

Thema: Technologienutzung bei Prüfungsaufgaben und Übungsaufgaben zur österreichischen Matura

Aufgabe: Einkommensverteilung, <https://aufgabenpool.srdp.at>, Bsp. 2_031

Gertrud Aumayr

☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte:

(Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme, Summation und Integral, Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften, Potenzfunktion, Polynomfunktion, Exponentialfunktion, Beschreibende Statistik

Didaktischer Kommentar:

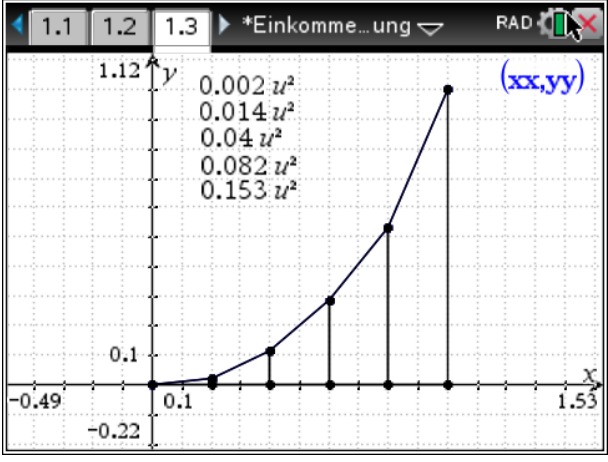
Ab dem Haupttermin 2018 werden Minimalanforderungen für elektronische Hilfsmittel festgelegt (Siehe § 18 Abs. 3 der Prüfungsordnung). Das bedeutet, dass der Einsatz von Technologie inklusive CAS derzeit einmal von Vorteil ist und langfristig unverzichtbar werden wird.

In den folgenden Aufgaben aus bisherigen Reifeprüfungen und aus dem Aufgabenpool des Ministeriums sollen die Möglichkeiten und Vorteile der Nutzung von TI Nspire CAS gezeigt werden.

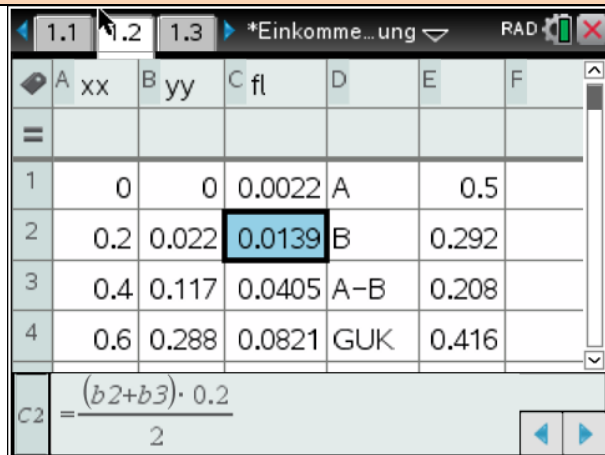
Die vorliegende Ausarbeitung soll verschiedene mögliche Lösungswege aufzeigen. Ob und welchen Weg die Schüler und Schülerinnen wählen werden, wird davon abhängig sein, wie Technologie im Unterricht eingesetzt wurde.

Aufgabenstellungen:

- a) Zeichnen Sie die Lorenz-Kurve für die Einkommensverteilung der Bruttoeinkünfte in Österreich im Jahr 2006 in der nachstehenden Grafik als Streckenzug ein!
Berechnen Sie mithilfe des eingezeichneten Streckenzuges den GUK für die Bruttoeinkünfte in Österreich für das Jahr 2006!

Ausarbeitung a	Kommentar
	<ul style="list-style-type: none"> • Einzeichnen der Graphik • Polygone einzeichnen • Flächeninhalt der Polygone berechnen lassen • Addieren der Werte ergibt: 0,291 • 0,5 minus 0,291 berechnen • GUK ausrechnen

Alternativ:

