Thema: **Parameterkurven am Beispiel Bezierkurven 2. Grades**

Franz Schlöglhofer ☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Parameterkurven, Graphs, Eingabe einer Parameterkurve, Vektoren, Länge eines Vektors, Verhältnisse.

Unterrichtsmaterial – Aufgabenstellungen

Mit dem Aufkommen von Computern wurden in den 1960er Jahren mathematische Kurven ein großes Forschungsgebiet. Das Design (CAD) und Umsetzung in robotergesteuerten Fertigungen war ein wichtiges Ziel der Industrie. Grundlagen für Bezierkurven wurden unabhängig voneinander von den Autofirmen Citroen und Renault eingeführt. Ziel war es, gekrümmte Autoteile automatisch fertigen zu lassen. Wir begnügen uns hier mit Bezierkurven 2. Grades. Im Internet gibt es zum Thema viel Literatur. Ein Beispiel ist:

https://de.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zierkurve

Im Punkt 1 werden Eigenschaften der Bezierkurven behandelt. Arbeite diesen Teil durch. Verwende die fertige Datei.

In Punkt 2 gibt es einige Übungsaufgaben.

1) Herleitung der Kurve

Arbeite die folgenden Abschnitte 1a, 1b und 1c durch. Führe die entsprechenden Konstruktionen aus.

1a) Erstes Kennenlernen der Bezierkurve 2.Grades

Verwende die fertige Konstruktion im Fenster 1.1. Die folgenden Abbildungen zeigen das Ergebnis einer Konstruktion.

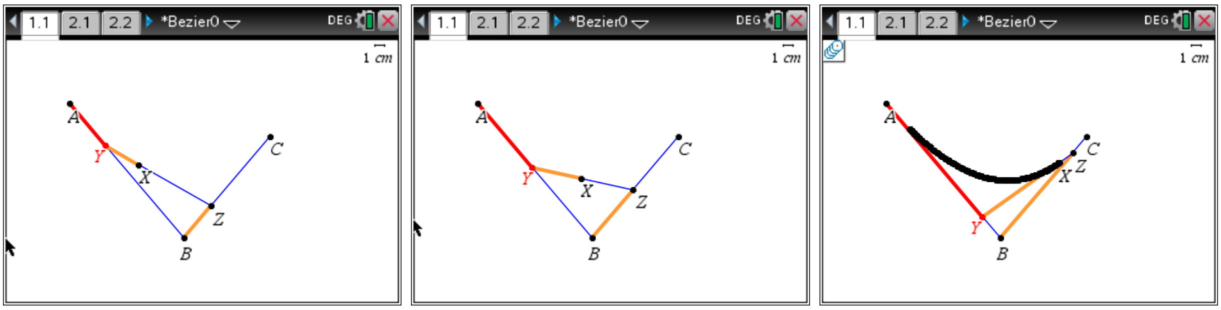
Gegeben sind die drei Punkte A, B, C .... Die beiden Strecken AB und BC werden im selben Verhältnis geteilt, die Verbindungsstrecke der beiden Teilungspunkte wird wieder im selben Verhältnis geteilt.

Der Punkt Y kann auf der Strecke AB zwischen A und B verschoben werden. Über Z wird nun der Punkt X so bewegt, dass die folgenden Streckenlängenverhältnisse stets gleich bleiben:

$$\frac{\overline{AY}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{YX}}{\overline{YZ}} = t$$

Dabei beschreibt der Punkt X eine Kurve, die in der dritten Abbildung /unten) durch die Geometriespur angedeutet ist.

Überlege: Der Parameter t wird 0, wenn der Punkt Y nach A bewegt wird, er wird 1, wenn Y den Punkt B erreicht.



