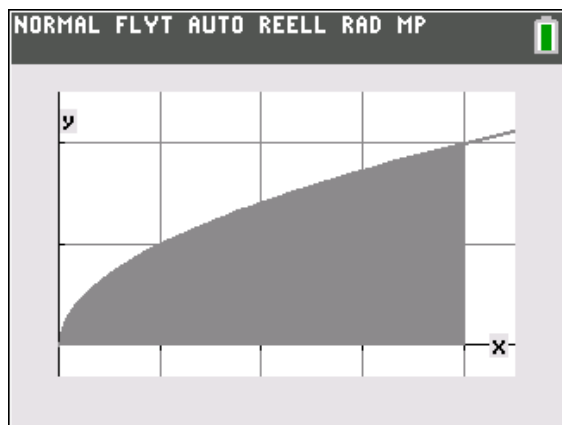


Hur går räknarens integralberäkning till?

I denna aktivitet ska vi visa hur man med räknaren kan beräkna integraler numeriskt utan att använda den inbyggda funktionen **fnInt**. Där används en ganska sofistikerad metod men i denna aktivitet så får man en uppfattning om hur det i princip går till. Vi visar här en metod där du känner till den primitiva funktionen så att vi kan jämföra resultatet med den exakta beräkningen.

Anta att vi ska beräkna integralen

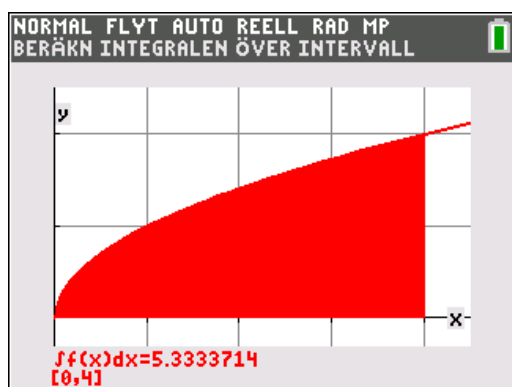
$$\int_0^4 \sqrt{x} dx$$



Exakt beräkning ger

$$\int_0^4 \sqrt{x} dx = \left[\frac{\frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \left(\frac{\frac{3}{2} \cdot 4^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 0 \right) = \frac{8}{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3} \approx 5,333$$

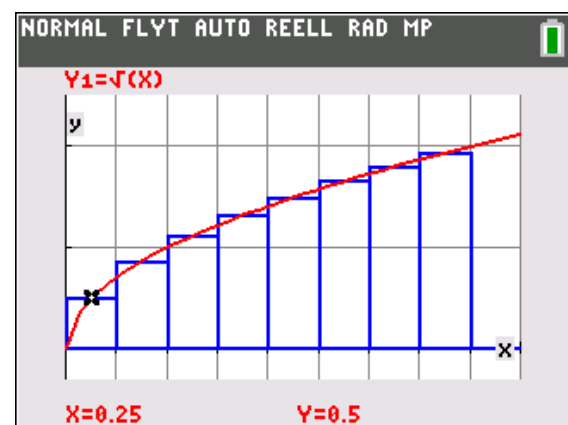
Räknarens inbyggda funktion ger följande resultat. Vi har alltså plottat funktionen och sedan tryckt på **[2nd][calc]** och valt 7: $\int f(x)dx$.



Vi får resultatet 5,333 här också. Den inbyggda metoden ger alltså ett mycket bra resultat.

Hur kan man nu beräkna arean under kurvan utan att känna till denna funktion. Vi får tänka oss att vi har en komplicerad funktion där vi inte kan beräkna den primitiva funktionen.

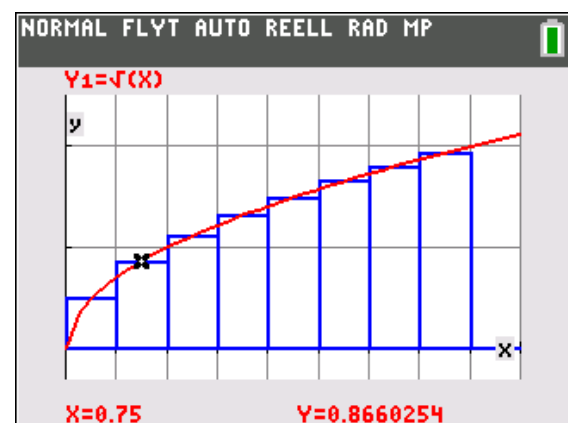
Om man låter arean under kurvan bestå av ett antal rektanglar enligt figuren nedan och kommer på en metod att summera arean av dessa rektanglar så borde man kunna få ett bra resultat.



