag berekenen.

```
 N=180
 I%=4.68
 PV=92536.42401
▪PMT=-711.806132
 FV=0
 P/Y=12
 C/Y=1
 PMT:END BEGIN
```

- Vermits dit bedrag gedurende 15 jaar maandelijks betaald wordt zullen ze 128 125,80 euro betaald hebben.

Dus ondanks de lage rentevoet doet het echtpaar geen voordeel met het samenvoegen van de leningen

## Oefeningen:

a) Joke en Joris hebben 10 jaar geleden een hypothecaire lening van 125000 euro afgesloten met constante maandelijkse termeindbedragen en een looptijd van 25 jaar. De variabele rentevoet (in een systeem van 5-5-5) bedroeg 6,15%.

   (i) Bereken het maandelijkse termijnbedrag.

   (ii) Hoeveel intrest en hoeveel kapitaalsaflossing betaalden ze bij de $100^{ste}$ afbetaling?

   (iii) Onlangs kregen ze bericht dat de rentevoet zakte tot 4,85%. Bereken het nieuwe termijnbedrag.

b) De familie Claisters betaalt een hypothecaire lening af bij een bank van 85500 euro. De looptijd is 25 jaar en de rentevoet 7,35%. Momenteel hebben ze al 17 jaar en 7 maanden afbetaald. Wegens verbouwingswerken hebben zij 75000 euro nodig. Hiervoor zouden zij een nieuwe lening aangaan over 15 jaar aan 4,85% die niet alleen het nu benodigde bedrag voor de verbouwing omvat, maar ook het schuldsaldo van de nog lopende lening. De bank rekent voor deze operatie een herbeleggingvergoeding aan van vier maanden tegen het oorspronkelijke rentetarief.

   (i) Wat is het uiteindelijke bedrag van de nieuwe lening?

   (ii) Wat is het **maandelijkse termijnbedrag** dat ze voor het afbetalen van deze nieuwe lening zouden moeten betalen?

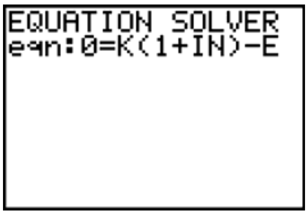
# Oplossingen van de oefeningen

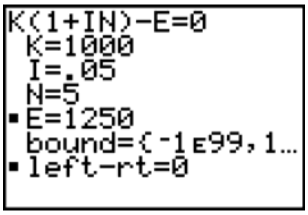
## I Gebruik van de Solver

2 JKP's

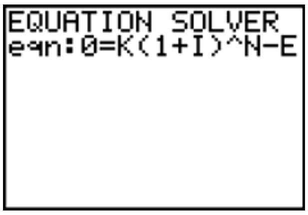
| | |
|---|---|
| 15,9854% | 14,2129% |
| 18,0095% | 18,2508% |
| 19,9991% | 8,0156% |

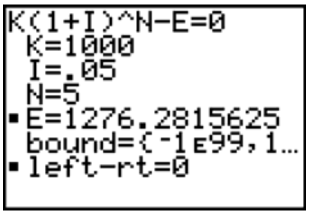
3 $K = k \cdot (1 + i \cdot n)$ stellen we K voor met E, …



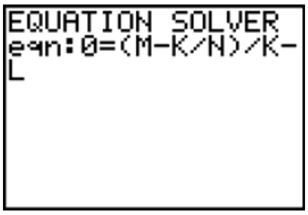



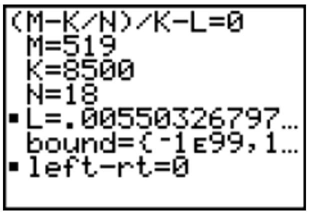

$k_n = k \cdot (1+i)^n$ : stellen we $k_n$ voor door E




$L = \dfrac{M - \frac{K}{n}}{K}$ :

