CAS – Projekt T³ Österreich

T³ ÖSTERREICH

Thema: ELLIPSE – typische Aufgabenstellungen

Thomas Müller ☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Ellipse, Ellipsenpunkte, Ellipsentangenten

Unterrichtsmaterial

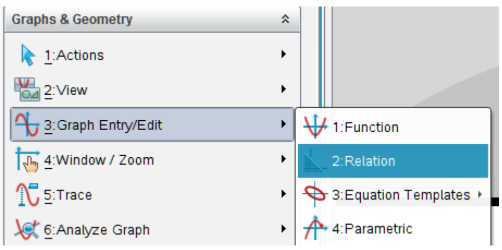
Abhängig von der Aufgabenstellung wird man unterschiedliche Herangehensweisen an die Bewältigung von Kegelschnittsaufgaben wählen. Gemäß Lehrplan geht es um das Beschreiben von Kegelschnittslinien durch Gleichungen, das Schneiden dieser Kurven mit Geraden und das Ermitteln von Tangenten. In den Schullehrbüchern wird dabei stets von Hauptlagen der Kurven ausgegangen. Die Technologie kann im Zuge des Lösungsweges wertvolle Anschauungshilfen und Kontrollmöglichkeiten liefern.

Aufgabenstellung 1: Die Gleichung ist gegeben, z.B. $2x^2 + 5y^2 = 25$

Gesucht könnten die Halbachsenlängen a und b, die Koordinaten der Hauptscheitel und der Brennpunkte sein, etwa auch die (numerische) Exzentrizität (=e/a) usw.

Hier bietet sich die Eingabe als Relation an: *Graphs & Geometry >> Graph Entry/Edit >> Relation*

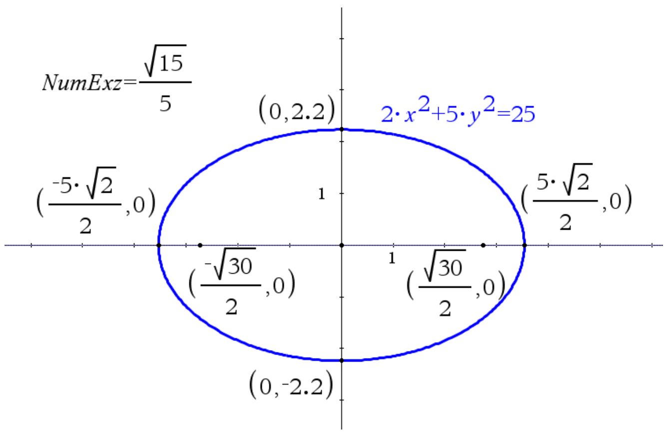
(Vgl. Ellipse-Grundlegendes >> Möglichkeit 3)



Rechte Maustaste auf die Ellipse */ Analyze Graph / Analyze Conics /* liefert dann die in geforderten Koordinaten.

Die Koordinaten der Nebenscheitel erhält man als Schnittpunkte der Ellipse mit der y-Achse. Dazu muss aber zuvor eine Gerade über die y-Achse gelegt werden.

Mit *eccentricity* ist hier stets die *numerische Exzentrizität* gemeint. Es kann möglicherweise eine reizvolle Aufgabe sein, aus den Koordinaten der Brennpunkte (e) und Hauptscheitel (a) die Kontrollrechnung für den erhaltenen Wert e/a durchzuführen. Überdies gewinnt die numerische Exzentrizität in der Scheitelgleichung – einer gemeinsamen Gleichung für Ellipse, Parabel und Hyperbel Bedeutung.

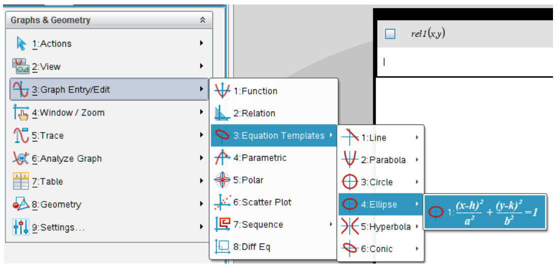


Aufgabenstellung 2: Ellipsenpunkte berechnen

Von einer Ellipse sind bei gegebenen Halbachsenlängen (a = $\sqrt{40}$ und b = $\sqrt{15}$) jene Punkte gesucht, von denen aus die Brennpunkte unter einem rechten Winkel erscheinen. (Beispiel aus Malle, Woschitz, Koth, Salzger: Mathematik verstehen 7 p 143 Nr 7.29)

