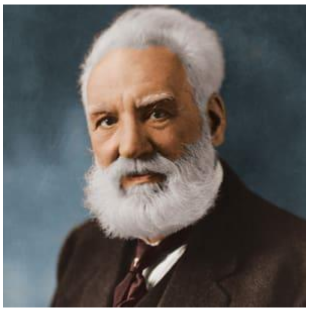
Die logarithmische Abhängigkeit des Schalldruckpegels

Michael Roser

Inhaltsverzeichnis

1. Die Einheit Dezibel

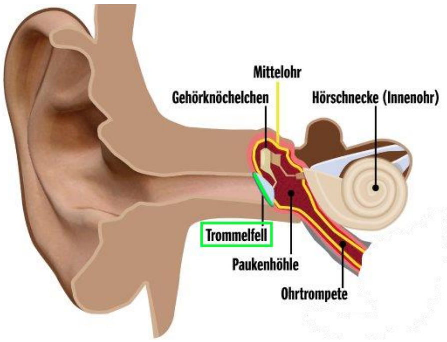


Alexander Graham Bell erfand 1876 das Telefon. Die Masseinheit **Bel** (Einheitenzeichen B) leitet sich aus seinem Namen ab und ist eine Masseinheit von Pegeln in der Akustik. Aus praktischen Gründen wird statt des Bels das **Dezibel** (Einheitenzeichen dB) verwendet, d. h. der zehnte Teil eines Bels.

2. Der Schalldruck und Schalldruckpegel

Der Schalldruck p ist als wirkende Kraft pro Flächeneinheit definiert. Dabei ist es eher die Druckänderung gegenüber dem umgebenden Luftdruck, der auf das Trommelfell wirkt:

$$p = \frac{F}{A}$$



Der zeitlich abhängige Schallwechseldruck ist in der Regel sehr viel kleiner als der statische Luftdruck. Dieser Druckwechsel versetzt das Trommelfell in Schwingungen und diese werden über den Hammer, Ambos und Steigbügel (Gehörknöchelchen) ans Innenohr (Hörschnecke) weitergeleitet. Durch die mechanischen Bewegungen werden dort Nervenreizungen hervorgerufen, die dann im Gehirn als Schall wahrgenommen werden.

Die Hörschwelle ist definiert als kleinster noch wahrnehmbarer Schalldruck. Dieser ist frequenzabhängig und wiird bei 1000 Hz mit $2 \cdot 10^{-5}$ Pa definiert. Dies entspricht dem Schalldruckpegel (sound pressure level) $L = 0$ dB.

Der Schalldruckpegel L [dB] und der Schalldruck p [Pa] stehen über folgende Beziehung in Zusammenhang:

$$\underline{L = 10 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right)}$$

3. Die Addition zweier gleicher Schalldruckpegel

Wie gross ist der Schalldruckpegel von 2 gleichen Schalldruckquellen? – Es ist naheliegend, dass die dB-Werte nicht addiert werden dürfen, da sonst mit 2 Schalldruckquellen von je 60 dB (normale Gesprächslautstärke) schon die Schmerzgrenze von 120 dB erreicht werden würde.

Vom Schalldruckpegel L muss zuerst der Schalldruck p berechnet und danach vom Schalldruck 2p der Schalldruckpegel berechnet werden:

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \Rightarrow \frac{L}{10} = \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \Rightarrow 10^{\left(\frac{L}{10}\right)} = \frac{p}{p_0} \Rightarrow p_0 \cdot 10^{\left(\frac{L}{10}\right)} = p \Rightarrow \underline{p = p_0 \cdot 10^{\left(\frac{L}{10}\right)}} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \quad p_{Tot} = 2 \cdot p \overset{(*)}{=} 2 \cdot p_0 \cdot 10^{\left(\frac{L}{10}\right)} = p_0 \cdot 10^{\left(\frac{L_{Tot}}{10}\right)} \Rightarrow 2 \cdot 10^{\left(\frac{L}{10}\right)} = 10^{\left(\frac{L_{Tot}}{10}\right)} \Rightarrow \lg(2) + \frac{L}{10} = \frac{L_{Tot}}{10}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{10 \cdot \lg(2) + L = L_{Tot}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_{Tot} = L + 10 \cdot \lg(2) \approx L + 3.01\ \text{dB}}$$

Dies ist gleichbedeutend damit, dass der gesamte Schalldruckpegel bei 2 gleichen Quellen sich um 3.01 dB erhöht und dies unabhängig vom Schalldruckpegel der Einzelquelle!

