THEMA
I Colóquio de Estudos sobre relações entre Tecnologias e História da Matemática para o Ensino

Aproximações de π usando a tecnologia *TI-Nspire CX II-T* da *Texas Instruments*

Joaquim Pinto[1]
Departamento de Educação e Psicologia da Universidade de Aveiro

RESUMO

Com o presente artigo pretende-se fazer uma incursão pela História da Matemática à procura de aproximações do número π, com o auxílio da Tecnologia *TI-Nspire CX II-T* da *Texas Instruments*. A nossa viagem começa com aproximações feitas pelos Babilónios, saltando até ao Antigo Egito passando pela Grécia Antiga e pela China. Não esquecemos Arquimedes, com uma aproximação à definição de limite, até que chegamos aos dias de hoje. Terminamos com a fórmula apresentada por Ramanujan que nos deixa completamente surpreendidos, ou não, com a incrível precisão das suas aproximações para uma única iteração. O Pensamento Computacional, enquanto Resolução de Problemas, está sempre presente ao longo do presente texto, pelo que nos atrevemos a dizer que o tema da História da Matemática é um magnífico exemplo de aplicação deste tema.

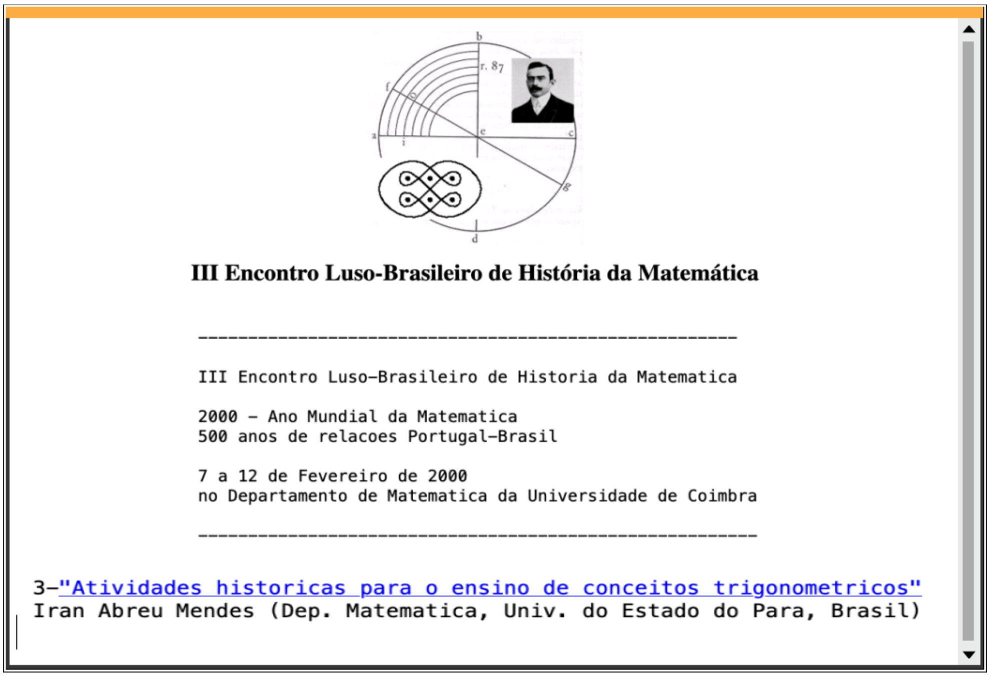
Palavras-chave: Tecnologia; História da Matemática; π; *TI-Nspire CX II-T*; Pensamento Computacional.

[1] Doutor em Educação Matemática, pela Universidade de Aveiro (UA). Presidente da Associação de Professores de Matemática (APM) e Professor Auxiliar Convidado do Departamento de Educação e Psicologia da Universidade de Aveiro (DEP UA), Aveiro, Portugal. Campus Universitário de Santiago, 3810-193 Aveiro. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7193-683X. E-mail: joaquimpinto@ua.pt

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este texto começou a ser "escrito" aquando do III Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática. Estávamos em pleno ano 2000, Ano Mundial da Matemática, com 500 anos de relações Portugal-Brasil. Entre 7 e 12 de fevereiro do referido ano 2000, frequentámos um mini curso dado pelo Professor Iran Abreu Mendes (Dep. Matemática, Univ. do estado do Pará, Brasil) no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra. O referido curso tratava de "Atividades históricas para o ensino de conceitos trigonométricos" (http://www.mat.uc.pt/~elbhimat/mc3.html).