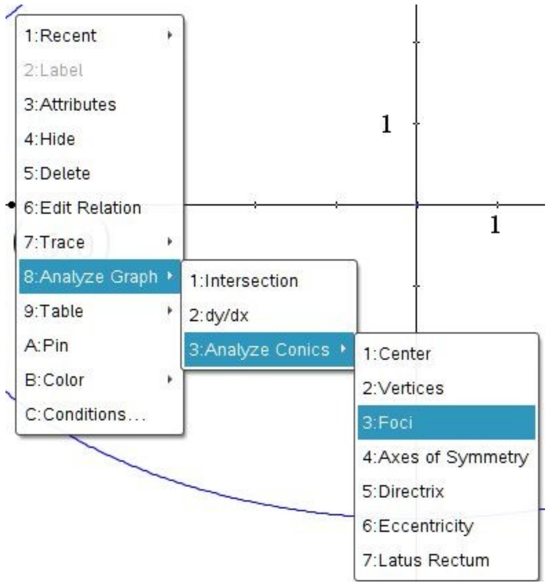
Hier bietet sich die Eingabe über die Vorlage für die Ellipsengleichung an:

Graph Entry/Edit >> Equation Templates >> Ellipse



Analyze Graph >> Analyze Conics >> Foci liefert die Brennpunkte

Diese sind (-5/0) und (5/0)



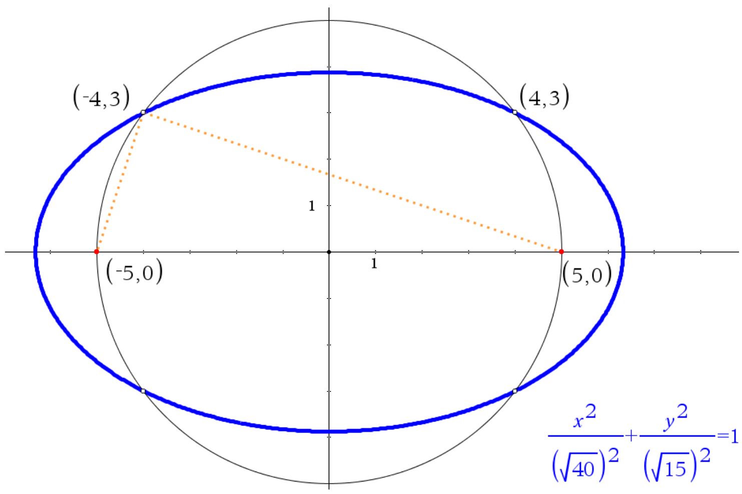
Um die gesuchten Punkte, von denen aus die Brennpunkte unter 90° erscheinen, zu erhalten, ist der Thaleskreis über F_1 und F_2 zu errichten:

Geometry >> Shapes >> Circle

Die gesuchten Punkte werden dann im Schnitt von Thaleskreis und Ellipse erhalten:

Geometry >> Points & Lines >> Intersection Points

Rechtsklick auf die dann angezeigten Schnittpunkte führt zu den Koordinaten: (4/3), (-4/3), (-4/-3), (4/-3)



Die zugehörige Rechnung könnte mit Technologie so aussehen:

Ellipse:

Eingabe: $\mathbf{a}:=\sqrt{40} \blacktriangleright 2\cdot\sqrt{10}$ $\quad \mathbf{b}:=\sqrt{15} \blacktriangleright \sqrt{15}$

Ellipsengleichung: $\mathbf{ell}:=\frac{x^2}{\mathbf{a}^2}+\frac{y^2}{\mathbf{b}^2}=1 \blacktriangleright \frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$

lineare Exzentrizität: $\mathbf{e}:=\sqrt{\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2} \blacktriangleright 5$

Brennpunkte: $\mathbf{f1}:=\begin{bmatrix}\mathbf{e}\\0\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{f2}:=\begin{bmatrix}^{-}\mathbf{e}\\0\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}^{-}5\\0\end{bmatrix}$

Bedingungen für gesuchten Punkt $\mathbf{p}:=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$:

$\mathbf{b1}:=\text{dotP}(\mathbf{f1}-\mathbf{p},\mathbf{f2}-\mathbf{p})=0 \blacktriangleright x^2+y^2-25=0$

$\mathbf{b2}:=\mathbf{ell} \blacktriangleright \frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$

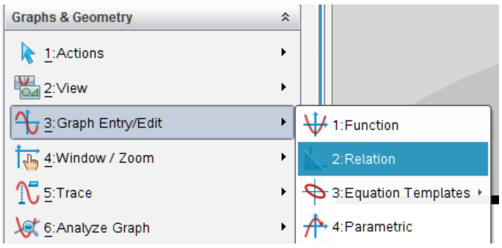
$\text{solve}\left(\begin{cases}\mathbf{b1}\\\mathbf{b2}\end{cases},x,y\right) \blacktriangleright x=^{-}4 \text{ and } y=^{-}3 \text{ or } x=^{-}4 \text{ and } y=3 \text{ or } x=4 \text{ and } y=^{-}3 \text{ or } x=4 \text{ and } y=3$

Aufgabenstellung 3: Schnitt von Gerade und Ellipse

Die Schnittpunkte der Geraden g: $x + 4y = 14$ mit der ell $3x^2 + 8y^2 = 140$ sind zu ermitteln

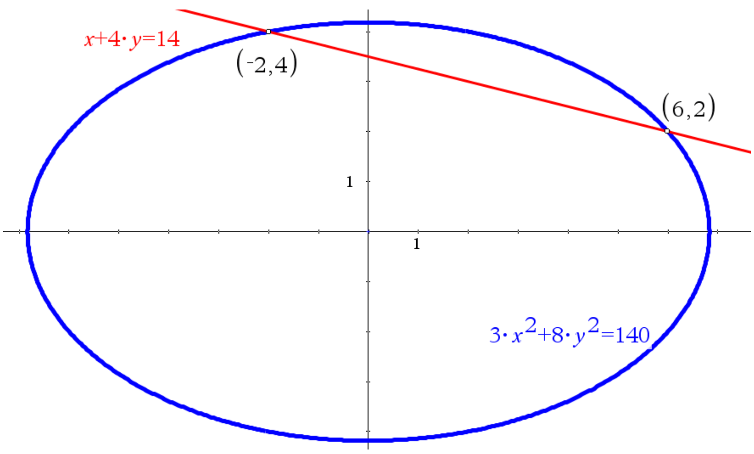
(Beispiel aus Malle, Woschitz, Koth, Salzger: Mathematik verstehen 7 p 145 Nr 7.41)

Hier könnte die Eingabe wie oben über die Vorlage für die Ellipsengleichung erfolgen. Auch die Eingabe von Ellipse und Gerade als Relation führt schnell zum Ziel



Graph Entry/Edit >> Relation

Das Aufsuchen der Schnittpunkte und Anzeigen der Koordinaten erfolgt wieder wie in Aufgabenstellung 2 beschrieben.



Die zugehörige Rechnung könnte mit Technologie so aussehen:

Ellipse: $\mathbf{ell}:=3\cdot x^2+8\cdot y^2=140$ ▸ $3\cdot x^2+8\cdot y^2=140$

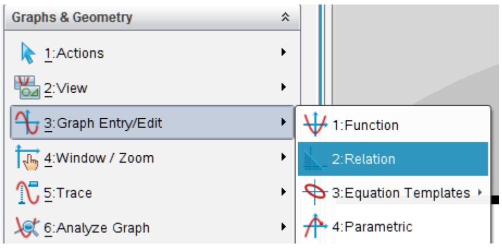
Gerade: $\mathbf{g}:=x+4\cdot y=14$ ▸ $x+4\cdot y=14$

$\text{solve}\left(\begin{cases}\mathbf{ell}\\ \mathbf{g}\end{cases},x,y\right)$ ▸ $x=-2 \text{ and } y=4 \text{ or } x=6 \text{ and } y=2$