Aufgaben

a) *Wie gross ist der Schalldruckpegel zweier Schallquellen, die je einen Schalldruckpegel von 60 dB erzeugen?*

b) *Zwei Schallquellen erzeugen zusammen einen Schalldruckpegel von 75 dB. Wie gross ist der Schalldruckpegel einer einzelnen Schallquelle, wenn sie denselben Schalldruckpegel erzeugen?*

4. Die Addition mehrerer gleicher Schalldruckpegel

Um wie viel nimmt der Schalldruckpegel bei n gleichen Quellen zu?

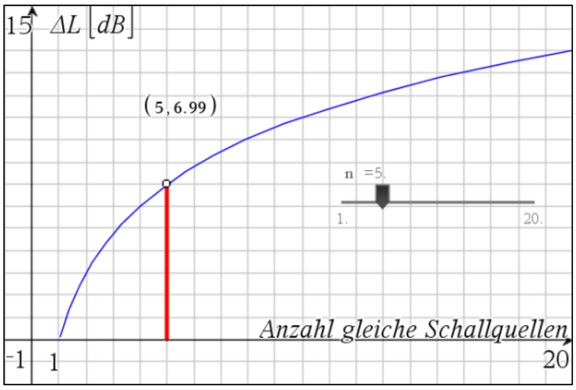
$$p_{Tot} = n \cdot p \overset{(*)}{=} n \cdot p_0 \cdot 10^{\left(\frac{L}{10}\right)} = p_0 \cdot 10^{\left(\frac{L_{Tot}}{10}\right)} \Rightarrow n \cdot 10^{\left(\frac{L}{10}\right)} = 10^{\left(\frac{L_{Tot}}{10}\right)} \Rightarrow \lg(n) + \frac{L}{10} = \frac{L_{Tot}}{10} \Rightarrow \underline{10 \cdot \lg(n) + L = L_{Tot}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_{Tot} = L + 10 \cdot \lg(n)}$$

Der Zuwachs des Schalldruckpegels ist also logarithmisch von der Anzahl Quellen abhängig.

	A anzquellen	B pegel_diff	C	D	E	F
=	=seq(i,i,1,20)	=f1('anzquellen)				
1	1.	0.				
2	2.	3.01				
3	3.	4.771				
4	4.	6.021				
5	5.	6.99				
6	6.	7.782				
7	7.	8.451				
8	8.	9.031				
9	9.	9.542				
10	10	10				

H5



Aufgaben

c) *Eine einzelne Schallquelle erzeugt einen Schalldruckpegel von 20 dB. Wie viele dieser Schallquellen werden benötigt, um mindestens den doppelten Schalldruckpegel zu erzeugen?*

d) *Wie viele gleiche Schallquellen werden benötigt, um den Schalldruckpegel einer einzelnen Schallquelle um mindestens 12 dB zu übertreffen?*

e) *Wie gross ist der Schalldruckpegel einer einzelnen Schallquelle, wenn 20 gleichartige Schallquellen zusammen einen Schalldruckpegel von 92 dB erzeugen?*

5. Die Addition zweier unterschiedlicher Schalldruckpegel

Wirken 2 Quellen mit unterschiedlichem Schalldruckpegel, so ist der Summenschalldruckpegel grösser als der grössere der beiden Einzelpegel. Um wie viel Dezibel ist der Summenschalldruckpegel grösser als der grössere der beiden Einzelpegel? – Welche Abhängigkeit besteht zwischen der Differenz der beiden Einzelpegel und dem Summenschalldruckpegel?

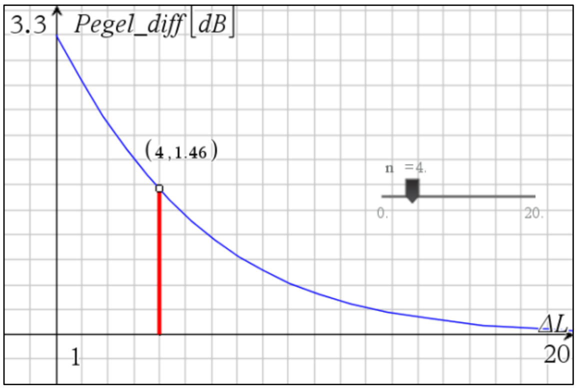
$$\left.\begin{aligned}L_2&=L_1+\Delta L\\ L_\Delta&=L_{Tot}-L_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow L_\Delta=L_{Tot}-L_1-\Delta L=10\cdot\lg\left(10^{\frac{L_1}{10}}+10^{\frac{L_1+\Delta L}{10}}\right)-10\cdot\lg\left(10^{\frac{L_2}{10}}\right)=$$

