Thema: HYPERBEL – typische Aufgabenstellungen

Thomas Müller ☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Hyperbel, Hyperbelpunkte, Hyperbeltangenten

Unterrichtsmaterial

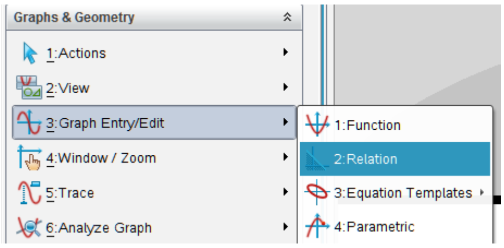
Abhängig von der Aufgabenstellung wird man unterschiedliche Herangehensweisen an die Bewältigung von Kegelschnittsaufgaben wählen. Gemäß Lehrplan geht es um das Beschreiben von Kegelschnittslinien durch Gleichungen, das Schneiden dieser Kurven mit Geraden und das Ermitteln von Tangenten. In den Schullehrbüchern wird dabei stets von Hauptlagen der Kurven ausgegangen. Die Technologie kann im Zuge des Lösungsweges wertvolle Anschauungshilfen und Kontrollmöglichkeiten liefern.

Aufgabenstellung 1: Die Gleichung ist gegeben, z.B. $5x^2 - 4y^2 = 180$

Gesucht könnten die Leitgerade, Brennpunkt, etwa auch die (numerische) Exzentrizität (=e/a) usw. sein.

(Beispiel aus Malle, Woschitz, Koth, Salzger: Mathematik verstehen 7 p 152 Nr 7.82f)

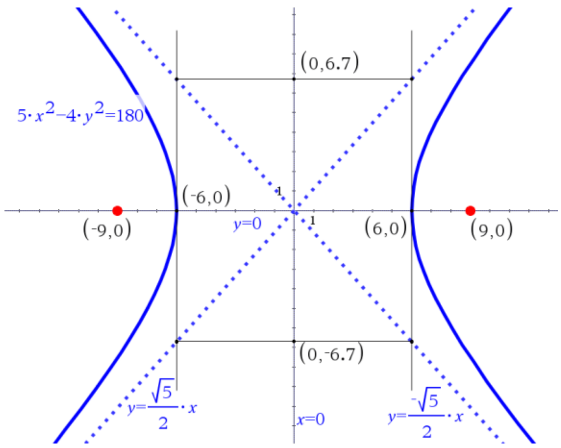
Hier bietet sich die Eingabe als Relation an: *Graphs & Geometry >> Graph Entry/Edit >> Relation*



Rechte Maustaste auf die Parabel / *Analyze Graph / Analyze Conics /* liefert dann die geforderten Koordinaten.

Das Fenster der Hyperbel wird nach Eintragen der Asymptoten konstruktiv ermittelt:

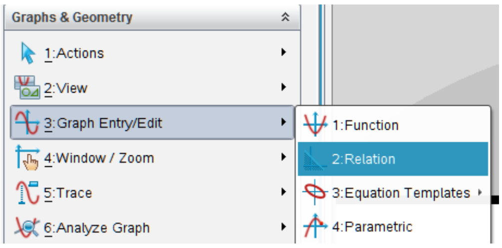
… zunächst zeichnet man die Tangenten an die Kurve in den Hauptscheiteln, dann die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Asymptoten.



Aufgabenstellung 2: Schnitt von Gerade und Hyperbel

Die Schnittpunkte der Geraden g: $2x - y = 6$ mit der Hyperbel $8x^2 - 5y^2 = 108$ sind zu ermitteln.
(Beispiel aus Malle, Woschitz, Koth, Salzger: Mathematik verstehen 7 p 156 Nr 7.113a)

Hier führt die Eingabe von Hyperbel und Geraden wie oben als Relation schnell zum Ziel.

