Räkneoperationer med komplexa tal

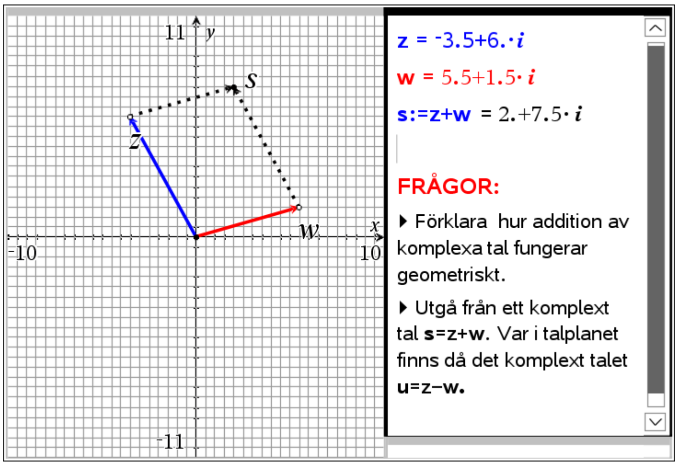
I en annan aktivitet som bara heter *Komplexa tal* behandlar vi komplexa tal från grunden, bland annat räkneoperationer och hur komplexa tal kan representeras med punkter och vektorer i ett komplext talplan. Vi visar detta både för tal både i rektangulär och polär form.

I ännu en aktivitet om komplexa tal, *Ekvationer med komplexa tal och faktorsatsen*, så tar vi upp ekvationer med komplexa rötter och faktorsatsen. Dessa två aktiviteter är mer avancerade.

Denna aktivitet är något ***enklare*** och behandlar hur man adderar och multiplicerar komplexa tal. Vi utgår oftast från tal i det komplexa talplanet och vi visar bland annat hur du i samma fönster kan manipulera komplexa tal i talplanet genom att dra i strålarna och samtidigt se hur uttrycken på formen z=*a*+***b****i* förändras***.***

Problem 2/Sid 1

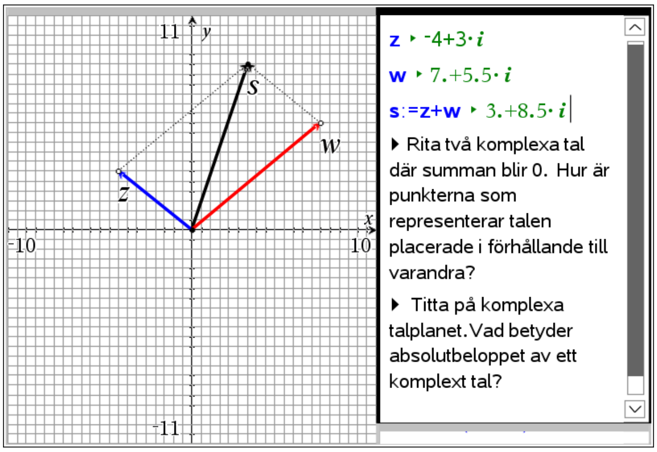
Här är tanken att man ska dra i de röda och blå strålarna i talplanet.



Här ställer vi några enkla frågor.

- Förklara hur addition av komplexa tal fungerar geometriskt.
- Utgå från ett komplext tal s=z+w. Var i talplanet finns då det komplext talet u=z-w?

Problem 3/sid1



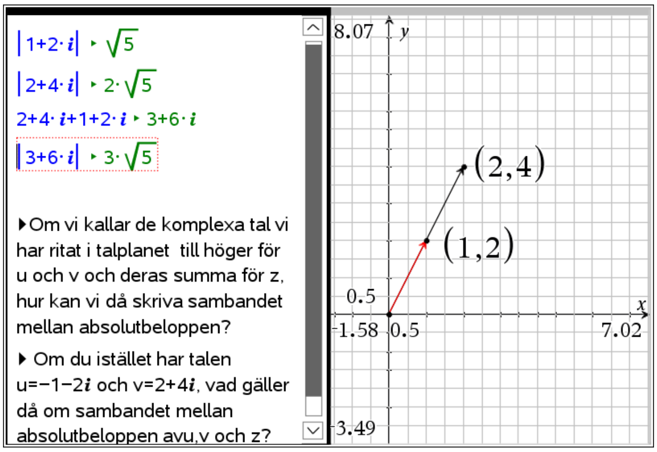
Här har vi också ritat ut strålen för talet *s*. *s* står här för summa.

Två frågor även här:

- Rita två komplexa tal där summan blir 0. Hur är punkterna eller strålarna som representerar talen placerade i förhållande till varandra?
- Titta på komplexa talplanet. Vad betyder absolutbeloppet av ett komplext tal?

Problem 4

Här kommer vi in på begreppet absolutbelopp. Tanken är här att man ska jämföra båda delarna av sidan. De flesta inser snabbt att absolutbeloppet av 1+2***i*** och -1+2***i*** är $\sqrt{5}$.



Problem 5/Sid 2

Här beräknar vi konjugatet och produkten av konjugatet och själva talet. MAN MÅSTE HÄR GÅ IN PÅ SID 3 OCH TILLDELA *z* DET VÄRDE MAN VILL HA.