Aufgabenstellung 4: Ellipse und Tangenten

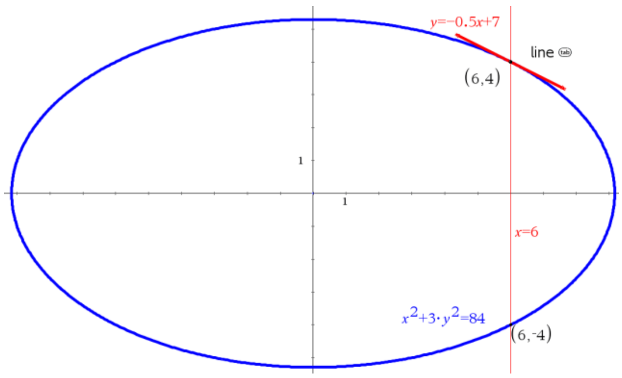
Die Tangente im Punkt P(6/4) der Ellipse $x^2 + 3y^2 = 84$ ist zu berechnen.
(Beispiel aus Malle, Woschitz, Koth, Salzger: Mathematik verstehen 7 p 148 Nr 7.63)

Hier könnte die Eingabe wie oben über die Vorlage für die Ellipsengleichung erfolgen. Auch die Eingabe der Ellipse als Relation führt schnell zum Ziel.

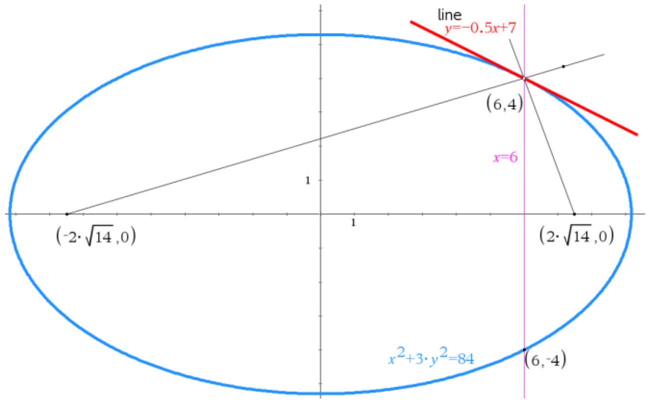


Der Punkt könnte direkt als Ellipsenpunkt oder durch Schnitt der Geraden x = 6 mit der Ellipse (vgl. Aufgabenstellung 3) ermittelt werden.

Die Tangente kann dann einfach über *Geometry* >> *Points & Lines* >> Tangent direkt in (6/4) errichtet oder in einem beliebigen Ellipsenpunkt gezeichnet und dann in den Punkt (6/4) verschoben werden.



Als Alternative bietet sich der konstruktive Weg an: Die Tangente ist bekanntlich die (Außen-) Winkelsymmetrale der beiden Leitstrahlen von den Brennpunkten zum Ellipsenpunkt.



Die zugehörige Rechnung könnte mit Technologie so aussehen:

Eingabe:

Ellipse: **ell**$:=x^2+3\cdot y^2=84 \;\blacktriangleright\; x^2+3\cdot y^2=84$

Punkt: **px**$:=6 \;\blacktriangleright\; 6$ **py**$:=4 \;\blacktriangleright\; 4$ **p**$:=\begin{bmatrix}\mathbf{px}\\ \mathbf{py}\end{bmatrix} \;\blacktriangleright\; \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$

ystrich$:=\mathrm{impDif}(\mathbf{ell},x,y) \;\blacktriangleright\; \frac{-x}{3\cdot y}$

k$:=$**ystrich**$|x=$**px** and $y=$**py** $\;\blacktriangleright\; \frac{-1}{2}$

Gerade gegeben Punkt und Steigung:

p $\;\blacktriangleright\; \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$ **k** $\;\blacktriangleright\; \frac{-1}{2}$

Einsetzen in die Geradengleichung y = k x + d:

lös$:=\mathrm{solve}(\mathbf{py}=\mathbf{k}\cdot \mathbf{px}+\mathbf{d},\mathbf{d}) \;\blacktriangleright\; \mathbf{d}=7$

Tangentengleichung: $y=\mathbf{k}\cdot x+\mathbf{d}|\mathbf{lös} \;\blacktriangleright\; y=7-\frac{x}{2}$

✂---

Didaktischer Kommentar

Die vorliegenden Aufgaben können mit der Technologie von TI-Nspire auch nur geometrisch gelöst werden. Das reine geometrische Lösen solcher Aufgaben mittels Technologie ist auf jeden Fall hinterfragenswert, bietet sich als Ergänzung zur Rechnung als sinnvolle Visualisierung an.