

Thema: Technologienutzung bei Prüfungsaufgaben und Übungsaufgaben zur österreichischen Matura

Aufgabe: Laufband, <https://aufgabenpool.srdp.at>, Bsp. 2_029

Gertrud Aumayr

☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte:

(Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme, Änderungsmaße, Ableitungsfunktion / Stammfunktion, Lineare Funktion, Beschreibende Statistik, Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften

Didaktischer Kommentar:

Ab dem Haupttermin 2018 werden Minimalanforderungen für elektronische Hilfsmittel festgelegt (Siehe § 18 Abs. 3 der Prüfungsordnung). Das bedeutet, dass der Einsatz von Technologie inklusive CAS derzeit einmal von Vorteil ist und langfristig unverzichtbar werden wird.

In den folgenden Aufgaben aus bisherigen Reifeprüfungen und aus dem Aufgabenpool des Ministeriums sollen die Möglichkeiten und Vorteile der Nutzung von TI Nspire CAS gezeigt werden.

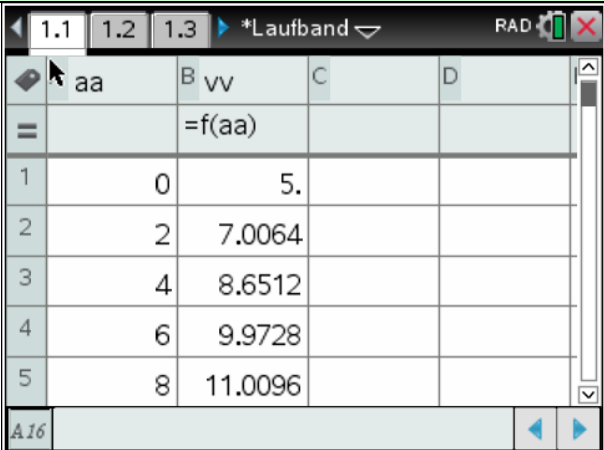
Die vorliegende Ausarbeitung soll verschiedene mögliche Lösungswege aufzeigen. Ob und welchen Weg die Schüler und Schülerinnen wählen werden, wird davon abhängig sein, wie Technologie im Unterricht eingesetzt wurde.

Aufgabenstellungen:

- a) Geben Sie einen Ausdruck an, mit dem das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten während des 30-minütigen Trainingsprogramms berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Wert!

Begründen Sie, warum das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten der mittleren Geschwindigkeit \bar{v} während des 30-minütigen Trainingsprogramms entspricht!

Berechnen Sie unter Verwendung der mittleren Geschwindigkeit \bar{v} die während des 30-minütigen Trainingsprogramms bewältigte Strecke!

Ausarbeitung a	Kommentar
	<ul style="list-style-type: none"> • Eine Liste der Zeiten eingeben • Die zugehörigen Geschwindigkeiten berechnen lassen.

1.1 1.2 1.3 ▶ *Laufband ▾ RAD

$f(t) := 8 \cdot 10^{-4} \cdot t^3 - 0.05 \cdot t^2 + 1.1 \cdot t + 5$ Done

©Mittelwert: $\frac{f(0)+f(1)+\dots+f(28)}{15.}$

mean(vv) 11.5707

|

1.2 1.3 1.4 ▶ *Laufband ▾ RAD

Das arithmetische Mittel entspricht der mittleren Geschwindigkeit während des 30-minütigen Trainingsprogramms, weil die Geschwindigkeiten $v(0), \dots, v(28)$ in gleich langen Zeitintervallen (2Min) jeweils konstant sind.

Bewältigte Strecke:

$\text{mean}(\text{vv}) \cdot 0.5 \rightarrow 5.78533 \text{ km}$

- Ausdruck für den Mittelwert angeben.
- Mittelwert ausrechnen.

- Begründung

- Bewältigte Strecke ausrechnen.

Alternativ:

1.2 1.3 1.4 ▶ *Laufband ▾ RAD

	A aa	B vv	C	D
=		=f(aa)		=OneVar(
1	0	5.	Title	One-Va...
2	2	7.0064	\bar{x}	11.5707
3	4	8.6512	Σx	173.56
4	6	9.9728	Σx^2	2114.41
5	8	11.0096	$s_x := s_n - \dots$	2.75434
D2	=11.570666666667			

- Statistiktool der Tabellenkalkulation für die Berechnung des Mittelwertes verwenden.