1b) Eine Darstellung der Bezierkurve mit Streudiagramm

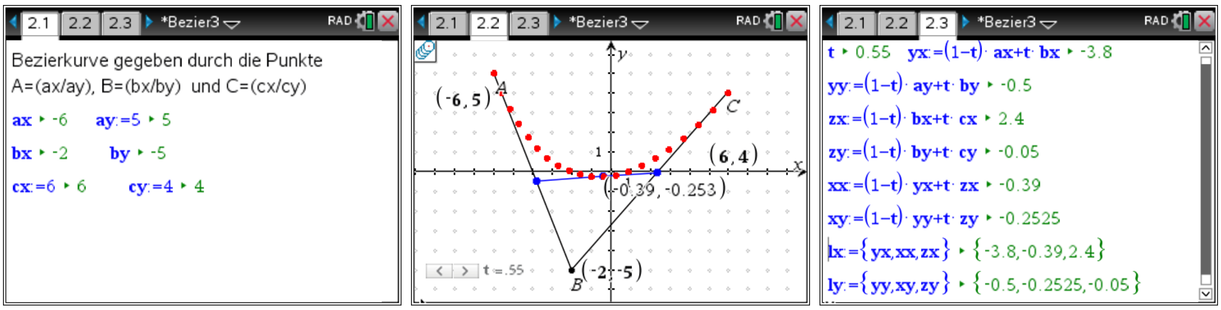
Die Darstellung im Streudiagramm ist eine Ergänzung bis auf die Berechnung des Punktes X in Abhängigkeit von Y und Z. Verwende die fertige Datei.

Es werden die Punkte A, B und C mit dem (linken) NOTES-Fenster verbunden.

Anschließend werden die Punkte Y=(yx/yy), Z=(zx/zy) und X=(xx/xy) berechnet.

$$Y = A + t \cdot \overrightarrow{AB} \;, \qquad Z = B + t \cdot \overrightarrow{BC}$$
$$Y = A + t \cdot B - t \cdot A \;, \quad Z = B + t \cdot C - t \cdot B$$
$$Y = (1-t) \cdot A + t \cdot B \;, \quad Z = (1-t) \cdot B + t \cdot C$$
$$X = (1-t) \cdot Y + t \cdot Z$$

Die Punkte werden im folgenden linken NOTES-Fenster festgelegt, im GRAPHS-Fenster dargestellt, die Berechnung erfolgt im rechten NOTES-Fenster. Die Kurve ist durch ihre Spur gezeichnet worden.



1c) Darstellung der Bezierkurve mit Hilfe der Parameterdarstellung

Durch die folgende Parameterdarstellung können Bezierkurven 2.Grades dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t) = (1-t)^2 \cdot A + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot B + t^2 \cdot C$$

Dabei ist der Parameter t im Intervall $[0;1]$. Diese Formel werden wir im Folgenden herleiten. Arbeite dazu den folgenden Text durch

Herleitung der allgemeinen Formel zur parametrischen Beschreibung der Bezierkurve. (Beginn im ersten Teil Streudiagramm):

$$Y = A + t \cdot \overrightarrow{AB}\ , \qquad Z = B + t \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$Y = A + t \cdot B - t \cdot A\ , \quad Z = B + t \cdot C - t \cdot B$$

$$Y = (1-t) \cdot A + t \cdot B\ , \quad Z = (1-t) \cdot B + t \cdot C$$

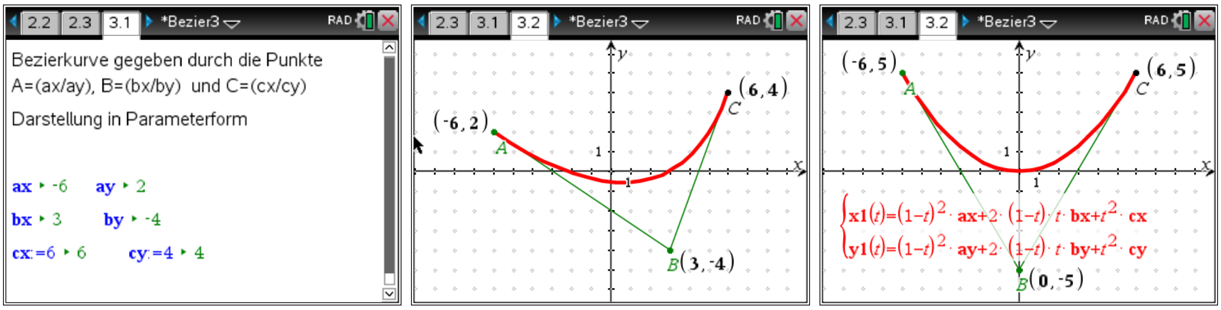
$$X = (1-t) \cdot Y + t \cdot Z$$

$$X = (1-t) \cdot ((1-t) \cdot A + t \cdot B) + t \cdot ((1-t) \cdot B + t \cdot C)$$

