# LA MÉTHODE DE CARDAN

Auteur : Christian Vassard

**TI-83 Premium CE**

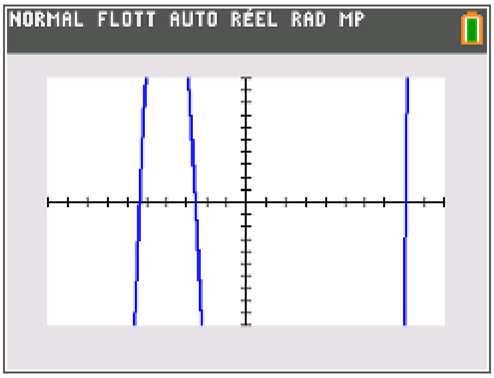
**Fichiers associés :** formule de Cardan_eleve.pdf, CARDAN.8xp, CARDAN2.8xp, CARDAN3.8xp

## 1. Objectifs

- Comprendre les problèmes calculatoires qui ont poussé les algébristes de la Renaissance Italienne à introduire des nombres « imaginaires ».
- Étudier à l'aide de la formule établie par Cardan la résolution des équations de degré 3 de la forme $x^3 = px + q$, avec $p$ et $q$ réels.
- Écrire un algorithme de résolution générale des équations de degré 3 de cette forme.

## 2. Première étape : résoudre une équation simple de degré 3

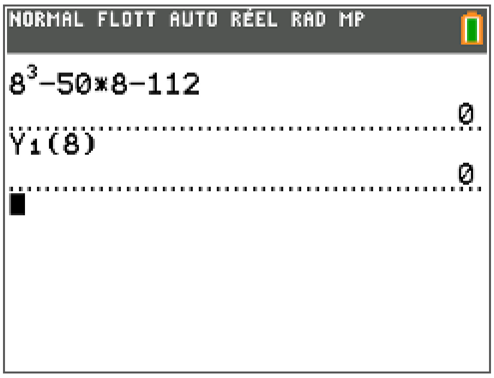
**1)** Dans un passé pas si ancien, les solutions évidentes étaient celles que l'on pouvait calculer de tête : 1 ou –1, 2 ou –2 pour les plus courageux… et c'était tout. À notre époque, la calculatrice peut suggérer des racines évidentes plus variées. Traçons sur l'écran de la calculatrice (avec un zoom standard) la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 50x - 112$ :




D'après le graphique, il semble bien que $\alpha = 8$ soit solution de l'équation $f(x) = 0$. Les deux autres solutions ne sont pas des nombres entiers. Une fois que cette solution entière est suggérée, il est facile de vérifier qu'elle convient.

En effet : $f(8) = 8^3 - 50 \times 8 + 112 = 0$

comme le montre la calculatrice :



**2)** On écrit alors :

$$x^3-50x-112=(x-8)(x^2+ax+b).$$

Cette égalité équivaut à :

$$x^3-50x-112=x^3+ax^2+bx-8x^2-8ax-8b$$
$$x^3-50x-112=x^3+(a-8)x^2+(b-8a)x-8b$$

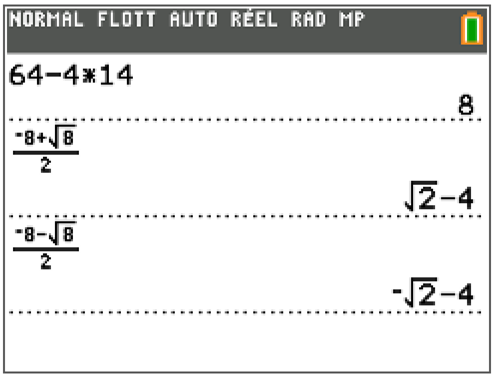
Égalité qui doit avoir lieu pour tout $x$ réel. On procède alors par identification. L'égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} a-8=0 \\ b-8a=-50 \\ -8b=-112 \end{cases}$$ d'où l'on tire $a = 8$, $b = 14$.