Alternativ:

1.3 1.4 2.1 ▶ *Laufband ▾ RAD

$f(t) := 8 \cdot 10^{-4} \cdot t^3 - 0.05 \cdot t^2 + 1.1 \cdot t + 5$ Done

$tt := \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28\}$
 $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28\}$

$vv := f(tt)$
 $\{5., 7.0064, 8.6512, 9.9728, 11.0096, 11.8, 12.3\}$

©Mittelwert: $\frac{f(0)+f(1)+\dots+f(28)}{15.}$

mean(vv) 11.5707

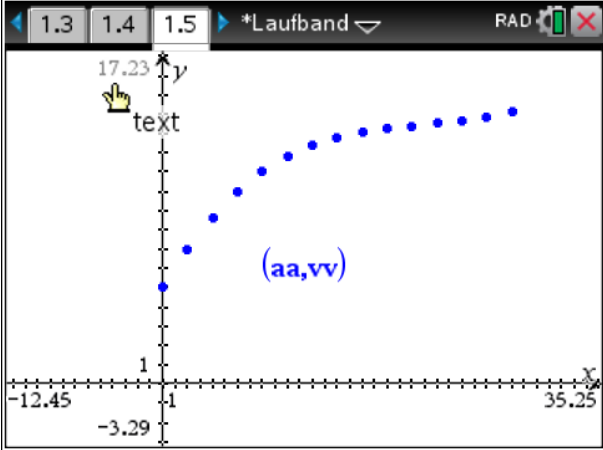
- Ohne Tabellenkalkulation mit Listen im Calculator

- b) Geben Sie die minimale und die maximale Geschwindigkeit des Laufbands während des 30-minütigen Trainingsprogramms an!

$v_{\min} =$ _____ km/h

$v_{\max} =$ _____ km/h

Begründen Sie, warum zu den Zeitpunkten t_{\min} und t_{\max} , zu denen die minimale bzw. die maximale Geschwindigkeit des Laufbands in dem 30-minütigen Trainingsprogramm erreicht wird, $f'(t_{\min}) \neq 0$ und $f'(t_{\max}) \neq 0$ gilt!

Ausarbeitung b	Kommentar
$v_{\min}=5$ km/h $v_{\max}=14.16$ km/h	<ul style="list-style-type: none"> Die Werte können aus der Tabellenkalkulation oder den verwendeten Listen im Punkt a abgelesen werden.
Alternativ:	
 <p>t_{\min} und t_{\max} sind keine lokalen Extremstellen der Funktion f, weshalb die 1. Ableitung von f an diesen Stellen nicht null ist.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Man könnte auch eine graphische Darstellung heranziehen, um zu erkennen, dass $f(0)$ das Minimum und $f(28)$ das Maximum liefert. Für die Begründung ist Technologie nicht unbedingt notwendig, die graphische Darstellung sicher hilfreich.

- d) Die in den ersten zehn Trainingsminuten zurückgelegte Weglänge kann näherungsweise mit dem Integral $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t) dt$ berechnet werden. Berechnen Sie diesen Näherungswert und erläutern Sie die Bedeutung des Faktors $\frac{1}{60}$!

Geben Sie die absolute Abweichung des berechneten Näherungswertes von der tatsächlich zurückgelegten Weglänge während der ersten zehn Minuten in Metern an!

1.5 2.1 3.1 *Laufband RAD

$f(t) := 8 \cdot 10^{-4} \cdot t^3 - 0.05 \cdot t^2 + 1.1 \cdot t + 5$ Done

$\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t) dt$ 1.50556

© f hat die Einheit km/h und t min. Durch diesen Faktor wird km/h in km/min umgerechnet

$tt := \{0, 2, 4, 6, 8\}$ {0, 2, 4, 6, 8}

$vv := f(tt)$

{5., 7.0064, 8.6512, 9.9728, 11.0096}

$\text{sum}\left(\frac{1}{60} \cdot 2 \cdot vv\right)$ 1.388

© Unterschied

1.50555555555556 - 1.388 0.117556

© ca. 118 Meter

- Integral berechnen.
- Erläuterung
- Tatsächlich zurückgelegte Wegstrecke berechnen
- Absolute Abweichung ausrechnen

- e) Unter bestimmten Voraussetzungen ist der Energiebedarf einer Person bei einem Lauftraining direkt proportional zur Masse der Person (in kg) und zur zurückgelegten Weglänge (in km).
 Die nachstehende Tabelle zeigt den Energiebedarf (in kcal) einer 80 kg schweren Person bei einem Lauftraining in Abhängigkeit von der Dauer t des Trainings. Die Person läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h.




	$t = 15 \text{ min}$	$t = 30 \text{ min}$	$t = 45 \text{ min}$	$t = 60 \text{ min}$
Energiebedarf in kcal	194	388	582	776

Zeigen Sie anhand der Tabellenwerte die direkte Proportionalität des Energiebedarfs zur zurückgelegten Wegstrecke und berechnen Sie den Proportionalitätsfaktor k !

Beim Lauftraining wird die Geschwindigkeit häufig als „Tempo“ in min/km umschrieben. Berechnen Sie für die unten angeführten Geschwindigkeiten unter Verwendung des Proportionalitätsfaktors k für eine 90 kg schwere Person jeweils das Tempo und den Energiebedarf (in kcal) für die angegebene Zeitdauer!

