CAS – Projekt T³ Österreich

T³ ÖSTERREICH

Thema: Kegelschnitte – Scheitelgleichung Visualisierung

Thomas Müller ☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Ellipse, Parabel, Hyperbel, Scheitelgleichung, numerische Exzentrizität, Satellitenbahnen

---

Unterrichtsmaterial

Die sogenannte Scheitelgleichung $x^2(1 - ee^2) - 2px + y^2 = 0$ beschreibt eine bestimmte Klasse von Kurven. Es gilt $ee \geq 0$. **p** soll eine reelle positive Zahl sein.

Aufgabenstellung

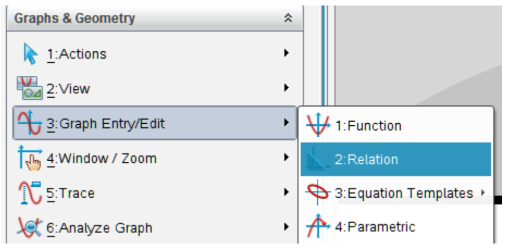
Untersuche die Relation $x^2(1 - ee^2) - 2px + y^2 = 0$ („Scheitelgleichung"). Beschreibe die Bedeutung und den Einfluss der Variablen $ee \geq 0$ und $p \geq 0$ für die Form des Graphen.

✂---

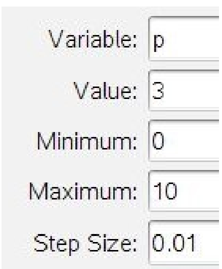
Lösung

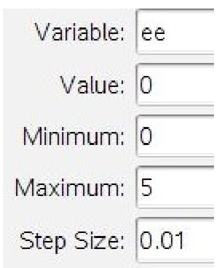
A)

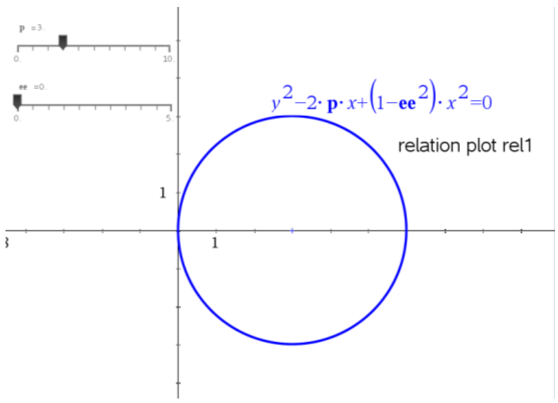
Zunächst wird der Graph dieser Relation ermittelt.
Hier bietet sich also die Eingabe als *Relation* an.



Wird die Gleichung
$x^2(1 - ee^2) - 2px + y^2 = 0$
eingegeben, dann werden automatisch für **ee** und **p** Schieberegler erzeugt.
Diese werden für die experimentelle Phase den vorgegebenen Definitionsbereichen angepasst, etwa wie folgt:







ee = 0 und p = 3 ergibt offenbar einen Kreis mit Radius 3

Die Gleichung ist zweiten Grades. So kann vermutet werden, dass die Kurve einer der kennengelernten Kurven zweiten Grades (Ellipse, Parabel, Hyperbel) entspricht. Das Aussehen für $p = 3$ und $ee = 0$ lässt einen Kreis vermuten.

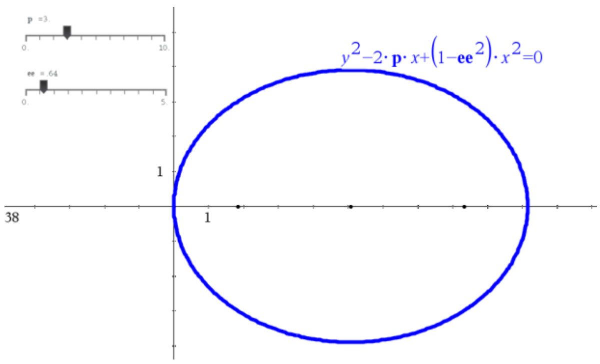
Die Kurve ist tatsächlich ein Kreis:
Denn $p = 3$ und $ee = 0$ führt zur Gleichung $y^2 + x^2 (1 - 0) - 6x = 0$

Diese ist gleichwertig mit $(x-3)^2 + y^2 = 9$. Das Bild trügt also nicht, die Kurve ist tatsächlich ein Kreis mit M(3/0) und Radius 3.

