CAS – Projekt T³ Österreich

Thema: Ellipse - Grundlegendes

Thomas Müller ☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Ellipse, Gärtnerkonstruktion, Parameterdarstellung, Relationsgraph

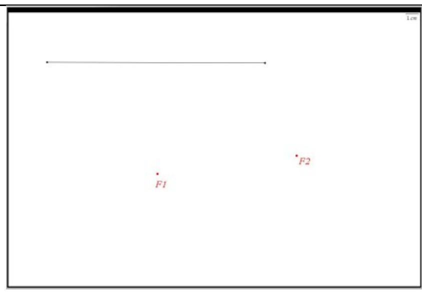
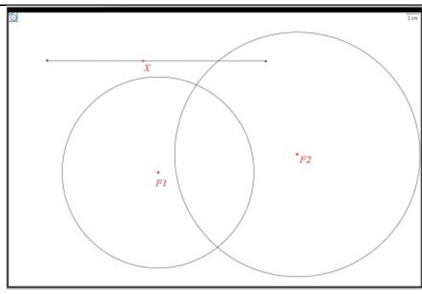
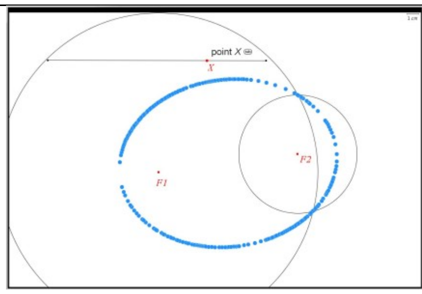
---

Unterrichtssequenz

Bevor lehrplangerechte Aufgaben zu den Kegelschnitten mit Hilfe von Technologie bearbeitet/gelöst werden, scheint es sinnvoll, zunächst einen Ausblick auf die vielfältigen Möglichkeiten von TI-Nspire im Umgang mit diesen Kurven zu geben. Die vorliegenden Schritt-für-Schritt-Anleitungen führen von einer klassischen graphischen Einführung nach der Gärtnerkonstruktion zu einer eleganten Erzeugungsmöglichkeit mit Hilfe der Technologie. Alternativen stellen algebraische experimentelle Herangehensweisen ausgehend von der Parameterdarstellung eines Kreises dar.

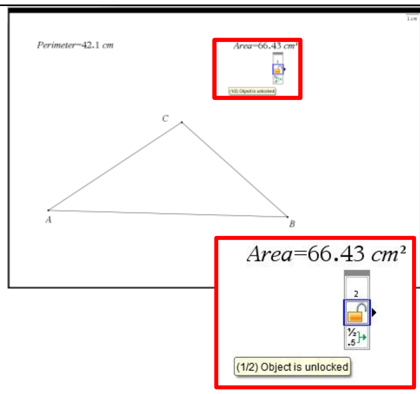
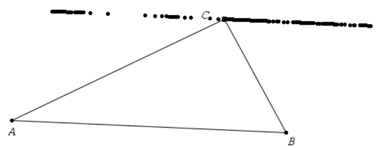
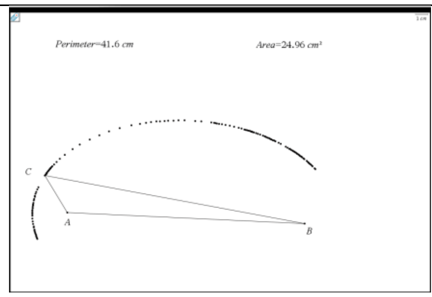
Möglichkeit 1: Gärtnerkonstruktion

Unter einer Ellipse versteht man die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Summe der Abstände von zwei gegebenen Punkten konstant ist.

Geometry-Fenster öffnen: Eine Strecke und zwei Punkte (F1, F2) werden beliebig gewählt. Die Länge der Strecke soll dabei die Abstandssumme der Ellipsenpunkte von F1 und F2 sein. Sie muss größer als die Entfernung von F1 nach F2 sein.	
Auf der Strecke wird nun ein beweglicher Punkt eingezeichnet. Mit Hilfe von *Construction / Compass* kann nun ein Kreis, dessen Radius gleich der Streckenlänge vom Anfangspunkt bis zum beweglichen Punkt X ist um F1 gezeichnet werden. Analog für einen Kreis um F2 mit dem Radius vom Endpunkt der Strecke bis zum Punkt X.	
Das Bewegen des Punktes X bewirkt nun eine stetige Vergrößerung/Verkleinerung der Kreisradien, aber stets so, dass die Summe der Radien gleich der gesamten Streckenlänge ist. Nun muss nur noch die Spur der Schnittpunkte der beiden Kreise dargestellt werden. (G*eometry Trace*)	

Möglichkeit 2: Dreieck – Konstanz des Flächeninhalts und des Umfangs

Mit Hilfe von Nspire lassen sich bei Zeichnungen bestimmte Größen, wie Umfang oder Flächeninhalt sperren, sodass sie konstant bleiben. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit einer neuen Herangehensweise an die Ellipse. Sperrt man nämlich bei einem Dreieck ABC den Umfang und bewegt einen Eckpunkt (z.B. C), so muss dann wegen der unveränderten Länge von AB die Summe der Abstände AC und BC konstant bleiben. Dies bedeutet, dass C lediglich entlang einer Ellipse (nach der Gärtnerkonstruktion) bewegt werden kann. Bei der dargestellten Sequenz wird zunächst der Flächeninhalt gesperrt, sodass der Punkt C lediglich auf einer Parallelen zu AB geführt werden kann (warum?).