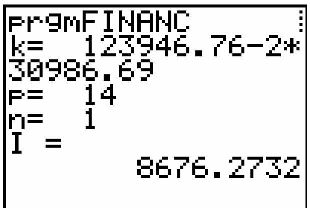



## II Programma's voor intrestrekenen

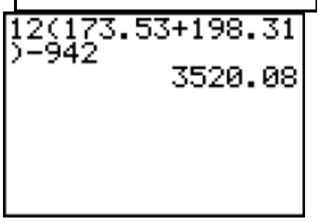
2 i) Enkelvoudige intrest

Oef 1
Gelukmans

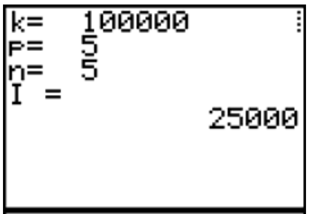

netto:
8676,2732 x 0,85
=7374,8322

bij verhuren

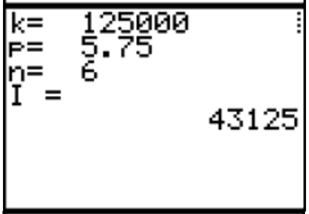



dus een goede belegging

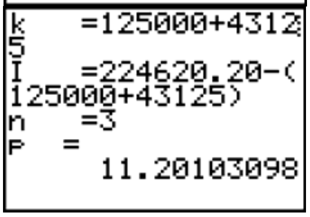
Oef 2


kapitaal na 5 jaar is dan 125000

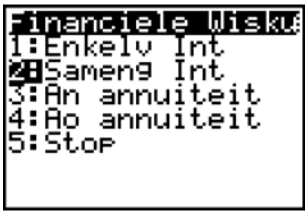





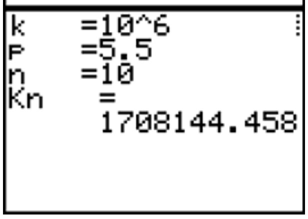



tijdens de laatste periode werd belegd aan 11,2010%

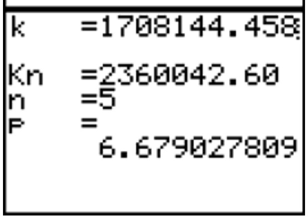
2 ii) Samengestelde intrest



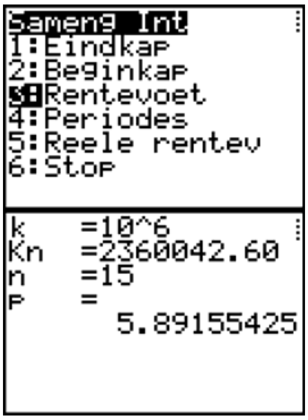

Oef 1 a)



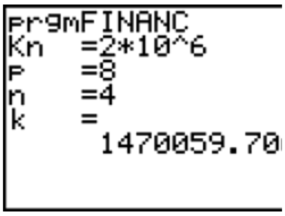


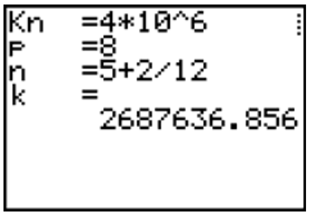
b)

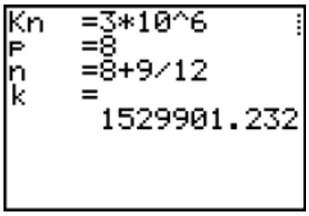



oef 2

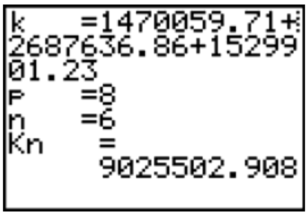
Beginwaarde schulden:

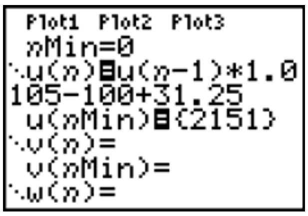



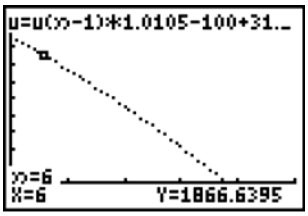

Eindwaarde gezamenlijke schuld binnen 6 jaar

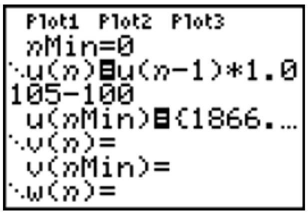

## III In het rood gaan kan je duur te staan komen

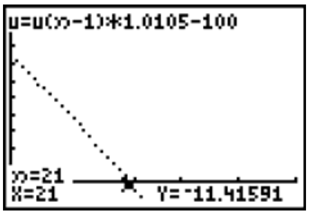
Oef1




Na 6 maanden is de schuld kleiner dan 1875.