$$=10\cdot\lg\left(\frac{10^{\frac{L_1}{10}}+10^{\frac{L_1+\Delta L}{10}}}{10^{\frac{L_2}{10}}}\right)=10\cdot\lg\left(10^{\frac{L_1-L_2}{10}}+1\right)=10\cdot\lg\left(10^{\frac{-\Delta L}{10}}+1\right)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{L_\Delta=10\cdot\lg\left(10^{\frac{-\Delta L}{10}}+1\right)}$$

L_Δ ist also weder von L_1 noch von L_2 sondern nur von der Differenz ΔL abhängig.

	A pegel_diff	B delta_l	C	D	E	F
=	=seq(i,i,1,20)	=f1('pegel_diff)				
1	1.	2.539				
2	2.	2.124				
3	3.	1.764				
4	4.	1.455				
5	5.	1.193				
6	6.	0.9732				
7	7.	0.7901				
8	8.	0.6389				
9	9.	0.515				
10	10.	0.4139				



Aufgaben	*f) Der Summenschalldruckpegel zweier Schallquellen beträgt 80 dB. Welche Schalldruckpegel hat die andere Quelle, wenn die eine einen Schalldruckpegel von 78 dB hat?* *g) Zu einer Schallquelle (60 dB) wird eine zweite dazu genommen, so dass der Schalldruckpegel der beiden Schallquellen zusammen gegenüber der zweiten um 0.2 dB grösser ist. Wie gross ist der Schalldruckpegel der zweiten Schallquelle?*

6. Die Addition mehrerer ungleicher Schalldruckpegel (Summenschalldruckpegel)

Wie gross ist der Schalldruckpegel von n ungleichen Schalldruckquellen?

Von jedem Schalldruckpegel L_i muss zuerst der Schalldruck p_i berechnet werden:

$$L_i=10\cdot\lg\left(\frac{p_i}{p_0}\right)\Rightarrow\frac{L_i}{10}=\lg\left(\frac{p_i}{p_0}\right)\Rightarrow 10^{\left(\frac{L_i}{10}\right)}=\frac{p_i}{p_0}\Rightarrow\underline{p_0\cdot 10^{\left(\frac{L_i}{10}\right)}=p_i}$$

Nun wird die Summe gebildet:

$$p_{Tot} = \sum_{i=1}^{n} p_i \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} p_0 \cdot 10^{\left(\frac{L_i}{10}\right)} = p_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} 10^{\left(\frac{L_i}{10}\right)} = p_0 \cdot 10^{\left(\frac{L_{Tot}}{10}\right)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 10^{\left(\frac{L_i}{10}\right)} = 10^{\left(\frac{L_{Tot}}{10}\right)} \Rightarrow \lg\left(\sum_{i=1}^{n} 10^{\left(\frac{L_i}{10}\right)}\right) = \frac{L_{Tot}}{10} \Rightarrow \underline{10 \cdot \lg\left(\sum_{i=1}^{n} 10^{\left(\frac{L_i}{10}\right)}\right) = L_{Tot}}$$

$$\Rightarrow \boxed{L_{Tot} = 10 \cdot \lg\left(\sum_{i=1}^{n} 10^{\left(\frac{L_i}{10}\right)}\right)}$$

Aufgaben	
	h) Drei Schallquellen mit 50 dB, 60 dB und 75 dB wirken gleichzeitig. Berechnen Sie den Summenschalldruckpegel der drei Schallquellen. *i) Zwei Schallquellen (65 dB und 80 dB) bewirken mit einer dritten Schallquelle einen Summenschalldruckpegel von 85 dB. Berechnen Sie den Schalldruckpegel der dritten Schallquelle.* *j) Von 3 Schallquellen hat die zweite den doppelt so grossen Schalldruckpegel wie die erste und die dritte den dreifachen der zweiten. Welche Schalldruckpegel haben die drei Schallquellen, wenn der Summenschalldruckpegel 90 dB beträgt? – Beurteilen Sie das Resultat.*