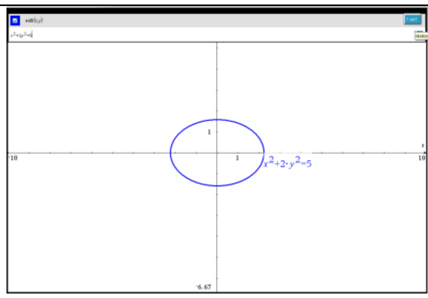
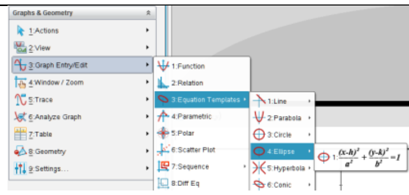
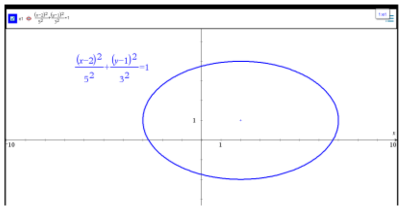
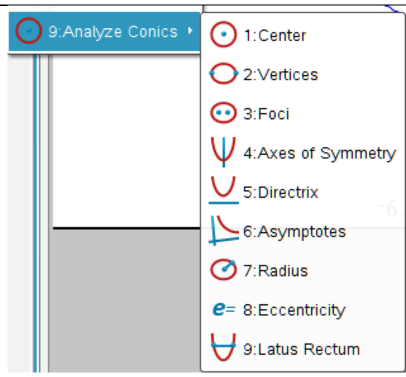
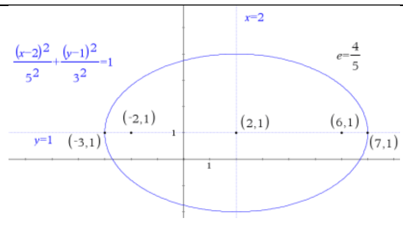
Geometry-Fenster öffnen: Von einem beliebigen Dreieck ABC wird der Umfang (*perimeter*) und der Flächeninhalt (*area*) mit Hilfe von Rechter *Maustaste / Measurement (→ Length oder → Area*) angezeigt. Das Bewegen der Eckpunkte, z.B. von C, führt zu einer laufenden Veränderung von U und A. Rechte Maustaste auf den angezeigten Flächeninhalt liefert im *Attributes*-Menüpunkt die Möglichkeit, durch Klick auf das (offene) Schloss den Betrag zu sperren: Danach kann jeder Dreieckseckpunkt nur noch so bewegt werden, dass der Flächeninhalt konstant bleibt. Anzeigen der Spur (*Geometry Trace*) liefert bekanntermaßen eine Gerade, da bei Flächenkonstanz ja die Höhe bei gleicher Basislänge konstant bleibt.	 
Nach Entsperren des Flächenbetrags kann analog zu vorhin der Umfang konstant gehalten werden. Da die Seite von A nach B unberührt bleibt, bleibt eigentlich die Summe der sich verändernden Abstände des Punktes C von A und B konstant. Dies entspricht wiederum der Gärtnerkonstruktion (vgl. Möglichkeit 1).	

Mögliche Vorgehensweise im Unterricht:
Ausgehend vom Dreieck könnte die eine Hälfte der SuS den Flächeninhalt, die andere Hälfte den Umfang sperren. Vor Beginn sollten die SuS eine Vermutung aufstellen. Diese Vermutung mit dem tatsächlichen Ergebnis zu vergleichen und das Ergebnis mathematisch zu begründen ergibt eine interessante Möglichkeit für selbstentdeckendes Lernen.