B)

Nach Veränderung von **ee** und **p** kann die Kurve auch maschinell analysiert werden:

Analyze Graph >> *Analyze Conics* >> *Analyze Center* bzw. *Loci* bringt weitere Erkenntnisse.



$x^2 (1 - ee^2) - 2px + y^2= 0$

Sei $1 - ee^2 = r^2$ (für $ee < 1$) gesetzt.

Hinweis: Die Ausdrücke mit x können zu einem vollständigen Quadrat ergänzt werden, sodass die Gleichung die Form

$(x-A)^2/C^2 + y^2/D^2 = 1$ hat.

Dies entspricht einer Ellipsengleichung, deren Mittelpunkt auf der x-Achse verschoben wurde.

C)

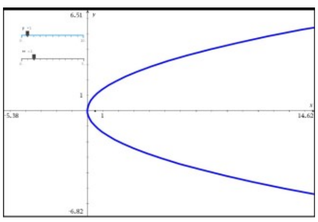
Sonderfall ee = 1:

Die Kurve ist eine Parabel. Variation von p liefert verschieden gekrümmte Parabeln. Der Brennpunkt ist jeweils p/2 vom Scheitel entfernt.

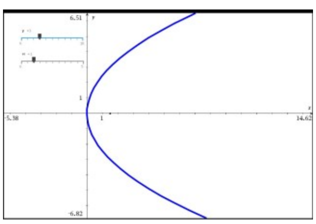
Begründung: Die Gleichung lautet nun

$y^2 + x^2 (1 - 1) - 2px = 0 \rightarrow \mathbf{y^2 = 2\,px}$

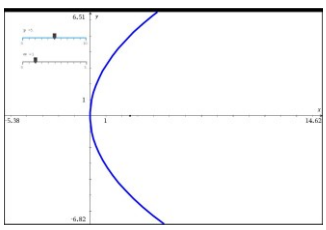
Durch Variation von p kann die Veränderung der Form der Parabel mitverfolgt werden



p = 1



p = 3



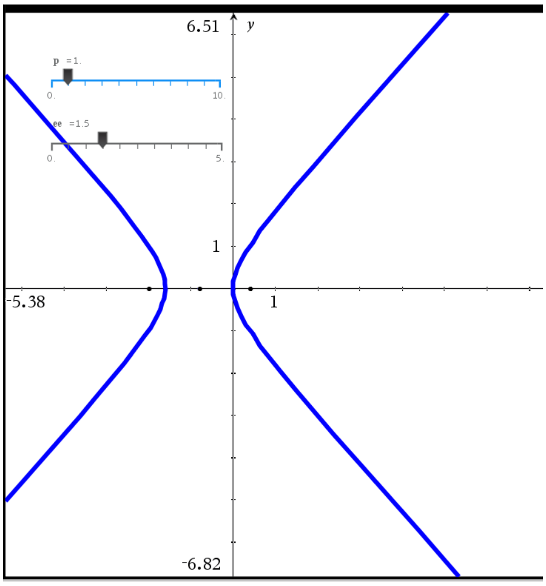
p = 5

D)

Sei nun ee > 1:

$y^2 + x^2 (1 - ee^2) - 2px = 0$

Durch den nun negativen Faktor bei x^2 hat die Gleichung die Form einer Hyperbelgleichung



E)

Was passiert bei p = 0?