7. Lösungen der Aufgaben

a) $l\_tot = 60 + 10\cdot\log_{10}(2) \Rightarrow l\_tot = 63.01$

$$L_{Tot} = 60 + 10\cdot \lg(2) = \underline{\underline{63.01\text{ dB}}}$$

b) $\text{solve}\left(75 = l + 10\cdot\log_{10}(2), l\right) \Rightarrow l = 71.99$

$$75 = L + 10\cdot \lg(2) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{L = 71.99\text{ dB}}}$$

c) $\text{solve}\left(2\cdot 20 \le 20 + 10\cdot\log_{10}(n), n\right) \Rightarrow n \ge 100$

$$2\cdot 20 \le 20 + 10\cdot \lg(n) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{n \ge 100}}$$

d) $\text{solve}\left(l + 12 \le l + 10\cdot\log_{10}(n), n\right) \Rightarrow n \ge 15.85$

$$L + 12 \le L + 10\cdot \lg(n) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{n \ge 15.85}}$$

e) $\text{solve}\left(92 = l + 10\cdot\log_{10}(20), l\right) \Rightarrow l = 78.99$

$$92 = L + 10\cdot \lg(20) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{L = 78.99\text{ dB}}}$$

f) $\text{solve}\left(2 = 10\cdot\log_{10}\left(10^{\frac{-(78-l)}{10}} + 1\right), l\right) \Rightarrow l = 75.67$

$$2 = 10\cdot \lg\left(10^{\frac{-(78-L)}{10}} + 1\right) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{L = 75.67\text{ dB}}}$$

Aus dem Lösungsansatz L > 78 würde L = 80.33 dB > 80 dB folgen!

g) $\text{solve}\left(0.2 = 10\cdot\log_{10}\left(10^{\frac{-(60-l)}{10}} + 1\right), l\right) \Rightarrow l = 46.73$

$\text{solve}\left(0.2 = 10\cdot\log_{10}\left(10^{\frac{-(l-60)}{10}} + 1\right), l\right) \Rightarrow l = 73.27$

$$0.2 = 10\cdot \lg\left(10^{\frac{-(60-L)}{10}} + 1\right) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{L = 46.73\text{ dB}}}$$

$$0.2 = 10\cdot \lg\left(10^{\frac{-(L-60)}{10}} + 1\right) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{L = 73.27\text{ dB}}}$$

Kontrolle: $10\cdot\log_{10}\left(10^{\frac{60}{10}} + 10^{\frac{l}{10}}\right)\Big|_{l=\{46.73, 73.27\}} = \{60.2, 73.47\}$

Die Kontrolle (vgl. Kap. 6) zeigt, dass 2 Lösungen existieren.

h) $l\_tot = 10\cdot\log_{10}\left(10^{\frac{50}{10}} + 10^{\frac{60}{10}} + 10^{\frac{75}{10}}\right) \Rightarrow l\_tot = 75.15$

$$L_{Tot} = 10\cdot \lg\left(10^{\frac{50}{10}} + 10^{\frac{60}{10}} + 10^{\frac{75}{10}}\right) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{L_{Tot} = 75.15\text{ dB}}}$$

i) $\text{solve}\left(85 = 10\cdot\log_{10}\left(10^{\frac{65}{10}} + 10^{\frac{80}{10}} + 10^{\frac{l}{10}}\right), l\right) \Rightarrow l = 83.29$

$$85 = 10\cdot \lg\left(10^{\frac{65}{10}} + 10^{\frac{80}{10}} + 10^{\frac{L}{10}}\right) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{L = 83.29\text{ dB}}}$$

j) $\text{solve}\left(90 = 10\cdot\log_{10}\left(10^{\frac{l}{10}} + 10^{\frac{2\cdot l}{10}} + 10^{\frac{6\cdot l}{10}}\right), l\right) \Rightarrow l = 15.$

$$90 = 10\cdot \lg\left(10^{\frac{L}{10}} + 10^{\frac{2L}{10}} + 10^{\frac{6L}{10}}\right)$$

$$\Rightarrow\; \underline{\underline{L = 15\text{ dB}}};\; \underline{\underline{2L = 30\text{ dB}}};\; \underline{\underline{L = 90\text{ dB}}}$$