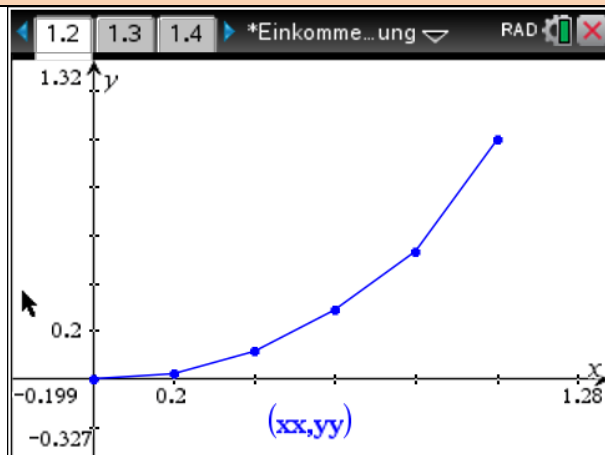


	A	xx	B	yy	C	fl	D	E	F
1		0	0	0.0022	A			0.5	
2		0.2	0.022	0.0139	B			0.292	
3		0.4	0.117	0.0405	A-B			0.208	
4		0.6	0.288	0.0821	GUK			0.416	

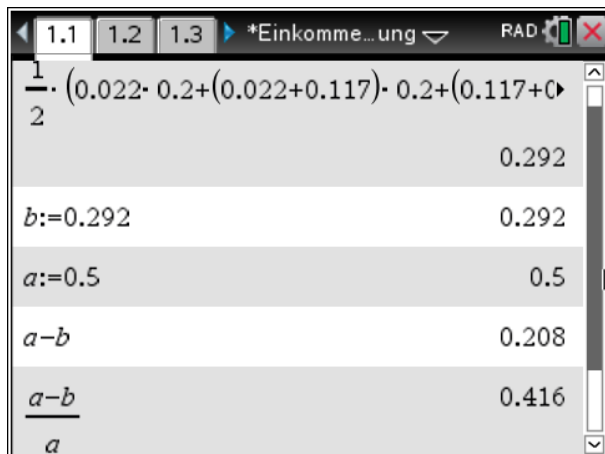
Below the table, the formula for C2 is shown:
$$C2 = \frac{(b2+b3) \cdot 0.2}{2}$$

- Eingabe der Werte in die Tabellenkalkulation
- Berechnen der Flächeninhalte
- A, B, A-B, GUK berechnen lassen

Alternativ:



- Graphische Darstellung und anschließende Berechnung der Trapezflächen und von A, B und GUK im Calculator

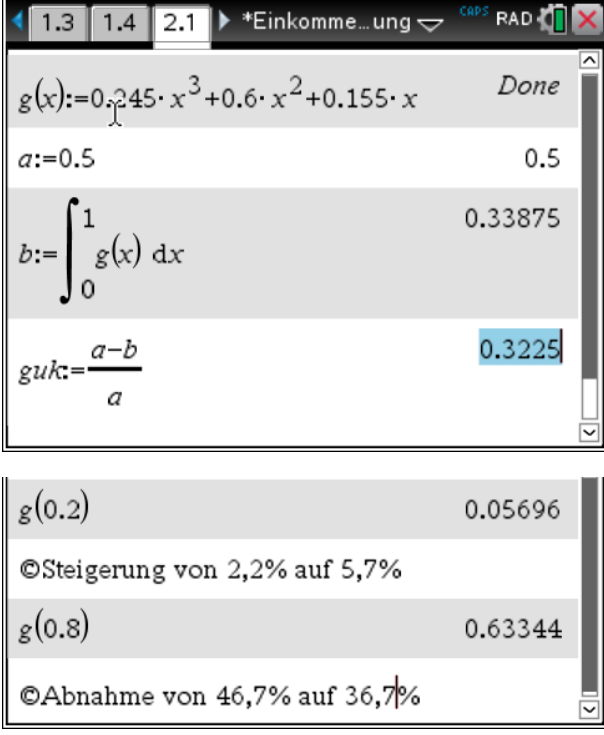
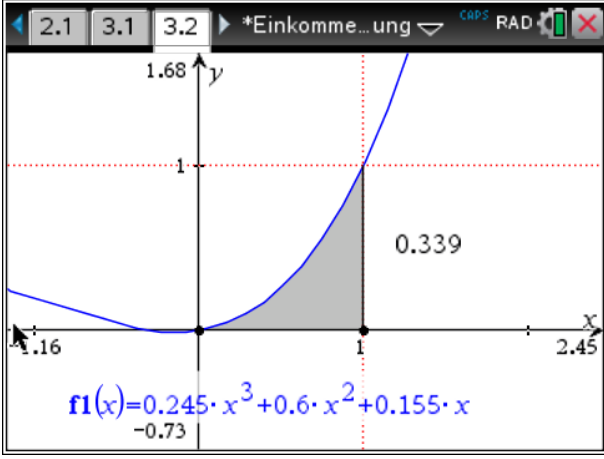