En conclusion, on a, pour tout $x$ réel :

$$x^3-50x-112=(x-8)(x^2+8x+14).$$

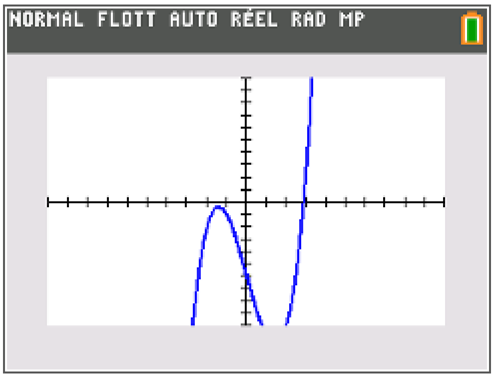
**3)** L'équation équivaut à $f(x) = 0$ soit $x-8=0$ ou $x^2+8x+14=0$.
La deuxième équation a un discriminant égal à $64 - 4 \times 14 = 8$. Les solutions sont données par la calculatrice, si on le souhaite de façon exacte :

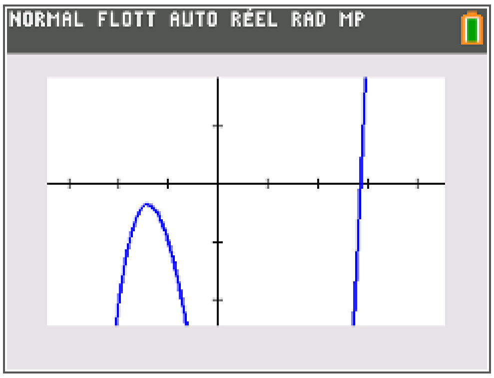



Finalement, l'équation ($E_1$) possède donc trois solutions : $8, \sqrt{2}-4, -\sqrt{2}-4$.
Remarquons que le fait d'avoir pu déterminer une solution évidente de l'équation du troisième degré en a permis la résolution complète par factorisation.

## 3. Deuxième étape : la méthode de Cardan

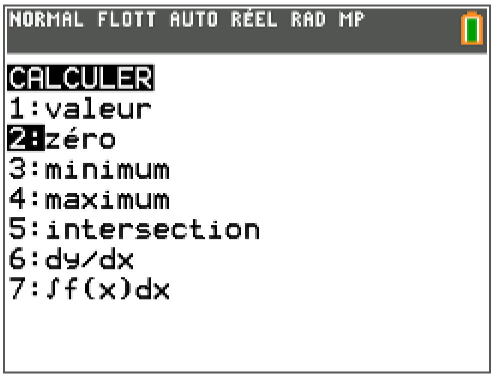
**1)** C'est encore la représentation graphique de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-6x-6$ qui va nous donner le nombre de solutions de l'équation ($E_2$). Voici ce que l'on obtient, à gauche après un zoom standard et à droite après un zoom Cadre.

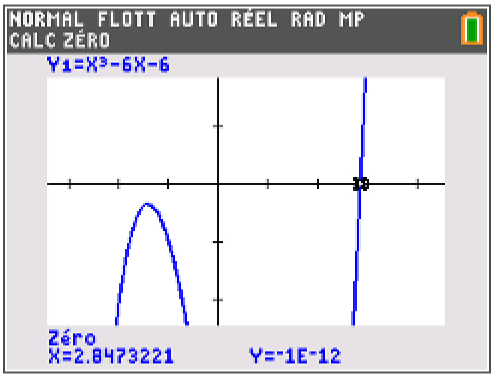



Il semble bien que l'équation possède une solution et une seule mais elle n'est pas entière car comprise entre 2 et 3.