Figura 1 – Anúncio do Encontro



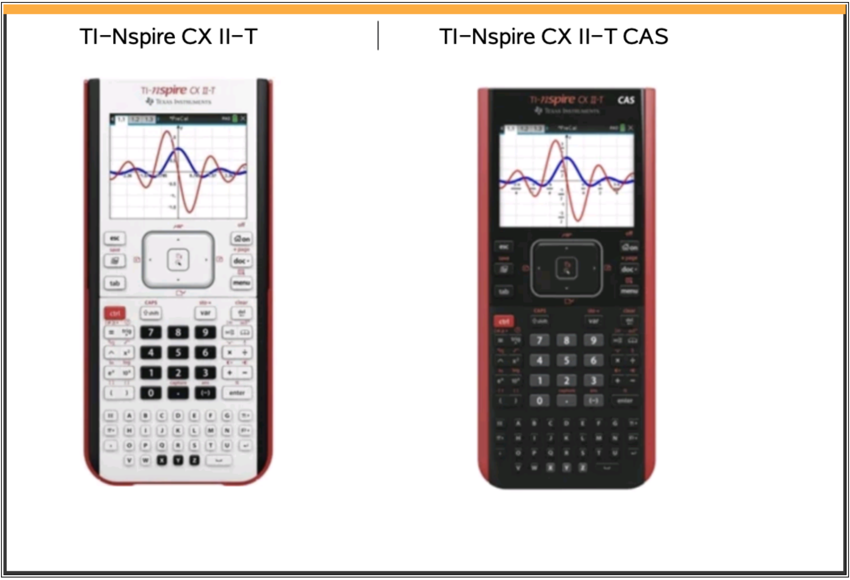
Fonte: Autor

Este curso despertou em mim uma curiosidade por aspetos didáticos da História da Matemática que até aí não tinha. Comecei a vê-la sob outros prismas, e a perceber como se pode levar para dentro da sala de aula, sem ser só a leitura de uma nota marginal de um manual de Matemática de um qualquer ano de escolaridade.

Neste texto vamos contar uma História das sucessivas aproximações de π recorrendo a uma ferramenta tecnológica, em particular a tecnologia *TI-Nspire CX II-T* da *Texas Instruments*. Usaremos alguns dos ambientes que esta tecnologia nos disponibiliza e, num deles, usaremos a linguagem de Programação *Python* (na verdade *Micro Python*).

A nossa viagem começa na Babilónia, passa pelo Antigo Egito, pela Grécia, até aos dias de hoje, quando usamos a referida linguagem de programação e, também, as probabilidades com método de Monte Carlo, para determinar aproximações do número π.