Titta på bilden ovan. Vi har ett antal rektanglar där basen har en bredd på 0,5. Hela intervallet består av 8 rektanglar. Arean av den första rektangeln är här 0,5 gånger funktionsvärdet i mitten, dvs 0,5 ($\sqrt{0,25} = 0,5$).

Den första rektangeln har då arean $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$.

Den andra rektangeln har sin mittpunkt vid x-värdet 0,75 och rektangelns höjd är $\sqrt{0,75} \approx 0,866$. Arean blir $0,866 \cdot 0,5 \approx 0,433$.



Så här kan man fortsätta och sedan summera areorna av de olika rektanglarna men det blir ganska mödosamt. Kanske kan vi ta funktioner hos räknaren till hjälp?

Gå nu till statistikeditorn hos räknaren och mata in *mittpunkterna* hos basen i de 8 rektanglarna.

| L1 | L2 | L3 | L4 | L5 | 3 |
|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| 0.25 | ----- | ----- | ----- | ----- | |
| 0.75 | | | | | |
| 1.25 | | | | | |
| 1.75 | | | | | |
| 2.25 | | | | | |
| 2.75 | | | | | |
| 3.25 | | | | | |
| 3.75 | | | | | |
| ----- | | | | | |

L3(1)=

I lista L2 ska vi nu beräkna funktionsvärdet i dessa mittpunkter. Funktionen ligger lagrad i Y1. Skriv in formeln i kolumnhuvudet i listan. Den beräknar ju arean av varje rektangel. Basen är ju 0,5 och höjden ges av funktionsvärdet i mitten.
För att infoga Y1 i formeln trycker du på tangenten `[vars]`, väljer Y-VAR och sedan 1:Funktion. Markera Y1 i listan med funktioner och tryck på `[enter]`. Nu infogas Y1 i formeln. Y1(L1) betyder att funktionsvärdet för \sqrt{x} beräknas för alla värden i lista L1

| L1 | L2 | L3 | L4 | L5 | 2 |
|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| 0.25 | ----- | ----- | ----- | ----- | |
| 0.75 | | | | | |
| 1.25 | | | | | |
| 1.75 | | | | | |
| 2.25 | | | | | |
| 2.75 | | | | | |
| 3.25 | | | | | |
| 3.75 | | | | | |
| ----- | | | | | |

L2=Y1(L1)

Tryck nu på `[enter]`.

| L1 | L2 | L3 | L4 | L5 | 3 |
|-------|--------|-------|-------|-------|---|
| 0.25 | 0.5 | ----- | ----- | ----- | |
| 0.75 | 0.866 | | | | |
| 1.25 | 1.118 | | | | |
| 1.75 | 1.3229 | | | | |
| 2.25 | 1.5 | | | | |
| 2.75 | 1.6583 | | | | |
| 3.25 | 1.8028 | | | | |
| 3.75 | 1.9365 | | | | |
| ----- | ----- | | | | |

L3(1)=

Så här blir resultatet. Vi får funktionsvärdena i mitten av 8 rektanglarna beräknade.

Nu ska vi beräkna arean och varje rektangel och sedan summera dessa värden. Placera markören på första raden i lista L3. Tryck sedan `[2nd][list]`. Då får vi tillgång till ett antal beräkningsfunktioner för statistik. Välj alternativet MA (står för MATEMATIK). Se nedan.

| L1 | L2 | L3 | L4 | L5 | 2 |
|-------|--------|--------|-------|-------|---|
| 0.25 | 0.25 | 5.3523 | ----- | ----- | |
| 0.75 | 0.433 | | | | |
| 1.25 | 0.559 | | | | |
| 1.75 | 0.6614 | | | | |
| 2.25 | 0.75 | | | | |
| 2.75 | 0.8292 | | | | |
| 3.25 | 0.9014 | | | | |
| 3.75 | 0.9682 | | | | |
| ----- | ----- | | | | |

L3(2)=

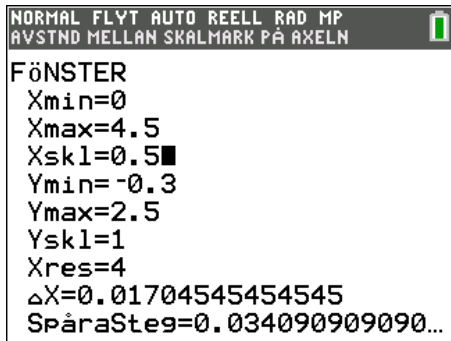
Välj nu 5:sum som beräknar summan av tal i listor och skriv sedan `sum(L2*0.5)` och tryck på `[enter]`. Vi får den totala arean av rektanglarna beräknad.