$$X = \ (1-t)^2 \cdot A + 2 \cdot t \cdot (1-t) \cdot B + t^2 \cdot C$$

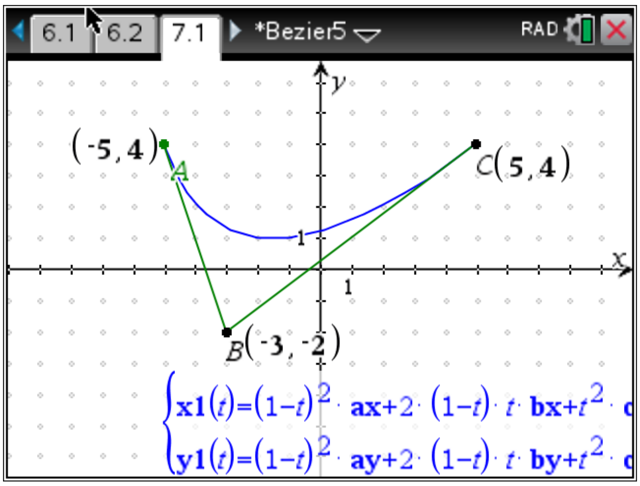
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t) = (1-t)^2 \cdot A + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot B + t^2 \cdot C$$

Mit dieser Darstellung kann man mit Hilfe der Parameterdarstellung eine Bezierkurve zeichnen lassen. Der Parameter ist im Intervall [0;1] . Fertige die Figur anhand der folgenden Darstellungen an.



Es gibt viele Eigenschaften von Bezierkurven, die man behandeln könnte. Z.B. kann man zeigen, dass eine Bezierkurve 2. Grades eine Parabel ist, dass die Geraden AB und BC Tangenten an die Bezierkurve in den Punkten A und C sind usw... Wir begnügen uns aber mit einfachen Kurvendarstellungen mit bestimmten Eigenschaften.

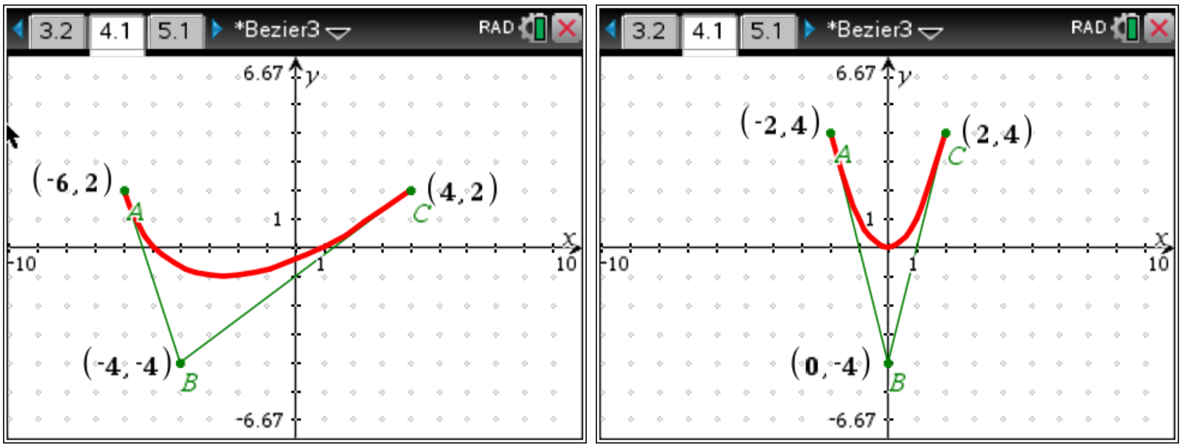
Um gut experimentieren zu können, fertigen wir eine Konstruktion an, bei der die drei Punkte A, B und C am Gitter verschoben werden können. Dabei müssen wir die Koordinaten der Punkte angeben und mit Variablen in die Formel einbinden.



