











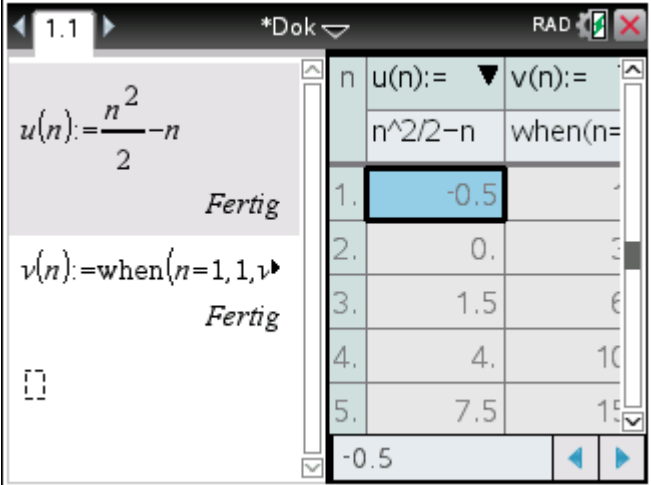























14. Folgen und Reihen, Grenzwerte

<p>14.1 Eine Folge definieren Explizite Definition Rekursive Definition</p>		<p>Definiere die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 2n + 1$: $a(n) := 2 * n + 1$ <input type="button" value="Enter"/> → Fertig</p> <p>Definiere die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $b_n = \begin{cases} 3, & \text{falls } n = 1 \\ b_{n-1} + 2 & \text{sonst} \end{cases}$: $b(n) := \text{when}(\underbrace{n=1}_{(1)}, \underbrace{3}_{(2)}, \underbrace{b(n-1)+2}_{(3)})$ <input type="button" value="Enter"/> → Fertig</p> <p>(1) Bedingung (2) So wird b_n berechnet, wenn die Bedingung erfüllt ist. (3) So wird b_n berechnet, wenn die Bedingung <i>nicht</i> erfüllt ist.</p>
<p>14.2 Glieder einer vorher definierten Folge berechnen Ein Glied Mehrere Glieder</p>	<p>6 4 5</p>	<p>Berechne das 7. Glied der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $a(7)$ <input type="button" value="Enter"/> → 15</p> <p>Berechne die Glieder mit den Nummern 3 bis 6 der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: 1. Weg: $a(n) \mid n = \{3, 4, 5, 6\}$ <input type="button" value="Enter"/> → $\{7, 9, 11, 13\}$ 2. Weg: $\text{seq}(a(i), i, 3, 6)$ <input type="button" value="Enter"/> → $\{7, 9, 11, 13\}$</p> <p> Bei rekursiver Definition kann der erste Weg zu einem Memory-Error führen.</p>
<p>14.3 Eine Folge definieren und einige ihrer Glieder berechnen</p>	<p>6 4 5</p>	<p>Berechne von der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 2n + 1$ die Glieder mit den Nummern 3 bis 7: $\text{seq}(2 * n + 1, n, 3, 7)$ <input type="button" value="Enter"/> → $\{7, 9, 11, 13, 15\}$</p>
<p>14.4 Einige oder unendlich viele Glieder einer Folge zusammenzählen: $\sum_{i=1}^n a_i$</p>		<p>Zähle alle Glieder der Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $a_i = 2i + 1$ zusammen, deren Index i zwischen 1 und n liegt: 1. Weg: mit dem Befehl <code>sumseq</code> $\text{sumseq}(a(i), i, 1, n)$ <input type="button" value="Enter"/> → $n^2 + 2 \cdot n$ 2. Weg: mit der Vorlage für das Summenzeichen Σ</p> <p> <input type="button" value="menu"/> 4 5  <input type="button" value="x"/> 4 5</p> <p>Ausfüllen der Vorlage: 1. Möglichkeit: $i \triangleright 1 \blacktriangle a(i) \blacktriangle n$ <input type="button" value="Enter"/> → $n^2 + 2 \cdot n$ 2. Möglichkeit: Die vier leeren Felder der Vorlage jeweils anklicken und ausfüllen: $\sum_{i=1}^n a(i)$ <input type="button" value="Enter"/> → $n^2 + 2 \cdot n$</p>