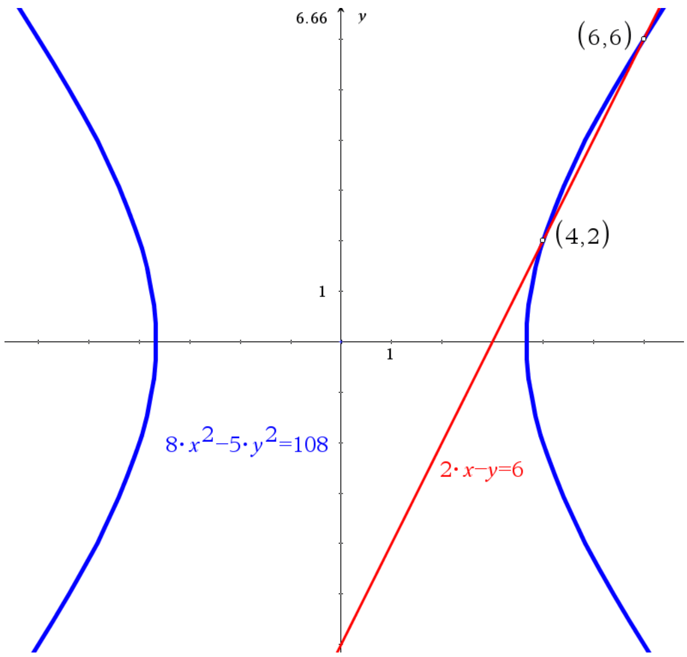


Graph Entry/Edit >> Relation

Das Aufsuchen der Schnittpunkte und Anzeigen der Koordinaten:

Geometry >> Points & Lines >> Intersection Points

Rechtsklick auf die dann angezeigten Schnittpunkte führt zu den Koordinaten: (4/2) und (6/6)



Die zugehörige Rechnung mit Hilfe eines Gleichungssystems könnte mit Technologie so aussehen:

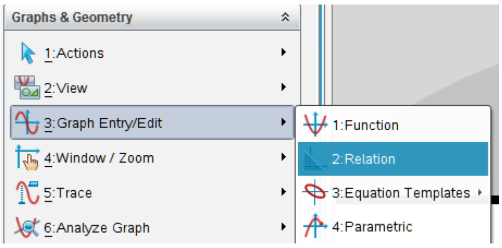
$$\operatorname{solve}\left(\begin{cases} rel1(x,y) \\ rel2(x,y) \end{cases}, x, y\right) \quad x=4 \text{ and } y=2 \text{ or } x=6 \text{ and } y=6$$

Aufgabenstellung 3: Hyperbel und Tangenten

Zeige, dass die Tangente in dem Punkt P(4/3) an die Hyperbel $3x^2 - 2y^2 = 30$ Winkelsymmetrale der geraden PF und PF‘ ist. (Hinweis: Hier geht es hauptsächlich um die Visualisierung dieses Sachverhaltes.)
(Beispiel aus Malle, Woschitz, Koth, Salzger: Mathematik verstehen 7 p 157 Nr 7.120a)

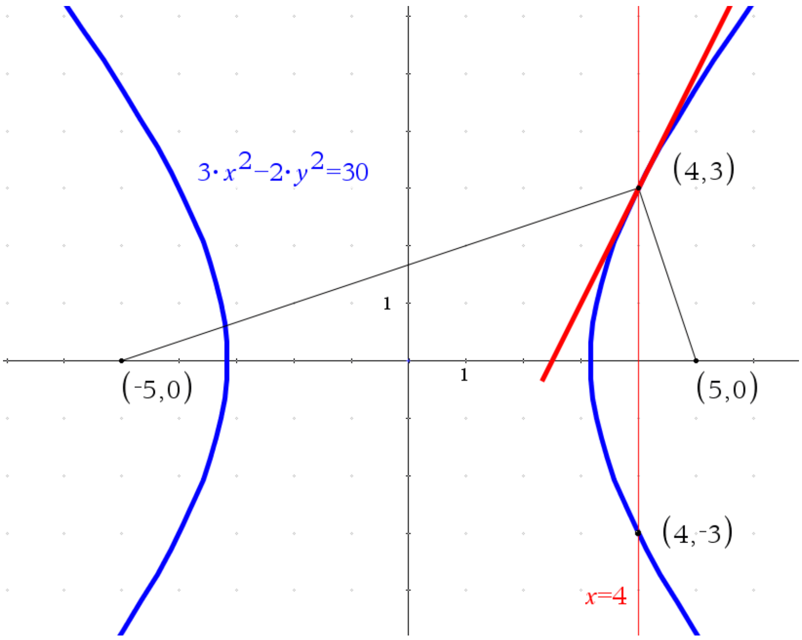
Hier führt die Eingabe der Hyperbel wie oben als Relation schnell zum Ziel.