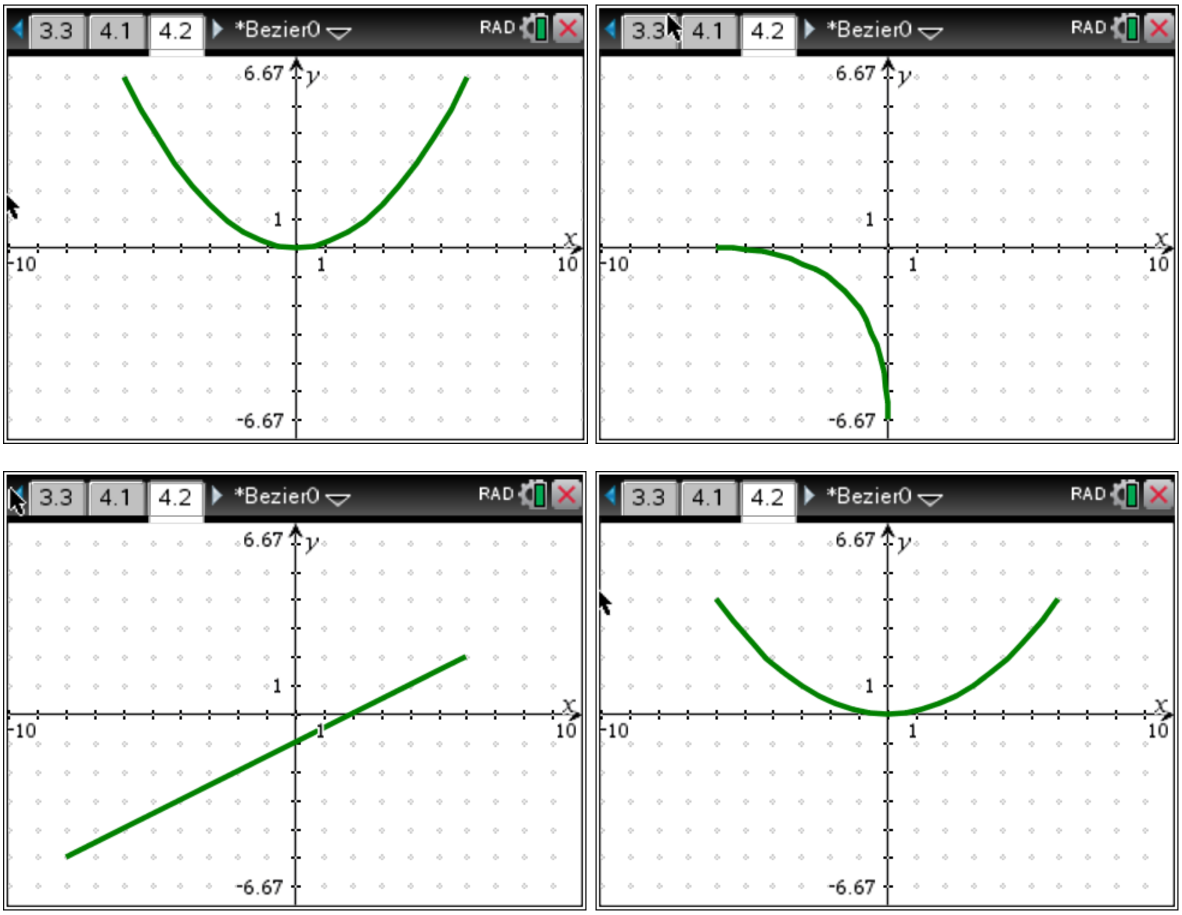
Um die gewünschten Figuren darzustellen, können einfach in der Figur in 7.1 die Punkte verschoben werden. Die Koordinaten und die Kurve werden dann automatisch angepasst.

2) Aufgaben:

2a) Stelle die angegebenen Kurven in der Parameterform dar. Beschreibe, wenn möglich, eine der beiden Kurven durch eine Quadratfunktion. Zeichne diese ein.



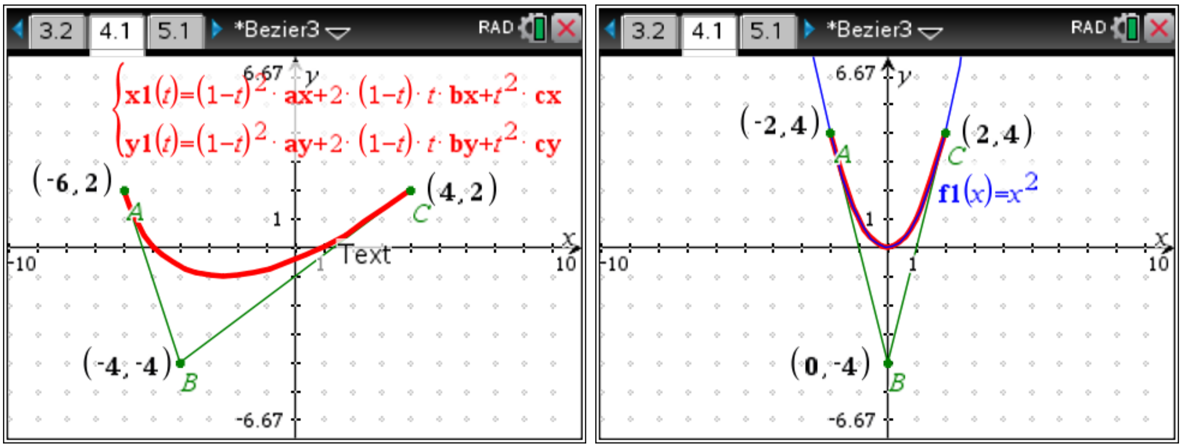
2b) Stelle die Bezierkurven in Parameterform dar, zeichne die Tangenten ein und gib, wenn möglich, eine passende Quadratfunktion an.