<p>Das Zeichen ∞</p>	<p>Addiere alle Glieder der Folge $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $c_i = \frac{1}{2^i}$:</p> <p>1. Weg: mit dem Befehl sumseq <code>sumseq(1/(2 ^ i), i, 1, infinity)</code> <input type="button" value="Enter"/> $\rightarrow 1$</p> <p>2. Weg: mit der Vorlage für das Summenzeichen Σ</p> <p> <input type="button" value="menu"/> 4 5</p> <p>  4 5</p> <p>Ausfüllen der Vorlage:</p> $\sum_{i=1}^{\infty} 1/(2^i)$ <input type="button" value="Enter"/> $\rightarrow 1$ <p> Wenn anstatt $\wedge i$ das Zeichen \hat{i} erscheint, ist zwischen \wedge und i ein Leerschlag zu drücken.</p> <p>Das Zeichen ∞ wird folgendermassen eingegeben:</p> <p>1. Weg: infinity</p> <p>2. Weg:</p> <p> <input type="button" value="pi"/> <input type="button" value="pi"/> <input type="button" value="pi"/> <input type="button" value="Enter"/></p> <p> PC: Mausclick rechts / 7: Sonderzeichen... / ∞ durch Doppelclick einfügen</p> <p>Mac: Ctrl+Mausclick / 7: Sonderzeichen... / ∞ durch Doppelclick einfügen</p>
<p>14.5 Einige oder unendlich viele Glieder einer Folge multiplizieren: $\prod_{i=1}^n a_i$</p>	<p>Multipliziere alle Glieder der Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $a_i = 2 \cdot i + 1$, deren Index i zwischen 3 und 8 liegt:</p> <p>1. Weg: mit dem Befehl prodseq <code>prodseq(a(i), i, 3, 8)</code> <input type="button" value="Enter"/> $\rightarrow 2297295$</p> <p>2. Weg: mit der Vorlage für das Produktzeichen Π</p> <p> <input type="button" value="menu"/> 4 6</p> <p>  4 6</p> <p>Ausfüllen der Vorlage:</p> <p>1. Möglichkeit:</p> $i \triangleright 3 \blacktriangle a(i) \blacktriangle 8$ <input type="button" value="Enter"/> $\rightarrow 2297295$ <p>2. Möglichkeit: Die vier leeren Felder der Vorlage jeweils anklicken und ausfüllen:</p> $\prod_{i=1}^n a(i)$ <input type="button" value="Enter"/> $\rightarrow 2297295$ <p>Multipliziere alle Glieder der Folge $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $c_i = \frac{1}{2^i}$:</p> <p>1. Weg: mit dem Befehl prodseq <code>prodseq(1/(2 ^ i), i, 1, infinity)</code> <input type="button" value="Enter"/> $\rightarrow 0$</p> <p>2. Weg: mit der Vorlage für das Produktzeichen Π</p>

		<p>☰ <input type="text" value="menu"/> 4 6</p> <p>🔧 <input type="text" value=""/> 4 6</p> <p>Ausfüllen der Vorlage:</p> $\prod_{i=1}^{\infty} 1/(2^i) \text{ } \rightarrow 0$
<p>14.6 Die Wertetabelle für eine oder mehrere Folgen aufstellen</p> <p>Vorbereitung</p> <p>n-Werte angeben, die in der Tabelle erscheinen sollen</p> <p>Tabelle berechnen</p>		<p>1. Weg: Geeignet auch für mehrere Folgen:</p> <p>Erzeuge eine Wertetabelle für die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $u_n = \frac{n^2}{2} - n$ und die rekursiv definierte Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $v_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n=1 \\ v_{n-1} + n & \text{sonst} \end{cases}$:</p> <p>1. Schritt: Die Folgen im Rechenblatt definieren: $u(n) := n^2 / 2 - n$ <input type="text" value="Enter"/> → Fertig $v(n) := \text{when}(n=1, 1, v(n-1)+n)$ <input type="text" value="Enter"/> → Fertig</p> <p>2. Schritt: Ein Tabellenblatt in der rechten Hälfte der Anzeige (→ 13.1) eröffnen.</p> <p>3. Schritt: Zur Funktionstabelle wechseln: Fahre in das Tabellenblatt, <input type="text" value="Ctrl"/> T.</p> <p>4. Schritt: Lege die n-Werte fest:</p> <p>☰ <input type="text" value="menu"/> 2 5</p> <p>🔧 <input type="text" value=""/> 2 5</p> <p>Tabellenanfang: 1 Schrittweite: 1 <input type="text" value="Enter"/></p> <p>5. Schritt: Wähle die Folgen aus, für welche die Wertetabelle berechnet werden soll:</p> <p>☰ <input type="text" value="menu"/> 2 3</p> <p>Wähle mit ▲ und ▼ die Folge u aus, <input type="text" value="Enter"/>. Gehe mit ► in die nächste Spalte. Wähle mit ▲ und ▼ die Folge v aus, <input type="text" value="Enter"/>.</p>  <p>Von der Wertetabelle für v sieht man nur noch den Anfang der beiden Kopfzeilen.</p>