Graph Entry/Edit >> Relation



Der Punkt könnte durch Schnitt der Geraden x = 4 mit der Hyperbel gefunden werden.

Die Tangente kann dann einfach über *Geometry* >> *Points & Lines* >> *Construction* >>> *Angle Bisector* gefunden werden.



Die zugehörige Rechnung könnte mit Technologie so aussehen:

Eingabe Hyperbel: $\mathbf{hyp}:=\mathbf{rel1}(x,y) \blacktriangleright 3\cdot x^2-2\cdot y^2=30$ $\quad \mathbf{a}:=\sqrt{\frac{30}{3}} \blacktriangleright \sqrt{10}$ $\quad \mathbf{b}:=\sqrt{\frac{30}{2}} \blacktriangleright \sqrt{15}$

Punkt: $\mathbf{px}:=4 \blacktriangleright 4$ $\quad \mathbf{lös}:=\operatorname{solve}\left(\begin{cases}\mathbf{hyp}|x=\mathbf{px}\\ y>0\end{cases},y\right) \blacktriangleright y=3$ $\quad \mathbf{py}:=y|\mathbf{lös} \blacktriangleright 3$ $\quad \mathbf{p}:=\begin{bmatrix}\mathbf{px}\\ \mathbf{py}\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}$

Steigung der Tangente: $\mathbf{ystrich}:=\operatorname{impDif}(\mathbf{hyp},x,y) \blacktriangleright \frac{3\cdot x}{2\cdot y}$ $\quad \mathbf{k}:=\mathbf{ystrich}|x=\mathbf{px} \text{ and } y=\mathbf{py} \blacktriangleright 2$

Tangentengleichung: $\mathbf{tang}:=y=\mathbf{k}\cdot x+d|\mathbf{ddd} \blacktriangleright y=2\cdot x-5$ Richtungsvektor: $\mathbf{rv}:=\begin{bmatrix}1\\ \mathbf{k}\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

Brennpunkte: $\mathbf{e}:=\sqrt{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2} \blacktriangleright 5$ $\mathbf{f1}:=\begin{bmatrix}^-\mathbf{e}\\0\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}^-5\\0\end{bmatrix}$ $f2:=\begin{bmatrix}\mathbf{e}\\0\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$

Vektoren PF1 und PF2: $\mathbf{pf1}:=\mathbf{f1}-\mathbf{p} \blacktriangleright \begin{bmatrix}^-9\\^-3\end{bmatrix}$ $\mathbf{pf2}:=\mathbf{f2}-\mathbf{p} \blacktriangleright \begin{bmatrix}1\\^-3\end{bmatrix}$

Winkel: $\mathbf{w1}:=\text{approx}(\cos^{-1}(\text{dotP}(\text{unitV}(\mathbf{pf1}),\text{unitV}(\mathbf{rv})))) \blacktriangleright 135.$

$\mathbf{w2}:=\text{approx}(\cos^{-1}(\text{dotP}(\text{unitV}(\mathbf{pf2}),\text{unitV}(\mathbf{rv})))) \blacktriangleright 135.$

✂---

Didaktischer Kommentar

Die vorliegenden Aufgaben können mit der Technologie von TI-Nspire auch nur geometrisch gelöst werden. Das reine geometrische Lösen solcher Aufgaben mittels Technologie ist auf jeden Fall hinterfragenswert, bietet sich als Ergänzung zur Rechnung als sinnvolle Visualisierung an.