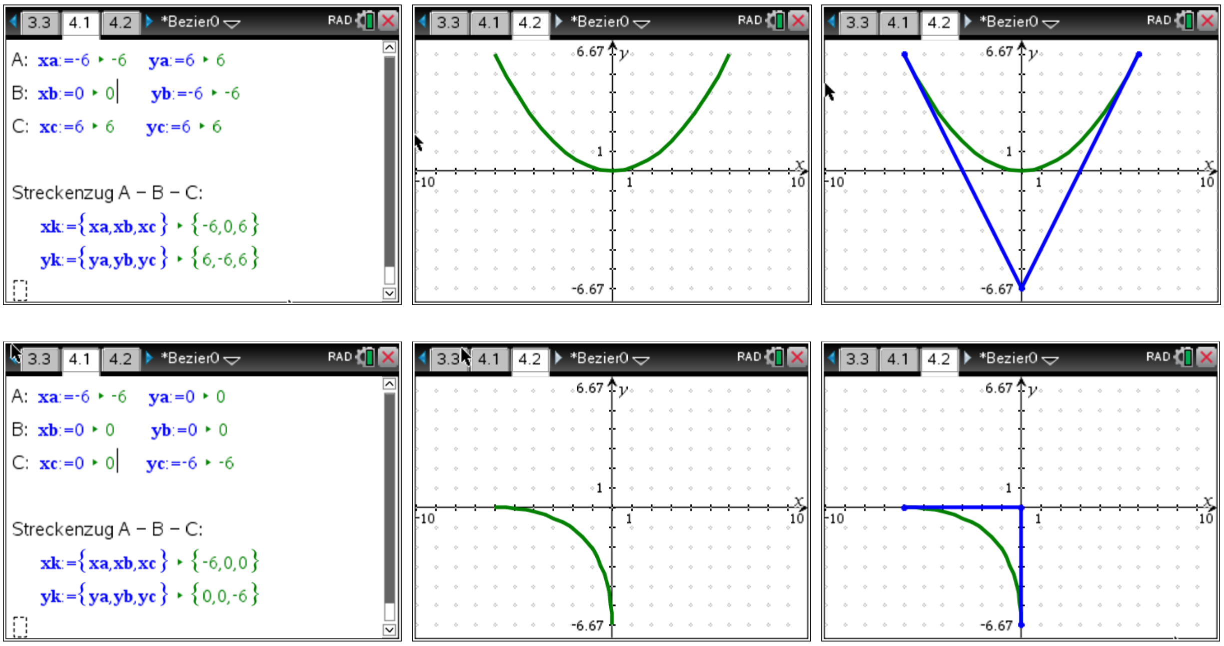
Quelle: klar² – Mathematik 7, Verlag Jugend und Volk, Wien

