LA MÉTHODE DE CARDAN

TI-83 Premium CE

1. Objectifs

- Comprendre les problèmes calculatoires qui ont poussé les algébristes de la Renaissance Italienne à introduire des nombres « imaginaires ».
- Étudier à l'aide de la formule établie par Cardan la résolution d'équations de degré 3 de la forme $x^3 = px + q$, avec p et q réels.
- Écrire un algorithme de résolution générale des équations de degré 3 de cette forme.

2. Première étape : résoudre une équation simple de degré 3

1) On considère l'équation : $x^3 = 50x + 112$ $\quad (E_1)$
À l'aide de la calculatrice et de l'outil de représentation graphique des fonctions, trouver une solution « évidente » entière α de l'équation (E_1).

2) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x réel :

$$x^3 - 50x - 112 = (x - \alpha)(x^2 + ax + b).$$

3) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1) dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

3. Deuxième étape : la méthode de Cardan

Les mathématiciens ont longtemps cherché une formule générale de résolution de l'équation du troisième degré à coefficients réels. Même si d'autres noms peuvent être cités, l'histoire retient que c'est Jérôme Cardan qui, en 1545, dans un traité d'algèbre, publie une méthode de résolution de l'équation $x^3 = px + q$, p et q étant réels, au moyen de formules qui portent aujourd'hui son nom.

On se propose d'étudier, comme Jérôme Cardan dans son traité, l'équation (E_2) :

$$x^3 = 6x + 6.$$

1) À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture sur le nombre de solutions de l'équation (E_2). Peut-on cette fois trouver une solution entière évidente ?

2) La formule que Cardan établit dans son traité affirme qu'*une* solution de l'équation $x^3 = px + q$, où p et q sont des nombres réels, est donnée par :

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

a) La racine cubique d'un nombre réel quelconque a est le nombre noté $\sqrt[3]{a}$ qui, élevé au cube, est égal à a.
En d'autres termes, c'est aussi la solution unique réelle de l'équation $x^3 = a$.
Expliquer pourquoi l'on peut calculer la racine cubique de n'importe quel nombre réel.
Que valent par exemple $\sqrt[3]{8}$ ou $\sqrt[3]{-125}$?

Vérifier que ces nombres peuvent être retrouvés sur la calculatrice avec la séquence de touches $\wedge \frac{1}{3}$

b) L'expression $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$ s'appelle le *discriminant* de l'équation $x^3 = px + q$.
À quelle condition le calcul précédent peut-il être mené ?

c) Écrire sur la calculatrice un programme nommé **CARDAN** renvoyant la solution calculée par la formule de Cardan dans le cas où c'est possible. En entrée, l'algorithme demandera les valeurs des réels p et q de l'équation $x^3 = px + q$, éventuellement sous forme fractionnaire ; en sortie, il renverra la valeur du discriminant, sous forme fractionnaire si nécessaire, et la solution mise en évidence par la formule de Cardan lorsqu'elle existe.

d) Tester le programme **CARDAN** sur l'équation (E_2), puis sur les équations suivantes :

$x^3 = 4x + 15$; $x^3 = x + 1$; $x^3 = 5x + \dfrac{9}{2}$; $x^3 = \dfrac{1}{4}x + 3$; $x^3 = 15x + 4$.

Tester aussi ce programme sur l'équation (E_1) de la première étape. Le résultat est-il satisfaisant ?

3. Troisième étape : de la nécessité d'introduire des nombres imaginaires

Comme Cardan l'a fait il y a presque cinq siècles, nous nous proposons d'examiner d'un peu plus près le cas de la dernière équation de la question précédente $x^3 = 15x + 4$, pour laquelle le discriminant était négatif.

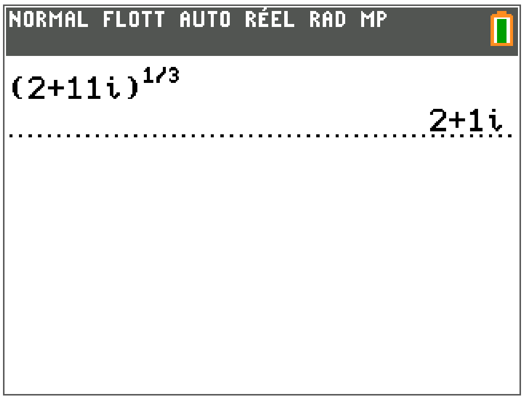
1) Montrer qu'elle admet pour autant une solution entière simple, que l'on déterminera à l'aide de la calculatrice.

2) Et si l'on poursuivait les calculs, même si cela semble être une **hérésie** mathématique : passons outre le problème posé par la racine carrée d'un nombre négatif.
On peut alors admettre que $\sqrt{-121} = \sqrt{121 \times -1} = 11\sqrt{-1} = 11\,\mathrm{i}$ en notant i le nombre $\sqrt{-1}$.
On comprend pourquoi les mathématiciens de la Renaissance Italienne ont qualifié d'*imaginaires* de tels nombres !
a) En tenant compte de cette définition du nombre i, que vaut i^2 ? i^3 ?

b) Montrer qu'alors : $\sqrt[3]{\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{2 + 11\,\mathrm{i}}$ et calculer de même $\sqrt[3]{\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}}}$.

c) Le calcul peut être poursuivi… à l'aide de notre calculatrice ! En s'inspirant de ce que l'écran ci-contre suggère (que l'on pourra justifier à la main par un calcul de cube), donner la forme la plus simple possible de l'expression $\sqrt[3]{\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} - \dfrac{p^3}{27}}}$.

Retrouve-t-on la solution trouvée au **1)** ?



3) a) Modifier le programme **CARDAN** précédent, afin qu'il donne une solution à l'équation même dans le cas où le discriminant de l'équation $x^3 = px + q$ est strictement négatif. Tester ce programme sur l'équation $x^3 = 15x + 4$ ainsi que sur l'équation du début $x^3 = 50x + 112$.

b) Complément : écrire un programme qui donne la résolution complète de l'équation de degré 3 $x^3 = px + q$, avec p et q réels. En entrée, on donnera les coefficients p et q et en sortie *toutes* les solutions réelles de cette équation.