Von der Gleichung bleibt

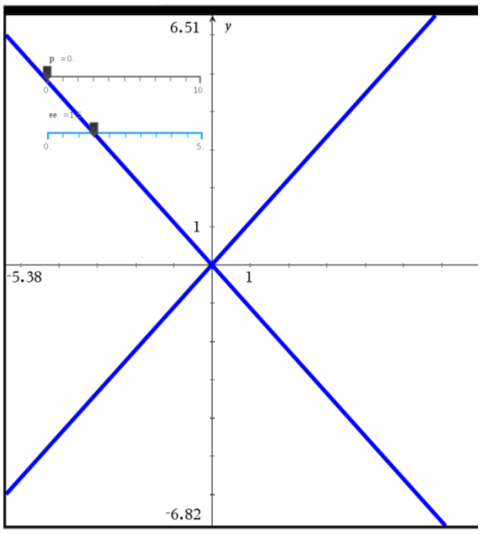
$y^2 + x^2 (1 - ee^2) = 0$

Da ee >1 kann die Gleichung in

$y^2 - A^2 x^2 = (y - A x).(y + A x) = 0$

umgeformt werden.

Dies erklärt den Zerfall des Kegelschnitts in zwei Geraden.



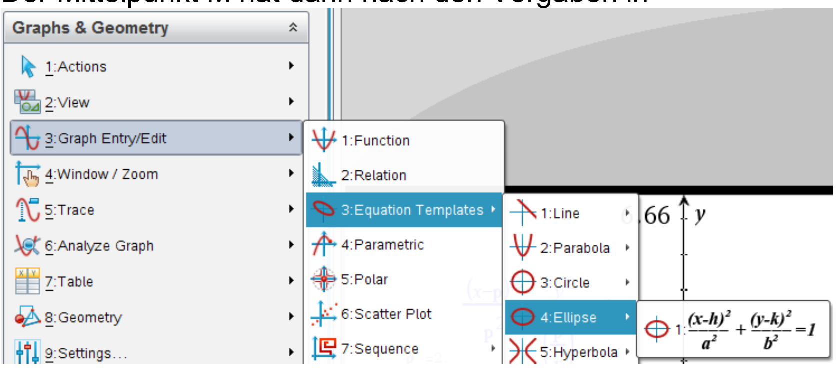
Didaktischer Kommentar

Alle drei Typen von Kegelschnitten können mit Hilfe der vorliegenden Scheitelgleichung einheitlich beschrieben werden: $x^2 (1 - ee^2) – 2px + y^2 = 0$
In dieser Relationsgleichung bedeutet **ee** die numerische Exzentrizität (= e/a mit e = lineare Exzentrizität und **a** = halbe Hauptachsenlänge).

Zunächst wird die Technologie als Visualisierungsmittel verwendet. Die Formel wird an sich als Art *Blackbox* angesehen. Die Bedeutung von **ee** und **p** wird durch Experimentieren - man könnte fast sagen - in einer Form von *reverse engineering* ermittelt.

Ergänzung zu Abschnitt B:
So könnte die Berechnung der Ellipsengleichung im Detail aussehen:

$x^2r^2 - 2px\, r/r + p^2/r^2 - p^2/r^2 + y^2 = 0$
$(xr – p/r)^2 + y^2 = p^2/r^2 \quad |:p^2/r^2$
$(x/p - 1)^2 + y^2r^2/p^2 = 1$
$(x-p)^2/p^2 + y^2 / (p/r)^2 = 1$
D.h. es handelt sich um eine Ellipse.
Der Mittelpunkt M hat dann nach den Vorgaben in



die Koordinaten M(p/0), Hauptachsenlänge ist p, Nebenachsenlänge p/r.

Vorschlag zur Umsetzung

Diese Sequenz könnte als kleines „Forschungsprojekt“ angelegt werden, bei dem die S&S möglichst viele Eigenschaften der durch die Scheitelgleichung erzeugten Kurven finden sollen.

Zusätzlich könnte auch ein Hinweis auf die physikalische Bedeutung von ee erfolgen:

Die Bahn eines von der Erde gestarteten Satelliten hängt bekanntlich von der Anfangsgeschwindigkeit ab. Bei einer Startgeschwindigkeit von 7,92 km/s (erste kosmische Geschwindigkeit) erreicht ein Satellit eine Kreisbahn, bei 11,9 km/s kann der Satellit auf einer Parabelbahn die Schwerkraft der Erde überwinden.

Im TNS-File ist im Problem „Satellitenbahnen“ durch Schieberegler der Übergang von Kreis und Ellipse zu Parabel und Hyperbel(bahn) visualisiert.