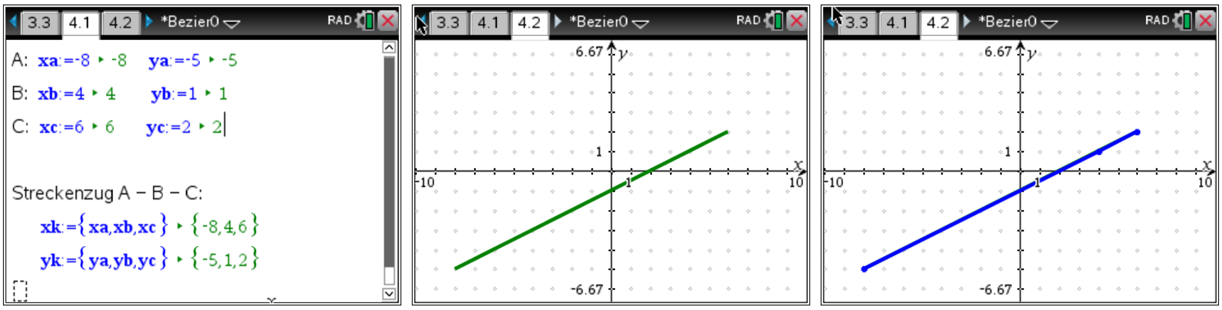
Vorschlag zur Umsetzung

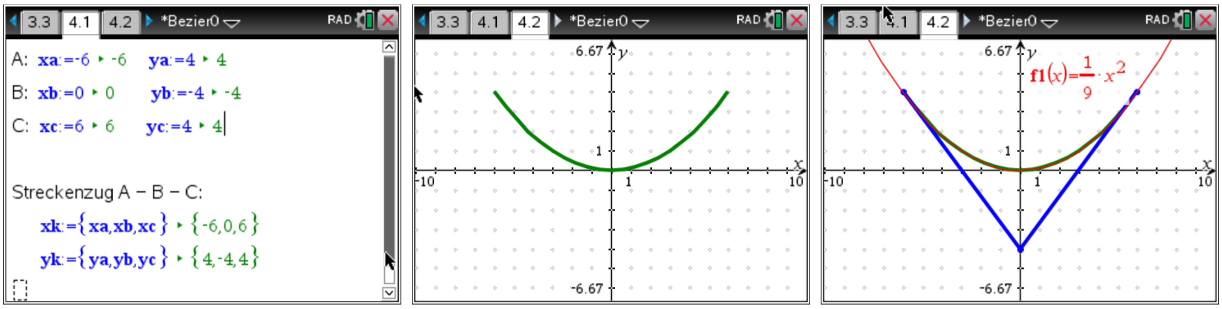
2a)



2b)







Technologiehilfe

Mögliche Einführung der Kurvendarstellung:

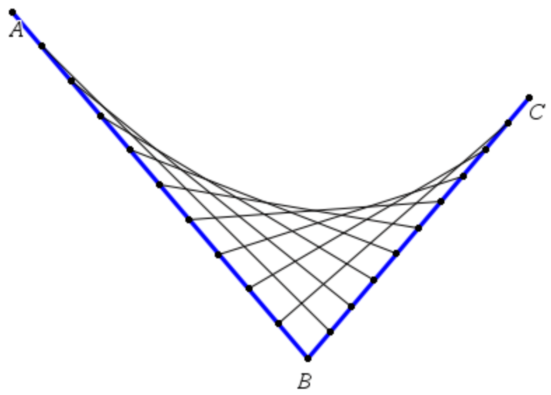
Der maximale Aufbau beinhaltet alle drei Stufen von Aufgabe 1. Wenn Zeit eingespart werden soll, dann könnte der Teil 1b) weggelassen werden. Auch mit 1a), das als fertige Datei vorhanden ist, lassen sich bereits die Grundlagen der Figur visualisieren.

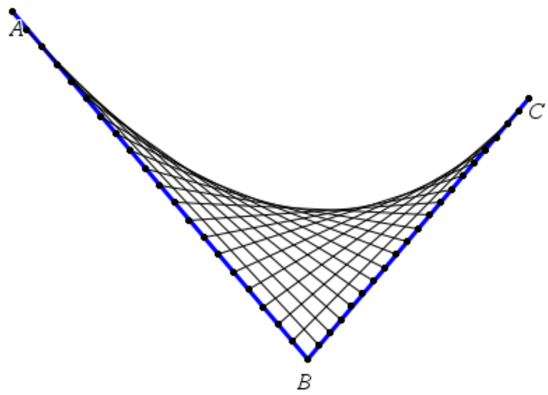
Wenn nur einige Kurven gezeichnet werden sollen und die Eingabe der Parameterdarstellung geübt werden soll, so könnte man sich im Teil 1) mit 1c) begnügen.

Gespeichert sind alle Teile von 1). Fertig verwendet sollten 1a) und 1b). Die anderen Inhalte sollten möglichst selbständig erarbeitet werden.

Ergänzung Fadengrafik:

Als eine Handarbeit werden Figuren in der folgenden Art angefertigt. In ein Brett wurden in regelmäßigen Abständen Nägel geschlagen und wie in der Abbildung dargestellt Gummifäden angebracht.





Jetzt kann man sich die Frage stellen, ob bei einer unendlichen Verfeinerung der Unterteilung die Gesamtheit der geraden Linien eine Kurve bildet mit dem bezeichnenden Namen „Einhül-lende".

Man kann zeigen, dass in diesem Grenzfall eine Bezierkurve 2. Grades (Parabel) gebildet wird. Weiterführende Literatur findet man beispielsweise in:

www.**walser**-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/**Fadengrafik**/**Fadengrafik**.pdf