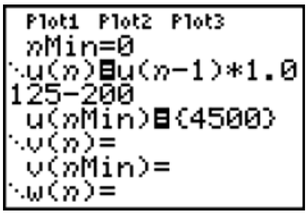


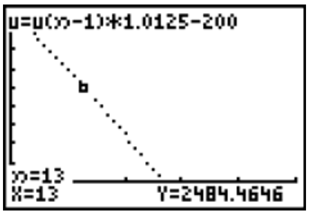


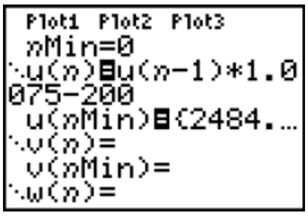

Na nog eens 21 maanden is de schuld onder nul.

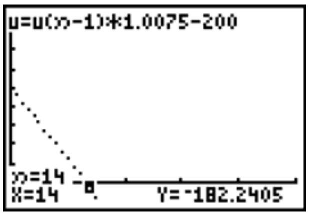
In het totaal waren 27 maanden nodig om de schuld af te betalen

Oef2





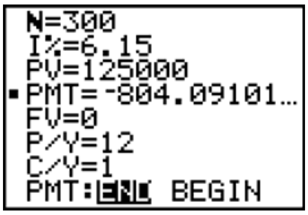




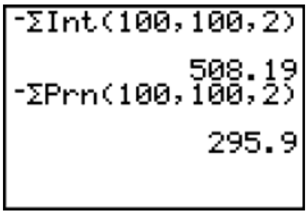

In het totaal waren 27 maanden nodig om de schuld af te betalen

## VI Aflossing met de TI-84 Plus

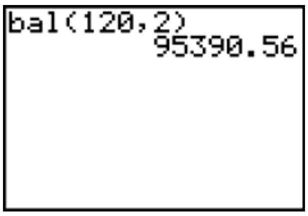
a) (i)

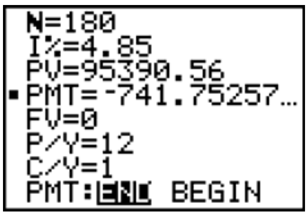



(ii)




(iii)





b) (i) Ingave van de annuïteit

```
 N=300
 I%=7.35
 PV=85500
▪PMT=-610.49730…
 FV=0
 P/Y=12
 C/Y=1
 PMT:END BEGIN
```

Berekening van het schuldsaldo, de gelijkwaardige maandelijkse rentevoet en de herbeleggingsvergoeding

```
bal(17*12+7,2)
          42125.81
1.0735^12⁻¹-1→I
      .0059278622
42125.81*I*4
        998.863983
```

Het totale bedrag van de nieuwe lening $42125{,}81+998{,}86+75000=118124{,}67$

```
 N=180
 I%=4.85
 PV=118124.67
▪PMT=-918.53196…
 FV=0
 P/Y=12
 C/Y=1
 PMT:END BEGIN
```