On sait qu'une valeur approchée peut être obtenue avec [2nde] [trace] (soit [calculs]) :



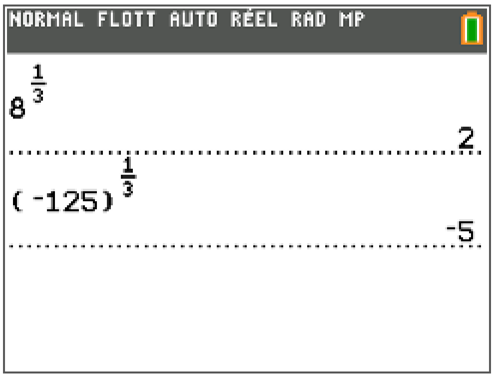




**2) a)** La fonction cube est continue strictement croissante sur ℝ. Par conséquent, si $a$ est un nombre réel quelconque, positif ou négatif, l'équation $x^3 = a$ possède une solution et une seule, que l'on note $\sqrt[3]{a}$ .

On sait que $2^3 = 8$ : 2 est donc la seule solution de l'équation $x^3 = 8$. On peut écrire $\sqrt[3]{8} = 2$, sans aucune ambiguïté .

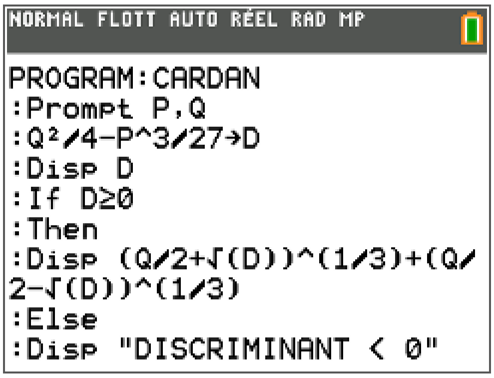
De même comme $(-5)^3 = -125$, on en déduit que $\sqrt[3]{-125} = -5$.

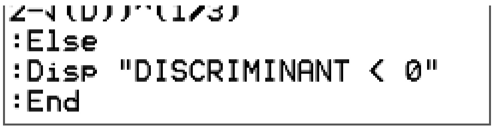
La calculatrice donne évidemment ces résultats :




**b)** Le calcul peut être mené à la condition que le discriminant de l'équation soit positif ou nul.

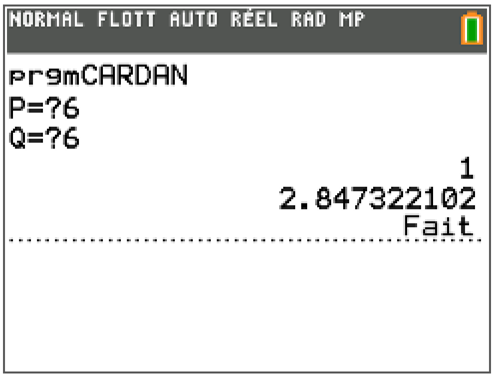
**c)** Le programme peut être le suivant :