T³ ÖSTERREICH

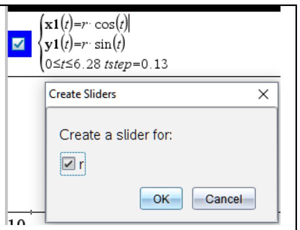
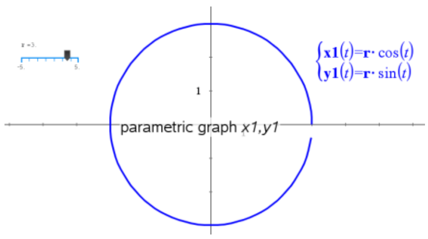
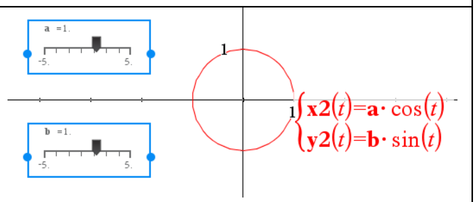
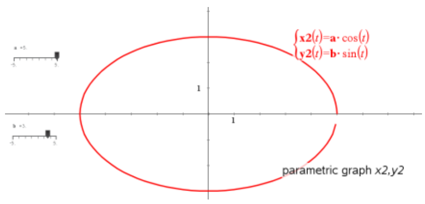
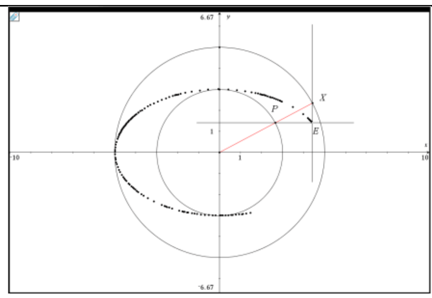
Möglichkeit 3: Die Ellipse als Graph einer Relation

Da eine Ellipse nicht als *Funktion* einer Variablen x gezeichnet werden kann (manchen x-Werten wird ja kein y-Wert, manchen wieder zwei y-Werte zugeordnet), muss im *Graphs-Fenster* unter den Eingabebefehlen bei *Graph Entry/Edit* die Anweisung *Relation* gewählt werden.

Graphs-Fenster >> Graph Entry/Edit >> Relation Eingabe z.B. $x^2+2y^2=5$ liefert eine Ellipse.	
Unter *Equation Templates* findet man die Möglichkeit direkt die Angabeparameter für die Ellipse (und die anderen Kegelschnitte) einzugeben: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ Die Gleichung legt eine Ellipse mit Haupt-und Nebenachse parallel zu den Koordinatenachsen x und y fest. Dabei bedeuten in der vorgegebenen Gleichung (h/k) die Koordinaten des Mittelpunkts und a und b die Haupt-und Nebenachsenlängen.	 
Der Vorteil dieser Eingabe ist die Möglichkeit der Verwendung des Analysebefehls für Graphen. Unter *Analyze Graph* gibt es einen eigenen Menüpunkt Kegelschnitte zu analysieren: *Analyze Conics*. So lassen sich die Koordinaten der Brennpunkte, der Scheitel und vieles mehr auslesen.	
Die Analyse der gezeichneten Ellipse nach Scheitel, Symmetrieachsen, Brennpunkten und Exzentrizität liefert nebenstehendes Ergebnis.	

Möglichkeit 4: Die Ellipse in Parameterform

Wenn von der bekannten Parameterdarstellung eines Kreises [x(t) = r cos t, y(t) = r sin t] ausgegangen wird, so ergibt sich mit Hilfe der Technologie ein interessantes Experimentierfeld für die SuS: *Was passiert, wenn statt des gleichen r-Wertes in der x(t) und y(t)-Gleichung unterschiedliche Werte eingesetzt werden?*

Graphs-Fenster >> Graph Entry/Edit >> Parametric Schritt 1: Erfolgt im Parameterfenster die Eingabe allgemein mit r statt einer fixen Zahl, so bietet TI-Nspire die automatische Erzeugung eines Schiebreglers an. So kann die Größe des Kreises verändert werden. Die automatische Erzeugung des Schiebereglers bietet auch negative Zahlen für den Radius an. Dies kann wiederum Anstoß für einen Diskussionsprozess sein: *Was bedeutet in dieser Parameterdarstellung ein negativer Wert für den Radius?*	 
Schritt 2: Nun wird für x(t) = a cos(t) und für y(t) = b sin(t) eingegeben. TI-Nspire bietet die Erzeugung von zwei Schiebereglern an. Experimentieren mit diesen Schieberegeln läßt die Bedeutung der Werte für a und b erkennen. Diese Konstruktion kann auf einfache Weise geometrisch interpretiert und konstruktiv umgesetzt werden:	 
Denn die Parameterdarstellung entsteht durch Kombination der x-Komponente aus der Parameterdarstellung eines Kreises mit Radius a (großer Kreis) und der y-Komponente eines Kreises mit Radius b (kleiner Kreis). In der dargestellten Zweikreiskonstruktion entstehen die Ellipsenpunkte als Spur des Schnittpunktes der horizontalen und lotrechten Geraden aus den Kreispunkten des großen und kleinen Kreises („Scheitelkreise"). Diese Konstruktion ist auch unter dem Namen PROKLUS-Konstruktion oder Zweikreiskonstruktion der Ellipse bekannt.	

✂---

Didaktischer Kommentar

Die vorliegende Beschreibung kann den SuS im Sinne des konstruktivistischen Lehr-Lernparadigmas zum Selbststudium gegeben werden. Die LP steht zur Beratung bereit.

Technologiehilfe

- Einschalten der Geometriespur:
  Rechte Maustaste auf den Punkt, dessen Spur gezeichnet werden soll, dann *Geometry Trace* wählen
- Löschen der Geometriespur:
  Rechte Maustaste auf Spur, dann *Erase Geometry Trace* wählen