## Bijlage

PROGRAMMA FINANC OM ZELF IN TE TIKKEN OF NAAR EIGEN IDEEËN AAN TE PASSEN:

```
Lbl 0
Menu("Financiele Wiskunde","Enkelv Int",1,"Sameng Int",2,"An annuiteit",3,"Ao
annuiteit",4,"Stop",5)
Lbl 1
Menu("Enkelv Int","Intrest",A,"Kapitaal",B,"Rentevoet",C,"Periodes",D,"Stop",0)
Lbl 2
Menu("Sameng Int","Eindkap",G,"Beginkap",H,"Rentevoet",I,"Periodes",J,"Reele
rentev",K,"Stop",0)
Lbl 3
Menu("Eindw. Annuiteit","Eindwaarde",N,"Per.
Storting",O,"Periodes",P,"Rentevoet",Q,"Stop",0)
Lbl 4
Menu("Beginw. Annuiteit","Beginwaarde",T,"Per.
Storting",U,"Periodes",V,"Rentevoet",W,"Stop",0)
Lbl 5
Stop
Lbl A
Input "k=  ",P
Input "i=  ",A
A/100→R
Input "n=  ",T
rondAf(P*R*T,4) →I
Toon "I ="
Pauze I
Goto 1
Lbl B
Input "I   =",I
Input "i   =",A
A/100→R
Input "n   =",T
rondAf(I/(R*T),4) →P
Toon "k   ="
Pauze P
Goto 1
Lbl C
Input "k   =",P
Input "I   =",I
Input "n   =",T
I/(P*T)*100→R
Toon "i  ="
Pauze R
Goto 1
Lbl D
```

```
Input "k    =",P
Input "I    =",I
Input "i    =",A
A/100→R
rondAf(I/(P*R),4) →T
Toon "n    ="
Pauze T
Goto 1
Lbl G
Input "k    =",P
Input "i    =",B
B/100→I
Input "n    =",N
rondAf(P*(1+I)^N,4) →A
Toon "Kn    ="
Pauze A
Goto 2
Lbl H
Input "Kn   =",A
Input "i    =",B
B/100→I
Input "n    =",N
rondAf(A/(1+I)^N,4) →P
Toon "k    ="
Pauze P
Goto 2
Lbl I
Input "k    =",P
Input "Kn   =",A
Input "n    =",N
(N ˣ√ (A/P)-1)*100→I
Toon "i    ="
Pauze I
Goto 2
Lbl J
Input "k    =",P
Input "Kn   =",A
Input "i    =",B
B/100→I
rondAf(ln(A/P)/ln(1+I),4) →N
Toon "n     ="
Pauze N
Goto 2
Lbl K
Input "i / periode=",I
Input "Periodes/jaar=",M
((1+I/100)^M-1)*100→R
```

```
Toon "Reele rentevoet="
Pauze R
Goto 2
Lbl N
Input "a    =",A
Input "i    =",B
B/100→I
Input "n    =",N
rondAf(A*((1+I)^N-1)/I,4) →F
Toon "An  ="
Pauze F
Goto 3
Lbl O
Input "An  =",F
Input "i    =",B
B/100→I
Input "n    =",N
rondAf(F*I/((1+I)^N-1),4) →A
Toon "a    ="
Pauze A
Goto 3
Lbl P
Input "a    =",A
Input "An  =",F
Input "i    =",B
B/100→I
rondAf(ln(1+F*I/A)/ln(1+I),4) → N
Toon "n    ="
Pauze N
Goto 3
Lbl Q
Input "a    =",A
Input "An  =",F
Input "n    =",N
losOp(((1+I)^N-1)/I-F/A,I, N ˣ√  (F/A)-1)*100→I
Toon "i    ="
Pauze I
Goto 3
Lbl T
Input "a    =",A
Input "i    =",B
B/100→I
Input "n    =",N
rondAf(A*(1-(1+I)^-N)/I,4) →P
Toon "Ao="
Pauze P
Goto 4
```

```
Lbl U
Input "Ao=",P
Input "i    =",B
B/100→I
Input "n    =",N
rondAf(P*I/(1-(1+I)^-N),4) →A
Toon "a    ="
Pauze A
Goto 4
Lbl V
Input "Ao=",P
Input "a    =",A
Input "i    =",B
B/100→I
rondAf(-ln(1-P*I/A)/ln(1+I),4) →N
Toon "n    ="
Pauze N
Goto 4
Lbl W
Input "Ao=",P
Input "a    =",A
Input "n    =",N
losOp((1-(1+I)^(-N))/I-P/A,I,A*N/P-1)*100→I
Toon "i    ="
Pauze I
Goto 4
```

Deze cahier wil leerkrachten een aantal mogelijkheden aanreiken om met behulp van een grafische rekenmachine, zoals de TI-83 Plus, iets verder te gaan dan het oplossen van standaardoefeningen op intrestberekening.

Daarbij wordt niet alleen stilgestaan bij de Solver en de Finance-applicatie. Er worden ook een aantal programma's aangereikt die de leerlingen, eenmaal getest op hun formulekennis, toelaten oefeningen te maak waar net dat iets meer inzicht voor nodig is en die daarom ook iets dichter bij de realiteit staan.

In "*In het rood gaan, kan je duur te staan komen*" wordt zelfs het gebied van de rijen betreden.

Een groot deel van het cahier is ook gewijd aan de verschillende mogelijkheden die de grafische rekenmachine biedt om schuldaflossingtabellen te maken. De leerkracht kan hier beslissen of hij van zijn leerlingen verlangd dat ze zelf de formules invoeren of als hij ze gebruik laat maken van ingebouwde financiële functies. Of laat je uw leerlingen zelf een programma schrijven dat een aflossingstabel genereert. Hoe dan ook leerlingen die reeds weten hoe een aflossingstabel opgesteld wordt, kunnen via deze automatisering overstappen tot complexere oefeningen zoals het samenvoegen van een lopende lening met een nieuwe lening.

ETIENNE GOEMAERE is leerkracht aan het Heilig Harthandelsinstituut van Waregem, medewerker van T³ Vlaanderen en lid van stuurgroep Wiskunde West-Vlaanderen.