<p>Spaltenbreite anpassen</p> <p>Gezielt einige Glieder berechnen</p>		<p>Mit dem Touchpad kann der dargestellte Tabellenausschnitt verändert werden.</p> <p>  2 3</p> <p>Wähle durch Anklicken die Folge u aus. Fahre in die nächste Spalte. Wähle durch Anklicken die Folge v aus. Mit  und  kann der dargestellte Tabellenausschnitt verändert werden. Durch Verbreitern des Programmfensters werden auch die Werte der zweiten Folge sichtbar.</p> <p> Fahre in die gewünschte Spalte,  1 1 1. Bewege mit  und  die rechte Begrenzung der Spalte an die gewünschte Stelle. </p> <p> Fahre in die gewünschte Spalte,  1 1 1. Bewege mit der Maus oder mit den Cursortasten  und  die rechte Begrenzung der Spalte an die gewünschte Stelle.  oder Mausclick.</p> <p>2. Weg (etwas unübersichtlich, aber schnell): Berechne das erste, zehnte, zwanzigste, dreissigste und fünfzigste Glied der Folge $u_n = \frac{n^2}{2} - n$:</p> <p>$n^2 \blacktriangleright / 2 - n \mid n = \{1, 10, 20, 30, 50\}$  \rightarrow $\{-1/2 \ 40 \ 180 \ 420 \ 1200\}$</p>
<p>14.7 Eine Folge graphisch darstellen</p> <p>Folge(n) definieren</p> <p>Glieder berechnen</p> <p>Graphikblatt eröffnen</p> <p>Graph(en) zeichnen</p>	<p>6 4 5</p>	<p>Erzeuge die Graphen für die explizit definierte Folge $u_n = \frac{n^2}{2} - n$:</p> <p>1. Schritt: Die Folge im Rechenblatt definieren: $u(n) := n^2 \blacktriangleright / 2 - n$  \rightarrow Fertig</p> <p>2. Schritt: Die Glieder mit den Nummern 1 bis 10 berechnen und speichern: $n := \text{seq}(i, i, 1, 10)$  $\rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $u\text{werte} := u(n)$  \rightarrow $\left\{ \frac{-1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 4, \frac{15}{2}, 12, \frac{35}{2}, 24, \frac{63}{2}, 40 \right\}$</p> <p>3. Schritt: Ein Graphikblatt eröffnen in der rechten Hälfte der Anzeige (\rightarrow 13.1, aber beim 4. Schritt ist ein leeres Graphikblatt einzufügen. Dies geschieht beim Rechner mit  2, beim Computer durch Anklicken der Option 2:Graphs hinzufügen).</p> <p>4. Schritt: Den Graphen zeichnen</p> <p>  3 6</p>

Eingabezeile ein- und ausblenden

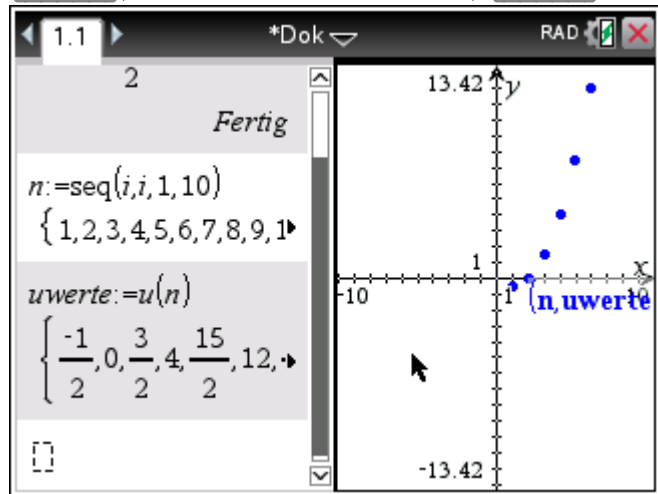
Änderung des dargestellten Ausschnittes

Wähle für das Feld x← die Variable n aus:

, nach Bedarf ▼ bzw. ▲,

Fahre mit ▶ auf das Feld y← und wähle dort uwerte aus:

, nach Bedarf ▼ bzw. ▲,



Klicke irgendwo ins Graphikblatt, 3 6 .