$\frac{1}{2} \cdot (0.022 \cdot 0.2 + (0.022 + 0.117) \cdot 0.2 + (0.117 + 0.288) \cdot 0.2)$	0.292
b:=0.292	0.292
a:=0.5	0.5
a-b	0.208
$\frac{a-b}{a}$	0.416

- c) Um politische Maßnahmen abschätzen zu können, werden verschiedene Szenarien entworfen. So soll beispielsweise für die Bruttoeinkommen langfristig eine Lorenz-Kurve angestrebt werden, die durch die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 0,245 \cdot x^3 + 0,6 \cdot x^2 + 0,155 \cdot x$ beschrieben werden kann.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der der GUK für die angestrebte Einkommensverteilung berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen GUK!

Geben Sie mithilfe konkreter Zahlenwerte an, wie sich in diesem Fall die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den niedrigsten Bruttoeinkommen“ und die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den höchsten Bruttoeinkommen“ im Vergleich zu den Bruttoeinkommen im Jahr 2006 in Österreich ändern würden!

Ausarbeitung c	Kommentar
 <p> $g(x) := 0,245 \cdot x^3 + 0,6 \cdot x^2 + 0,155 \cdot x$ $a := 0.5$ $b := \int_0^1 g(x) dx$ $guk := \frac{a-b}{a}$ $g(0.2)$ ©Steigerung von 2,2% auf 5,7% $g(0.8)$ ©Abnahme von 46,7% auf 36,7% </p>	<ul style="list-style-type: none"> Rechnung im Calculator
Alternativ:	
 <p> $f1(x) = 0,245 \cdot x^3 + 0,6 \cdot x^2 + 0,155 \cdot x$ </p>	<ul style="list-style-type: none"> Flächeninhalt im Graphikfenster ablesen und dann im Calculator berechnen.

$a:=0.5$	0.5	
$b:=0.339$	0.339	
$guk:=\frac{a-b}{a}$	0.322	

- Hier stellt sich die Frage, ob die Gleichung $guk = (a - b)/a$, wobei b aus der Graphik abgelesen wird, als Lösung ausreicht.

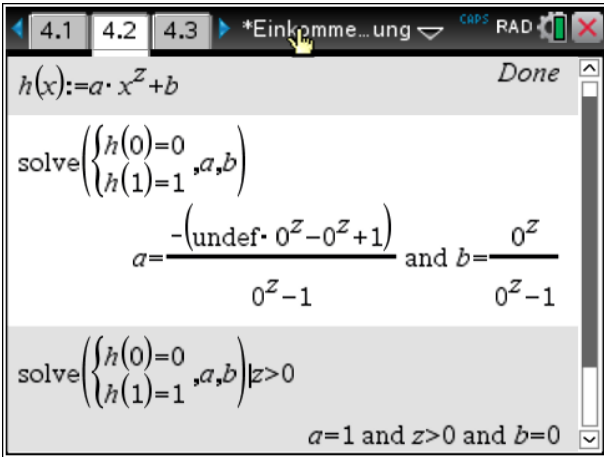
- d) Für das Jahr 2007 kann die Einkommensverteilung für Österreich mit einem GUK von 0,26 beschrieben werden.

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_L%C3%A4nder_nach_Einkommensverteilung [04.05.2017].

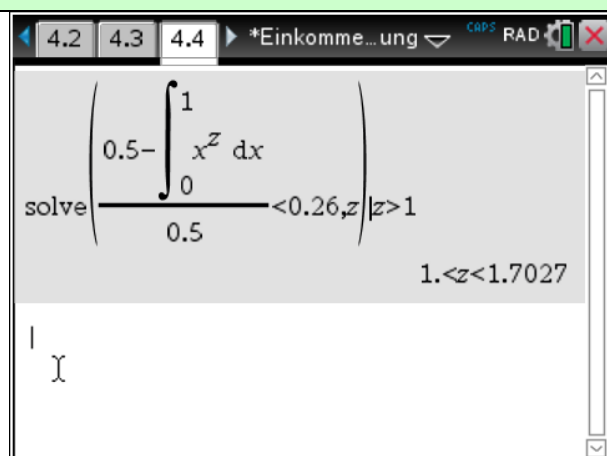
Angenommen, die Lorenz-Kurve für die Einkommensverteilung kann für ein bestimmtes Land, das eine ausgeglichene Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, durch eine Potenzfunktion h mit $h(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b, z \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Geben Sie an, welche Werte die Parameter a und b haben müssen, und begründen Sie Ihre Wahl!