| L1 | L2 | L3 | L4 | L5 | 3 |
|-------|--------|--------|-------|-------|---|
| 0.25 | 0.25 | 5.3523 | ----- | ----- | |
| 0.75 | 0.433 | | | | |
| 1.25 | 0.559 | | | | |
| 1.75 | 0.6614 | | | | |
| 2.25 | 0.75 | | | | |
| 2.75 | 0.8292 | | | | |
| 3.25 | 0.9014 | | | | |
| 3.75 | 0.9682 | | | | |
| ----- | ----- | | | | |

L3(2)=

Ett ganska bra resultat. Kan vi få ett ännu bättre värde?

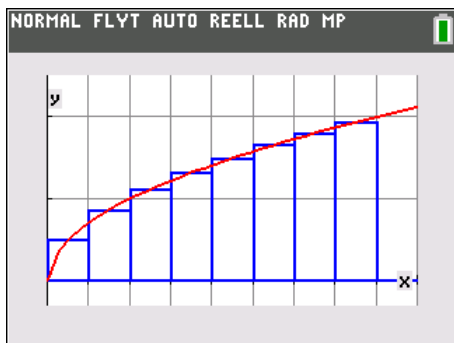
Först vill dock rita ett stapeldiagram med rektanglarna. Först ställer vi fönstret enligt följande. Det viktiga här är att Xskl ska ha värdet 0,5 för att vi ska få diagrammet korrekt. Varje stapel (rektangel) ska ha bredden 0,5.



Tryck då på [2nd][stat plot] för att göra diagram-inställningar. Man kan rita tre olika diagram samtidigt om man vill. Välj Diagram 1 och ställ in enligt följande.



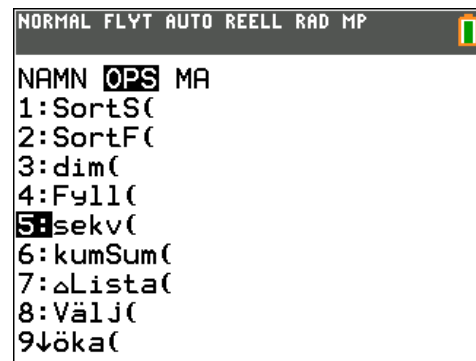
Nu kan vi plotta både funktion och diagram samtidigt.



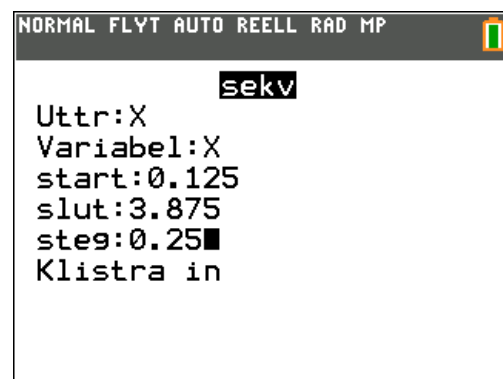
Den totala arean av rektanglarna är alltså 5,3523. För att få ett ännu bättre resultat så måste vi ha fler rektanglar. Vi väljer att ha rektanglar med bredden 0,25, dvs. vi halverar bredden. Då blir det totalt 16 rektanglar.

Då blir mittpunkterna 0,125, 0,375 osv. Det blir jobbigt att skriva in 16 värden men räknaren har en lösning på detta också. Vi skapar då en följd av tal med första talet 0,125 och där värdet ökar med 0,25 för varje tal.

Placera markören i kolumnhuvudet i lista L4 och tryck på [2nd][list] och välj OPS (står för OPTIONS) och välj alternativ 5 sekv.