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8		
10			
12			

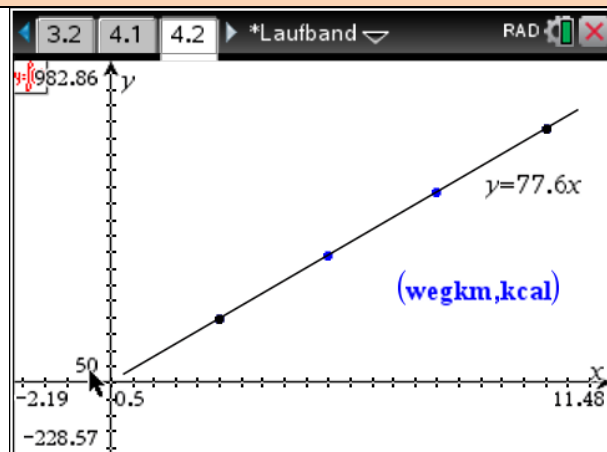
Ausarbeitung e

3.1		3.2		4.1		► *Laufband ◄		RAD  	
	A	tmin	B	kcal	C	wegkm	D	kk	E
=					=10./60*t	=kcal/wegk		=kk/80	
1		15		194		2.5		77.6	0.97
2		30		388		5.		77.6	0.97
3		45		582		7.5		77.6	0.97
4		60		776		10.		77.6	0.97
C wegkm:= $\frac{10.}{60} \cdot tmin$									

Kommentar

- Eingabe der gegebenen Daten in die Tabellenkalkulation.
- Berechnen des zurückgelegten Weges bei 10 km/h.
- Das Anhängen der verwendeten Einheit an die Variablennamen soll helfen nicht auf unterschiedliche Einheiten zu vergessen.
- Ergebnis für k:
Ob als Proportionalitätsfaktor das Verhältnis Energiebedarf/Wegstrecke oder Energiebedarf/(Wegstrecke mal Masse) berechnet werden soll, geht für mich nicht klar aus dem Text hervor. Daher würde ich auch beides als richtig werten. (Hier würde manches vielleicht klarer, wenn man Einheiten verlangen würde.)

Alternativ:



- Zeichnen der Datenwerte in der Graphik.
- Gerade durch Daten legen und Gleichung der Geraden anzeigen lassen liefert den Proportionalitätsfaktor (Verhältnis Energiebedarf/Wegstrecke).

Alternativ:

4.1		4.2		5.1		► *Laufband ▾		RAD					
B		kcal		C		wegkm		D		E		F	
=						=10./60*tm						=LinRegM	
1		194				2.5				Title		Linear R...	
2		388				5.				RegE..		m*x+b	
3		582				7.5				m		77.6	
4		776				10.				b		-1.12E-1...	
5										r²		1.	
F =LinRegMx('wegkm','kcal,1): CopyVa													

- Verwenden der Datenwerte um eine Regressionsgerade durchzulegen ($r^2=1$ zeigt, dass die Punkte tatsächlich auf einer Geraden liegen).
- Steigung der Regressionsgeraden liefert den Proportionalitätsfaktor (Verhältnis Energiebedarf/Wegstrecke).

7.1 7.2 7.3 ▶ *Laufband ▾ RAD ✕

Energiebedarf e proportional zu Masse m und Weglänge: $e=k*m*s$

$k:=\frac{194}{80 \cdot 10 \cdot 0.25} \rightarrow 0.97$

bzw. $e=k*m*v*t$ (konst. Geschwindigkeit)

	km...	B tempo	C ener...	D energi...	E
=		=1/kmproh*60	= 'k*90*k	= 'k*90*km	
1	7.5	8.	163.688	327.375	
2	10	6	218.25	436.5	
3	12	5	261.9	523.8	

- Verwenden der Tabellenkalkulation für die Berechnung von Tempo, Energiebedarf in 15 min und 30 min (in jeweils einer Spalte).
- Schwierigkeiten könnten entstehen, wenn im ersten Teil für k das Verhältnis Energiebedarf/Wegstrecke ausgerechnet wurde.

Alternativ:

7.1 7.2 7.3 ▶ Laufband ▾ RAD ✕

Energiebedarf e proportional zu Masse m und Weglänge: $e=k*m*s$

$k:=\frac{194}{80 \cdot 10 \cdot 0.25} \rightarrow 0.97$

bzw. $e=k*m*v*t$ (konst. Geschwindigkeit)

$v:=\{7.5,10,12\} \rightarrow \{7.5,10,12\}$

für $t=15\text{min}=0.25\text{h}$ und $m=90\text{kg}$:

$e15:=k \cdot 90 \cdot v \cdot 0.25$
 $\rightarrow \{163.688,218.25,261.9\}$

für $t=30\text{min}=0.5\text{h}$ und $m=90\text{kg}$:

$e30:=k \cdot 90 \cdot v \cdot 0.5 \rightarrow \{327.375,436.5,523.8\}$

- Ohne Tabellenkalkulation