Wähle für das Feld x← die Variable n aus, für das Feld y← die Variable uwerte.

5. Schritt: Blende bei Bedarf die Eingabezeile ein und aus: G .

Stelle einen anderen Ausschnitt des Graphen dar:

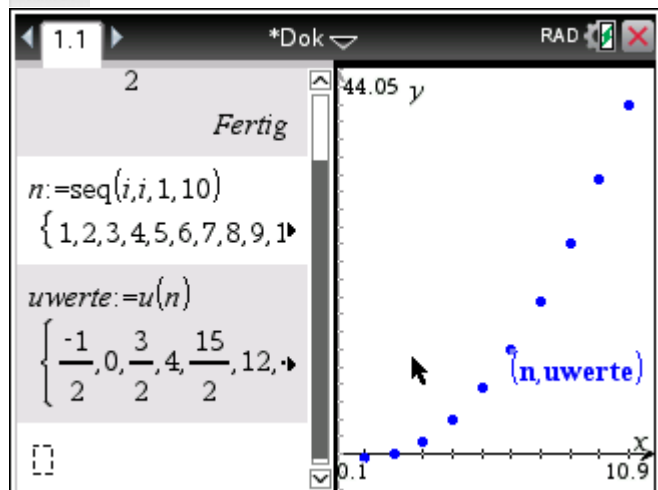
→ 13.5





Zweckmässig ist hier beispielsweise die Einstellung, bei welcher der Punkt O(0, 0) in der Nähe der Ecke links unten liegt (13.5, 8. Weg).

Sinnvoll ist auch die Anpassung an die gegebenen Werte. Die y-Achse wird automatisch so eingeteilt, dass der Plot für die gewählten n-Werte vollständig angezeigt wird.

4 9

4 9



		Bei dieser Einstellung ist eine Einheit auf der x-Achse nicht mehr gleich lang wie eine Einheit auf der y-Achse.
14.8 Die Beschränktheit einer Folge untersuchen Gegen oben Gegen unten	4 8 4 7	<p>Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 4 - 2n$ gegen oben beschränkt? Welches ist allenfalls eine obere Schranke?</p> <p>$a(n) := 4 - 2 * n$ <input type="text" value="Enter"/> → Fertig $f_{\max}(a(n), n) \mid n >= 1$ <input type="text" value="Enter"/> → $n = 1$ $a(n) \mid \text{ans}$ <input type="text" value="Enter"/> → 2 Die Folge ist gegen oben beschränkt, und 2 ist eine obere Schranke.</p> <p>Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 4 - 2n$ gegen unten beschränkt? Welches ist allenfalls eine untere Schranke?</p> <p>$a(n) := 4 - 2 * n$ <input type="text" value="Enter"/> → Fertig $f_{\min}(a(n), n) \mid n >= 1$ <input type="text" value="Enter"/> → $n = \infty$ $a(n) \mid \text{ans}$ <input type="text" value="Enter"/> → $-\infty$ Die Folge ist nicht gegen unten beschränkt.</p>
14.9 Den Grenzwert einer Folge berechnen		<p>$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = ?$</p> <p>1. Weg: $\text{limit}((1/2) \wedge n, n, \text{infinity})$ <input type="text" value="Enter"/> → 0</p> <p>2. Weg: Eingabe des Befehls per Vorlage 1. Schritt: Erzeugen der Vorlage für das Grenzwertzeichen:</p> <p> <input type="text" value="menu"/> 4 4  <input type="text" value="x"/> 4 4</p> <p>2. Schritt: Ausfüllen der Vorlage: 1. Weg: $n \blacktriangleright \infty \blacktriangleright \blacktriangleright 1/(2 \wedge n)$ <input type="text" value="Enter"/> → 0 2. Weg: Drei der vier leeren Felder anklicken und ausfüllen: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/2 \wedge n)$ <input type="text" value="Enter"/> → 0</p> <p> Die Resultate des Rechners sind mit Vorsicht zu geniessen; → Schwierigkeiten und Probleme, Nr. 6.</p> <p> Das Resultat undef hat bei Grenzwerten zwei verschiedene Bedeutungen:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Der Limes existiert nicht, oder - der Rechner findet den Limes nicht.

