CAS – Projekt T³ Österreich

Thema: PARABEL – typische Aufgabenstellungen

Thomas Müller ☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Parabel, Parabelpunkte, Parabeltangenten

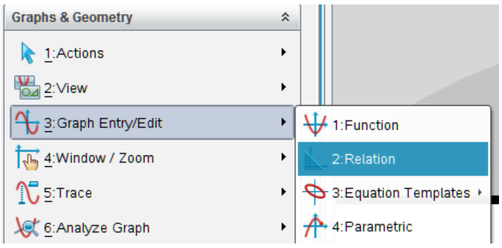
Unterrichtsmaterial

Abhängig von der Aufgabenstellung wird man unterschiedliche Herangehensweisen an die Bewältigung von Kegelschnittsaufgaben wählen. Gemäß Lehrplan geht es um das Beschreiben von Kegelschnittslinien durch Gleichungen, das Schneiden dieser Kurven mit Geraden und das Ermitteln von Tangenten. In den Schullehrbüchern wird dabei stets von Hauptlagen der Kurven ausgegangen. Die Technologie kann im Zuge des Lösungsweges wertvolle Anschauungshilfen und Kontrollmöglichkeiten liefern.

Aufgabenstellung 1: Die Gleichung ist gegeben, z.B. $y^2 = 4x$

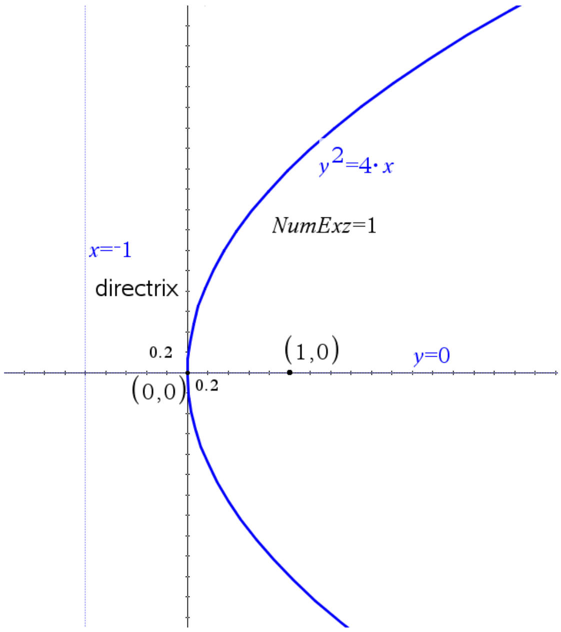
Gesucht könnten die Leitgerade, Brennpunkt, etwa auch die (numerische) Exzentrizität (=e/a) usw. sein.

Hier bietet sich die Eingabe als Relation an: *Graphs & Geometry >> Graph Entry/Edit >> Relation*



Rechte Maustaste auf die Parabel / *Analyze Graph / Analyze Conics /* liefert dann die in geforderten Koordinaten.

Mit *eccentricity* ist hier stets die *numerische Exzentrizität* gemeint, mit *directrix* die *Leitgerade*.

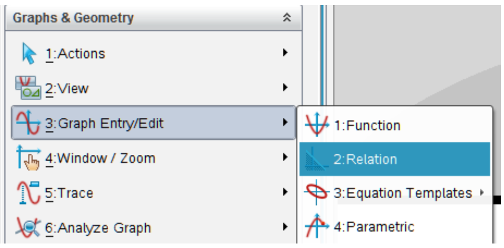


Aufgabenstellung 2: Schnitt von Gerade und Parabel

Die Schnittpunkte der Geraden g: 2x - y = 4 mit der Parabel $y^2 = 4x$ sind zu ermitteln.
(Beispiel aus Malle, Woschitz, Koth, Salzger: Mathematik verstehen 7 p 162 Nr 7.147)

Hier führt die Eingabe wie oben von Parabel und Gerade als Relation schnell zum Ziel

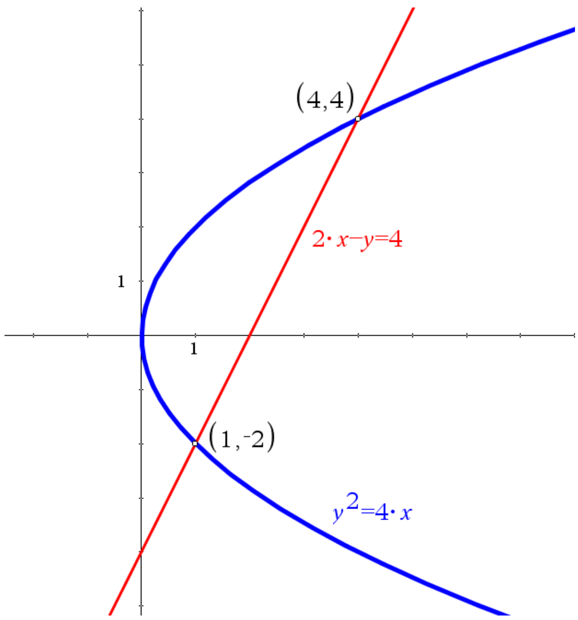
Graph Entry/Edit >> Relation



Das Aufsuchen der Schnittpunkte und Anzeigen der Koordinaten:

Geometry >> Points & Lines >> Intersection Points

Rechtsklick auf die dann angezeigten Schnittpunkte führt zu den Koordinaten: (4/4) und (1/-2)



Die zugehörige Rechnung mit Hilfe eines Gleichungssystemes könnte mit Technologie so aussehen:

$$\text{solve}\left(\begin{cases} rel1(x,y) \\ rel2(x,y) \end{cases}, x, y\right) \qquad x=1 \text{ and } y=-2 \text{ or } x=4 \text{ and } y=4$$

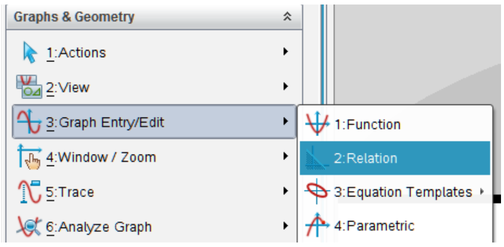
Aufgabenstellung 3: Parabel und Tangenten

Die Tangente im Punkt P(5/y>0) an die Parabel $y^2 = 5x$ ist zu berechnen.
(Beispiel aus Malle, Woschitz, Koth, Salzger: Mathematik verstehen 7 p 163 Nr 7.155a)

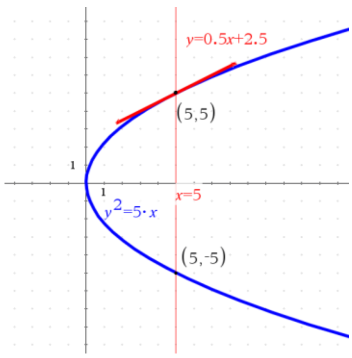
Hier führt die Eingabe der Parabel wie oben als Relation schnell zum Ziel

Graph Entry/Edit >> Relation

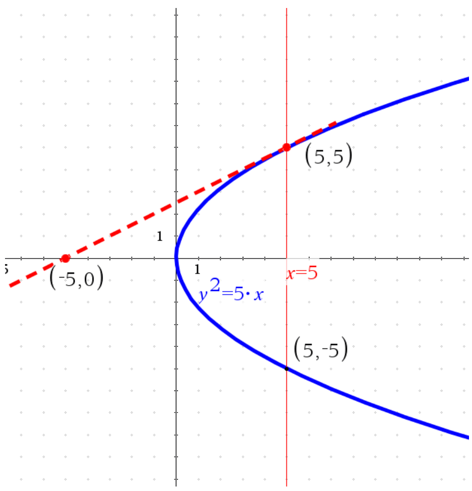
Der Punkt könnte durch Schnitt der Geraden x = 5 mit der Parabel gefunden werden.



Die Tangente kann dann einfach über *Geometry >> Points & Lines >> Tangent* in einem beliebigen Parabelpunkt errichtet und dann in den Punkt (5/5) verschoben werden.



Als Alternative bietet sich der konstruktive Weg an: Die Tangente verläuft bekanntlich durch den zum Abszissenwert (x = 5) symmetrischen Punkt bezüglich des Parabelscheitels.



Die zugehörige Rechnung mit Hilfe eines Gleichungssystemes könnte mit Technologie so aussehen:

Eingabe:

Parabel: $\mathbf{par}:=y^2=5\cdot x \blacktriangleright y^2=5\cdot x$

Punkt: $\mathbf{px}:=5 \blacktriangleright 5$

$\mathbf{lös}:=\text{solve}\left(\begin{cases}\mathbf{par}|x=\mathbf{px}\\ y>0\end{cases},y\right) \blacktriangleright y=5$

$\mathbf{py}:=y|\mathbf{lös} \blacktriangleright 5$

Steigung der Tangente:

$\mathbf{ystrich}:=\text{impDif}(\mathbf{par},x,y) \blacktriangleright \frac{5}{2\cdot y}$

$\mathbf{k}:=\mathbf{ystrich}|x=\mathbf{px} \text{ and } y=\mathbf{py} \blacktriangleright \frac{1}{2}$

Einsetzen in die Geradengleichung y = k x + d:

$\mathbf{ddd}:=\text{solve}(\mathbf{py}=\mathbf{k}\cdot \mathbf{px}+d,d) \blacktriangleright d=\frac{5}{2}$

Tangentengleichung: $y=\mathbf{k}\cdot x+d|\mathbf{ddd} \blacktriangleright y=\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$

✂---

Didaktischer Kommentar

Die vorliegenden Aufgaben können mit der Technologie von TI-Nspire auch nur geometrisch gelöst werden. Das reine geometrische Lösen solcher Aufgaben mittels Technologie ist auf jeden Fall hinterfragenswert, bietet sich als Ergänzung zur Rechnung als sinnvolle Visualisierung an.