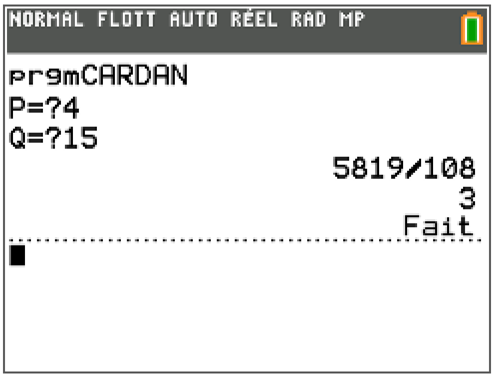


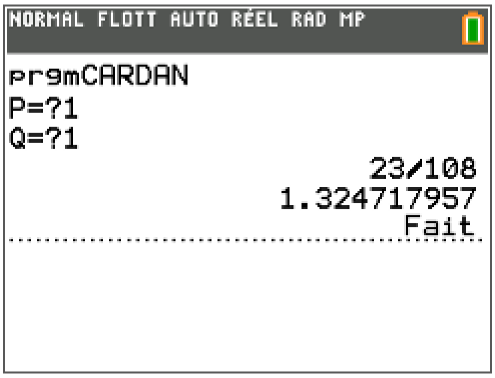



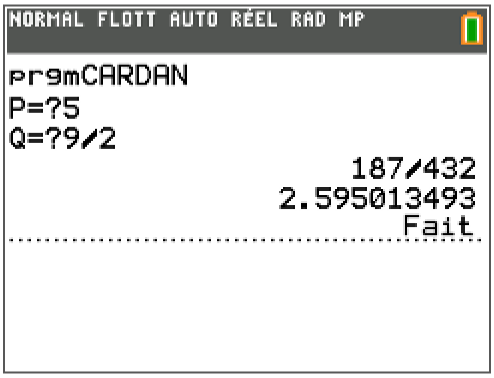

Il consiste essentiellement, après avoir calculé puis affiché le discriminant, à renvoyer le résultat de la formule de Cardan quand le discriminant est positif ou nul et un message dans le cas contraire. Toutes les fractions ont été écrites en mode exact avec [n/d] (ou [alpha] [f(x)]) : on le voit dans le programme à ce que les barres de fractions sont indiquées en gras.

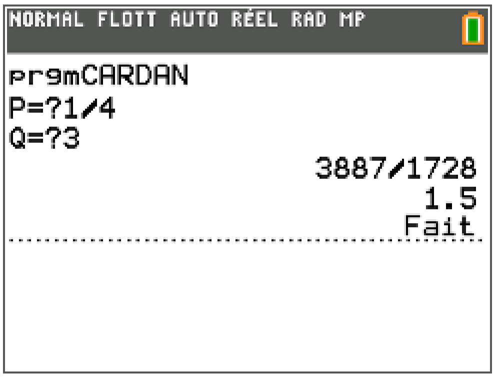
**d)** Voici les résultats obtenus à partir des équations proposées :

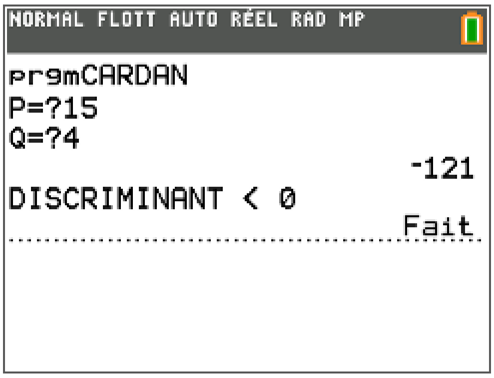


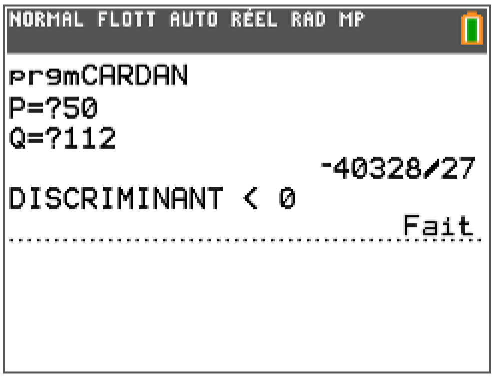




Le dernier résultat montrerait sous toute réserve que l'équation ne possède pas de solution, ou en tout cas que la méthode de Cardan ne permet pas d'en obtenir une. Pour la première équation que vous avons testée, on tombe dans une situation similaire… pourtant nous savons qu'elle admet trois solutions, dont une était évidente.




Le discriminant est négatif, donc les formules de Cardan ne peuvent pas s'appliquer ; pourtant nous savons que cette équation a 3 solutions dans $\mathbb{R}$.