Gå först in på nästa sida och ändra z. Du får direkt konjugatet och produkten av talet och konjugatet beräknade.

z

cz:=conj(z) = $-1-3\cdot i$

z·cz = 10

Tre frågor:

- Om z = a+b·*i* vad blir då z·conj(z)?
- Varför blir produkten av z och conj(z) alltid ett reellt tal?
- Förklara svaret i frågan ovan genom att rita talen med pilar i komplexa talplanet.

Den andra och tredje frågan ovan kan kanske vålla en del besvär. Om man ritar talen i talplanet så blir det enklare.

Sid 3

Vi återkommer till våra representanter **z** och **w** för komplexa tal. Här gör vi en multiplikation av **z** och **w.** Gå in och ändra **z** och **w** och se produkten beräknad.

z:=$-1+4\cdot i$

w:=$3+4\cdot i$

z·w ▸ $-19+8\cdot i$

Vi visar i steg hur du beräknar produkten

$(a+b\cdot i)\cdot(c+d\cdot i)$ ▸ $a\cdot c-b\cdot d+(a\cdot d+b\cdot c)\cdot i$

Stämmer det med de tal z och w du har. Du kan göra så här för att kontrollera för speciella tal. Använd gärna talen z och w du har just nu så att du kan jämföra.

$(a+b\cdot i)\cdot(c+d\cdot i)|a=-1$ and $b=4$ and $c=3$ and $d=4$ ▸ $-19+8\cdot i$

Här definierar vi först två komplexa tal och beräknar produkten. På sidan visas också multiplikationen symboliskt.

Problem 6

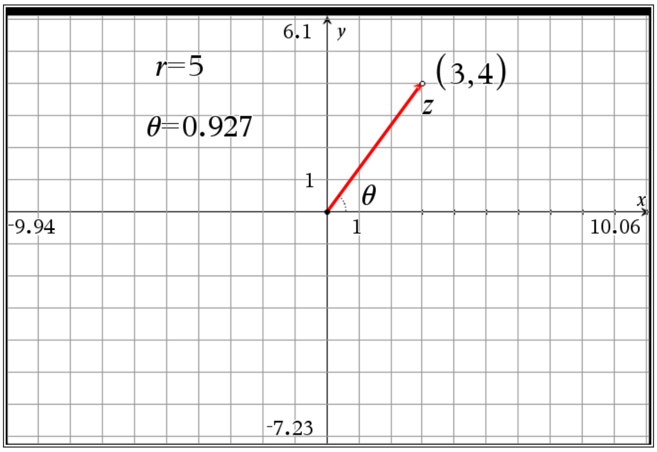
Man kan istället för koordinater för realdelen och imaginärdelen också representera komplexa tal med strålens längd och vinkeln mellan positiva reella axeln och strålen.

För varje komplext tal, som betecknas z=a+b·*i*, är absolutbeloppet $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. ***Absolutbeloppet*** är avståndet från origo till till den punkt som representerar z. ***Argumentet*** av ett komplext tal, som betecknas arg(z), är den *vinkel* θ som bildas mellan den positiva reella axeln och den vektorpil som representerar talet. I TI−Nspire skriver man angle(z). Man brukar räkna i radianer.

Vrid nu pilen runt i talplanet och man ser koordinaterna som representerar talet på vanlig rektangulär form och man ser dessutom också talet på ett annat sätt där **r** är absolutbeloppet (pilens längd) och **θ** är vinkeln från den positiva reella axeln.

Testa t ex med talet 3+2·*i*. Absolutbeloppet är $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ och argumentet räknar vi ut så här: tangens för vinkeln är ju 2/3 vilket ger att vinkeln är $\tan^{-1}(2/3)\approx 0{,}588$. Stämmer det? Pröva olika värden i alla fyra kvadranterna.

Du kan ändra koordinaterna genom att högerklicka på dem och sedan ändra. Det kan annars vara svårt att ställa in på heltal t ex.



Vi tar också kort upp polär form här. Vi går inte igenom hur man beräknar produkten. Det beskrivs utförligare i aktiviteten *Komplexa tal*. Multiplikation av talen 2+2*i* och 1+1*i* ger samma resultat.

Problem 7

Varje komplext tal $z=a+bi$ där $r=|z|$ och θ=arg(z) kan skrivas på polär form som $z=r(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$.

Om vi nu ska muliplicera två tal z och w i polär form så får vi

z = $r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$ w = $r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$

och produkten blir då: $z\cdot w=r_1\cdot r_2\cdot(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\cdot\sin(\theta_1+\theta_2))$

TEST: Vi definierar två tal "enkla" tal z och w så här:

Define z=2+2·*i* ▸ *Klar* Define w=1+1·*i* ▸ *Klar*

$|z|$ ▸ $2\cdot\sqrt{2}$ angle(z) ▸ $\frac{\pi}{4}$ $|w|$ ▸ $\sqrt{2}$ angle(w) ▸ $\frac{\pi}{4}$

Vi utför nu beräkningen:

$2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ▸ $4\cdot i$ z·w ▸ $4\cdot i$