Se till att du har alternativet STAT-GUIDER i läget PÅ. Tryck på tangenten [mode] för att göra inställningen. Det gör det lättare att på mata in olika parametrar. Tryck på [enter] och fyll i enligt nedan:



Markera Klistra in och tryck nu på [enter] igen. Nu placeras hela formeln på statistikeditorns inmatningsrad. Tryck på [enter].

| L2 | L3 | L4 | L5 | L6 | 4 |
|--------------------------------|--------|-------|-------|-------|---|
| 0.5 | 5.3523 | ----- | ----- | ----- | |
| 0.866 | ----- | | | | |
| 1.118 | | | | | |
| 1.3229 | | | | | |
| 1.5 | | | | | |
| 1.6583 | | | | | |
| 1.8028 | | | | | |
| 1.9365 | | | | | |
| ----- | | | | | |
| L4= (X, X, 0.125, 3.875, 0.25) | | | | | |

| L2 | L3 | L4 | L5 | L6 | |
|--------|--------|-------|-------|-------|--|
| 0.5 | 5.3523 | 0.125 | ----- | ----- | |
| 0.866 | ----- | 0.375 | | | |
| 1.118 | | 0.625 | | | |
| 1.3229 | | 0.875 | | | |
| 1.5 | | 1.125 | | | |
| 1.6583 | | 1.375 | | | |
| 1.8028 | | 1.625 | | | |
| 1.9365 | | 1.875 | | | |
| ----- | | 2.125 | | | |
| | | 2.375 | | | |
| | | 2.625 | | | |

L4(1)=0.125

Nu kommer alla värden för mittpunkterna i lista L4. Nu gör vi på samma sätt som tidigare, dvs. beräknar funktionsvärdena i dessa mittpunkter.

| L2 | L3 | L4 | L5 | L6 | |
|--------|--------|-------|-------|-------|--|
| 0.5 | 5.3523 | 0.125 | ----- | ----- | |
| 0.866 | ----- | 0.375 | | | |
| 1.118 | | 0.625 | | | |
| 1.3229 | | 0.875 | | | |
| 1.5 | | 1.125 | | | |
| 1.6583 | | 1.375 | | | |
| 1.8028 | | 1.625 | | | |
| 1.9365 | | 1.875 | | | |
| ----- | | 2.125 | | | |
| | | 2.375 | | | |
| | | 2.625 | | | |

L5=Y1(L4) █

Sedan beräknar vi med formeln sum(L5*0,25) den totala arean. Vi kommer nu lite närmare det riktiga värdet 5,333.

| L2 | L3 | L4 | L5 | L6 | |
|--------|--------|-------|--------|--------|--|
| 0.5 | 5.3523 | 0.125 | 0.3536 | 5.3403 | |
| 0.866 | ----- | 0.375 | 0.6124 | ----- | |
| 1.118 | | 0.625 | 0.7906 | | |
| 1.3229 | | 0.875 | 0.9354 | | |
| 1.5 | | 1.125 | 1.0607 | | |
| 1.6583 | | 1.375 | 1.1726 | | |
| 1.8028 | | 1.625 | 1.2748 | | |
| 1.9365 | | 1.875 | 1.3693 | | |
| ----- | | 2.125 | 1.4577 | | |
| | | 2.375 | 1.5411 | | |
| | | 2.625 | 1.6202 | | |

L6(2)=

För att rita stapeldiagrammet för de dessa beräkningar ställer vi in enligt nedan:

```

NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP
Dia91 Dia92 Dia93
Pā Av
Skriv: [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]
Xlista :L4
Frekv :L5
Färg : BLÅ

```

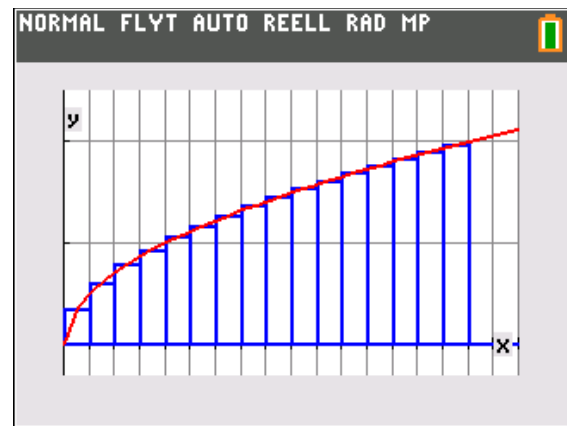
Om vi sedan ändrar Xskl till 0,25 i fönsterinställningarna

```

NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP
AVSTND MELLAN SKALMARK PÅ AXELN
FÖNSTER
Xmin=0
Xmax=4.5
Xskl=0.25 █
Ymin=-0.3
Ymax=2.5
Yskl=1
Xres=4
ΔX=0.01704545454545
SpåraStep=0.034090909090...

```

så får vi följande diagram:



Vi kryper alltså närmare det exakta värdet ju fler rektanglar vi har.

Pröva nu med några andra enklare funktioner. Jämför sedan med det exakta värdet och det värde man får med räknarens inbyggda numeriska metod.