🌟 Schwierigkeiten und Probleme

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-0.9)^n = ?$ Lösung: $-\frac{9}{19} \approx -0.473684$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-0.9)^n$ → Fehler: Nicht-reelles Ergebnis

Abhilfe:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{9}{10}\right)^n$ → $-\frac{9}{19}$

Notlösung: Addiere 1000 Summanden, um wenigstens einen Näherungswert zu erhalten.

$\sum_{n=1}^{1000} (-0.9)^n$ → -0.473684

2. Vereinfache: Lösung:
 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ $\infty, \ln 2, \pi/4, \pi^2/12$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ → $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)$
 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ → $-\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(k \cdot \pi)}{k}\right)$
 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ → $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\cos(k \cdot \pi)}{2 \cdot k + 1}\right)$
 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ → $-\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(k \cdot \pi)}{k^2}\right)$

Keine dieser recht bekannten Reihen wird erkannt.

3. $a_n := \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}, a_{k+1} - a_k = ?$ Lösung: $\frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{k+1}$

$a(n) := \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$ → Fertig

$a(k+1) - a(k)$ → $\sum_{i=k+2}^{2 \cdot (k+1)} \left(\frac{1}{i}\right) - \sum_{i=k+1}^{2 \cdot k} \left(\frac{1}{i}\right)$

Der Term wird nicht ausgewertet.

4. Berechne $\sum_{n=0}^{\infty} v^n$ für $|v| < 1$ und $0 < v < 1$ Lösung: $\frac{1}{1-v}, \frac{1}{1-v}$

$\sum_{n=0}^{\infty} v^n$ $|v| > -1$ and $v < 1$ → $\sum_{n=0}^{\infty} (v^n)$

$\sum_{n=0}^{\infty} v^n$ $|v| > 0$ and $v < 1$ → $\frac{-1}{v-1}$

Bei der ersten Aufgabe erhält man ein wenig hilfreiches Resultat.

5. Vereinfache:

$$\sum_{k=0}^{100} c^k \text{ für } c \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^n c^k$$

Werte das Resultat der zweiten Aufgabe
aus für $n=100$.

Lösung:

$$\frac{c^{101} - 1}{c - 1}$$

$$\frac{c^{n+1} - 1}{c - 1}$$

$$\frac{c^{101} - 1}{c - 1}$$

$$\sum_{k=0}^{100} c^k \mid c \neq 1 \quad \boxed{\text{Enter}} \rightarrow$$

$$c^{100} + c^{99} + c^{98} + c^{97} + c^{96} + c^{95} + c^{94} + \dots$$

Das Zeichen \neq wird auf dem Rechner mit $\boxed{\div} \boxed{=}$ eingegeben, auf dem PC/Mac mit $/ =$.

$$\sum_{k=0}^n c^k \quad \boxed{\text{Enter}} \rightarrow$$

$$\frac{c^{n+1} - 1}{c - 1} - \frac{1}{c - 1}$$

$$\text{ans} \mid n=100 \quad \boxed{\text{Enter}} \rightarrow$$

$$c^{100} + c^{99} + c^{98} + c^{97} + c^{96} + c^{95} + c^{94} + \dots$$

! Definitionsbereich des Ergebnisses kann größer sein als der der Eingabe.

Wann wird die Summe zusammengefasst?

6. Vereinfache:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^m}$, falls $n < m$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^m}$, falls $n > m$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n} + 1}$, falls $x = -1$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n} + 1}$, falls $x < -1$

Lösung:

0

 ∞ $\frac{1}{2}$

0

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^m} \mid n < m \quad \boxed{\text{Enter}} \rightarrow$

undef

! Beschränkung kann ignoriert werden...

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^m} \mid n > m \quad \boxed{\text{Enter}} \rightarrow$

undef

! Beschränkung kann ignoriert werden...

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n} + 1} \mid x = -1 \quad \boxed{\text{Enter}} \rightarrow$

undef

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n} + 1} \mid x < -1 \quad \boxed{\text{Enter}} \rightarrow$

Fehler: Nicht-reelles Ergebnis