## 3. Troisième étape : de la nécessité d'introduire des nombres imaginaires

Comme Cardan l'a fait il y a presque cinq siècles, nous nous proposons d'examiner d'un peu plus près le cas de la dernière équation de la question précédente $x^3 = 15x + 4$.

**1)** Comme au début de l'activité, nous demandons à la calculatrice de tracer la courbe représentative de la fonction qui à $x$ associe $x^3 - 15x - 4$ pour constater que l'équation $f(x) = 0$ ou $x^3 = 15x + 4$ possède trois solutions réelles, dont l'une est manifestement 4 (en effet, $4^3 - 15 \times 4 - 4 = 0$). Les deux autres solutions pourraient être calculées comme précédemment, mais la question n'est pas posée ici.

**2) a)** Si on pose $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, il semble légitime de dire que $\mathrm{i}^2 = -1$ et $\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2 \times \mathrm{i} = -\mathrm{i}$.

**b)** Les calculs qui nous gênaient peuvent alors être poursuivis :

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{2}+11\,\mathrm{i}} = \sqrt[3]{2+11\,\mathrm{i}} \text{ et } \sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{2}-11\,\mathrm{i}} = \sqrt[3]{2-11\,\mathrm{i}}.$$

**c)** Il faut supposer que les racines cubiques peuvent se calculer aussi simplement dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$… ce qui n'est pas tout à fait vrai… mais la calculatrice va nous donner une réponse qui nous satisfait :

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
(2+11i)^(1/3)
                         2+1i
(2-11i)^(1/3)
                         2-1i
```

d'où l'on déduit que $\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}} = 2 + \mathrm{i} + 2 - \mathrm{i} = 4$.

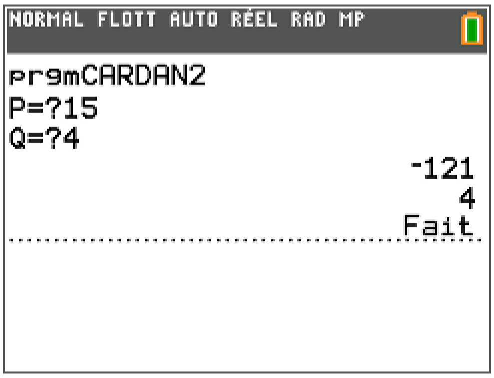
Remarquons que, pour retrouver le résultat de la calculatrice, le développement à la main de $(2+\mathrm{i})^3$ est un bon exercice de calcul pour les élèves qui découvrent à ce moment-là les nombres complexes.
On retrouve bien la solution mise en évidence au 1).

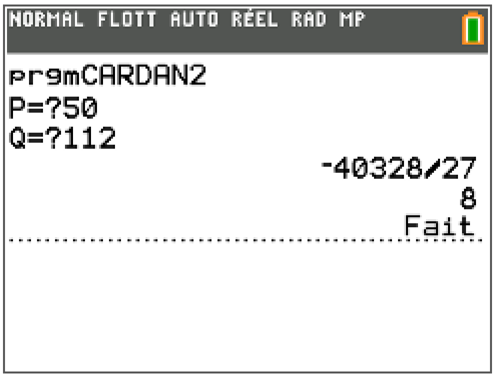
**3) a)** On peut maintenant traiter le cas où le discriminant $D$ est strictement négatif : on demande à la calculatrice de renvoyer $\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\mathrm{i}\sqrt{-D}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}-\mathrm{i}\sqrt{-D}}$ et on sait qu'elle gère très bien de tels nombres. Voici un tel programme :

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:CARDAN2
:Q²/4-P^3/27→D
:Disp D
:If D≥0
:Then
:Disp (Q/2+√(D))^(1/3)+(Q/
2-√(D))^(1/3)
:Else
:Disp (Q/2+i√(-D))^(1/3)+(
Q/2-i√(-D))^(1/3)
```

```
:Disp (Q/2+i√(-D))^(1/3)+(
Q/2-i√(-D))^(1/3)
:End
```

Les résultats sont maintenant parfaitement concluants dans tous les cas. Bien que, dans le cas où le discriminant est strictement négatif, les calculs se fassent dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, les réponses obtenues sont réelles.