Geben Sie eine Ungleichung an, die für das Jahr 2007 einen Zusammenhang zwischen dem GUK von Österreich und dem GUK von demjenigen Land, das eine ausgeglichene Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, beschreibt! Ermitteln Sie für diesen Fall einen möglichen Wert für den Exponenten z mit $z > 1$!

<p>$b = 0$, da der Graph durch den Punkt $(0 0)$ verlaufen muss</p> <p>$a = 1$, da der Graph durch den Punkt $(1 1)$ verlaufen muss</p>	<ul style="list-style-type: none"> Dafür ist keine Technologie erforderlich.
Mögliche Schülerlösung:	
	<ul style="list-style-type: none"> Eventuell auftretendes Problem: SchülerInnen versuchen die Aufgabe mit Technologie zu lösen Es muss allerdings für z eine Einschränkung gemacht werden, damit man eine sinnvolle Lösung bekommt. Das Erkennen, dass hier eine sinnvolle Definitionsmenge im Vorfeld überlegt werden muss, könnte für einige schwierig sein.

Fortsetzung Ausarbeitung

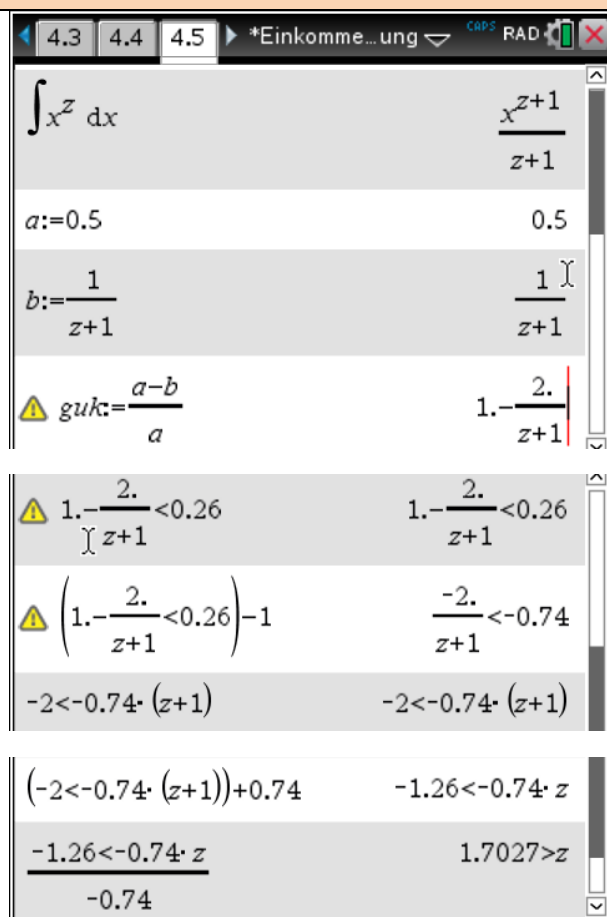


$$\text{solve}\left(\frac{0.5 - \int_0^1 x^z dx}{0.5} < 0.26, z \mid z > 1\right)$$

$$1. < z < 1.7027$$

- Auch in diesem Fall erhält man nur dann eine sinnvolle Lösung bei Einschränkung des Definitionsbereiches von z .

Alternativ:



$$\int x^z dx = \frac{x^{z+1}}{z+1}$$

$$a := 0.5$$

$$b := \frac{1}{z+1}$$

$$\text{guk:} = \frac{a-b}{a} \quad 1. - \frac{2.}{z+1}$$

$$1. - \frac{2.}{z+1} < 0.26 \quad 1. - \frac{2.}{z+1} < 0.26$$

$$\left(1. - \frac{2.}{z+1} < 0.26\right) - 1 \quad \frac{-2.}{z+1} < -0.74$$

$$-2 < -0.74 \cdot (z+1) \quad -2 < -0.74 \cdot (z+1)$$

$$\frac{(-2 < -0.74 \cdot (z+1)) + 0.74}{-0.74} \quad \frac{-1.26 < -0.74 \cdot z}{-0.74} \quad 1.7027 > z$$

- Zum Teil mit Technologie – zum Teil ohne Technologie möglich