**b)** On sait que la méthode de Cardan nous donne maintenant dans tous les cas une solution réelle $\alpha$. On peut alors factoriser l'expression $x^3 - px - q$ par identification. On a, pour tout $x$ réel :

$$x^3 - px - q = (x-\alpha)(x^2 + ax + b)$$

qui équivaut à :

$$x^3 - px - q = x^3 + ax^2 + bx - \alpha x^2 - a\alpha x - \alpha b$$
$$x^3 - px - q = x^3 + (a-\alpha)x^2 + (b - a\alpha)x - \alpha b$$

Cette égalité qui doit être vraie pour tout réel $x$ équivaut à :

$$\begin{cases} a - \alpha = 0 \\ b - a\alpha = -p \\ -\alpha b = -q \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = \alpha \\ b = \dfrac{q}{\alpha} \end{cases}.$$

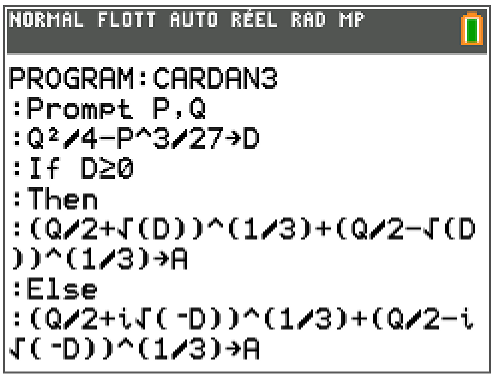
Remarquons que la deuxième égalité est bien vérifiée car $b - a\alpha = \dfrac{q}{\alpha} - \alpha^2 = \dfrac{q - \alpha^3}{\alpha} = \dfrac{-p\alpha}{\alpha} = -p$, ce qui est normal puisque $\alpha$ est solution de $x^3 = px + q$.

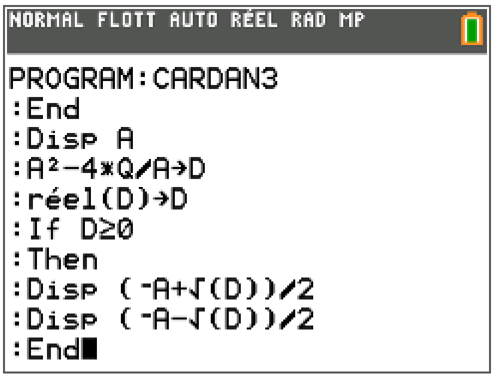
On a donc la factorisation suivante, valable pour tout $x$ réel :

$$x^3 - px - q = (x-\alpha)\left(x^2 + \alpha x + \frac{q}{\alpha}\right).$$

L'équation $x^3 - px - q = 0$ équivaut donc à $\begin{cases} x - \alpha = 0 \\ x^2 + \alpha x + \dfrac{q}{\alpha} = 0 \end{cases}$

Le programme que nous cherchons à construire doit tout d'abord déterminer une solution $\alpha$ de l'équation $x^3 - px - q = 0$ par la méthode de Cardan, puis résoudre l'équation du second degré $x^2 + \alpha x + \dfrac{q}{\alpha} = 0$.



**Une remarque importante :** il peut arriver que la variable **A** soit complexe, lorsque la première équation a un discriminant négatif. Le calcul de **$A^2$ – 4*Q/A→D** se produit alors dans l'ensemble des nombres complexes et la comparaison à 0 du test qui suit provoque une erreur. Ceci explique l'instruction **réel(D)→D**, qui replace la variable **D** dans l'ensemble des nombres réels.
Il est aussi possible d'adapter ce programme pour qu'il donne les solutions complexes de l'équation. Voici quelques-uns des résultats obtenus :