Figura 2 – Tecnologia *TI-Nspire CX II-T*



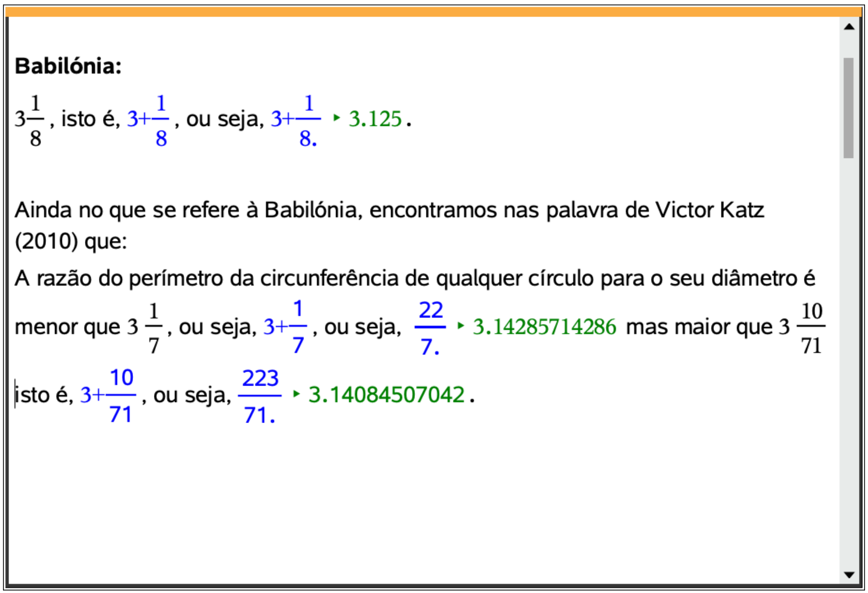
Fonte: Autor

BABILÓNIA

Na Babilónia encontramos algumas aproximações de π, nomeadamente, $3\,\frac{1}{8}$, isto é, $3+\frac{1}{8}$, que é aproximadamente $3{,}125$. Ainda no que se refere à Babilónia encontramos nas palavras de Vitor Katz (2010) que "A razão do perímetro da circunferência de qualquer círculo para o seu diâmetro é menor que $3\,\frac{1}{7}$, ou seja, $3+\frac{1}{7}$, ou seja, $\frac{22}{7}$ mas maior que $3\,\frac{10}{71}$, isto é, $3+\frac{10}{71}$, ou seja, $\frac{223}{71}$. Temos então que $\frac{22}{7} < \pi < \frac{223}{71} \Leftrightarrow 3.14285714286 < \pi < 3.14084507042$."

Usando a tecnologia *TI-Nspire CX II-T* podemos observar, na figura abaixo, que os cálculos são efetuados à medida que vamos escrevendo.

Figura 3 – Trabalho no Bloco de Notas da *TI-Nspire CX II-T*



Fonte: Autor

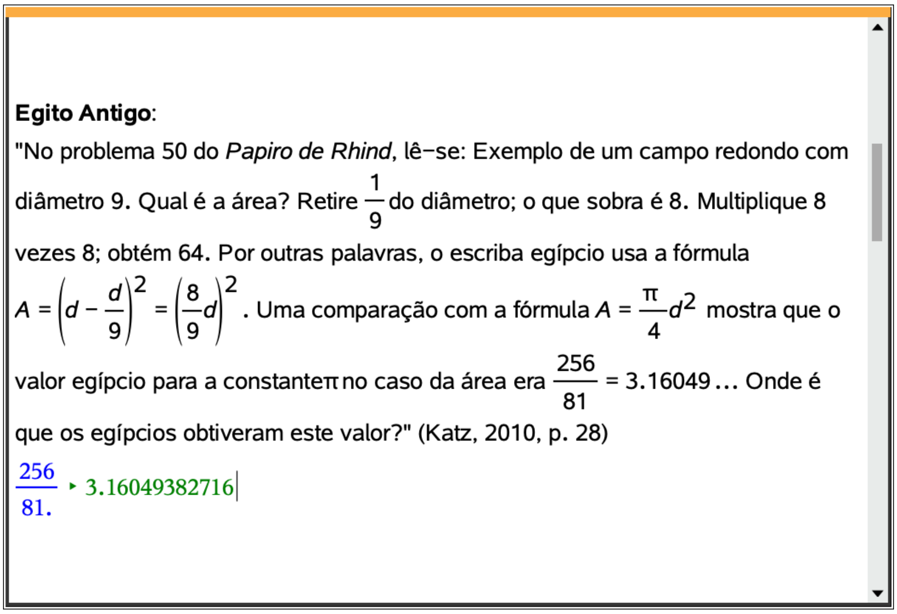
ANTIGO EGITO

No livro de História da Matemática de Vitor Katz (2010) encontramos na página 28 uma citação do papiro de Rhind:

> No problema 50 do Papiro de Rhind, lê-se: Exemplo de um campo redondo com diâmetro 9. Qual é a área? Retire $\frac{1}{9}$ do diâmetro; o que sobra é 8. Multiplique 8 vezes 8; obtém 64. Por outras palavras, o escriba egípcio usa a fórmula $A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2$. Uma comparação com a fórmula $A = \left(\frac{\pi}{4}d\right)^2$ mostra que o valor egípcio para a constante π no caso da área era $\frac{256}{81} =$ 3.16049 ... Onde é que os egípcios obtiveram este valor?

Recorrendo novamente ao Bloco de Notas da *TI-Nspire CX II-T* temos que:

Figura 4 – Trabalho no Bloco de Notas da *TI-Nspire CX II-T*



Egito Antigo:

"No problema 50 do *Papiro de Rhind*, lê−se: Exemplo de um campo redondo com diâmetro 9. Qual é a área? Retire $\frac{1}{9}$ do diâmetro; o que sobra é 8. Multiplique 8 vezes 8; obtém 64. Por outras palavras, o escriba egípcio usa a fórmula $A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$. Uma comparação com a fórmula $A = \frac{\pi}{4}d^2$ mostra que o valor egípcio para a constanteπno caso da área era $\frac{256}{81} = 3.16049\ldots$ Onde é que os egípcios obtiveram este valor?" (Katz, 2010, p. 28)

$\frac{256}{81.} \blacktriangleright 3.16049382716$

Fonte: Autor

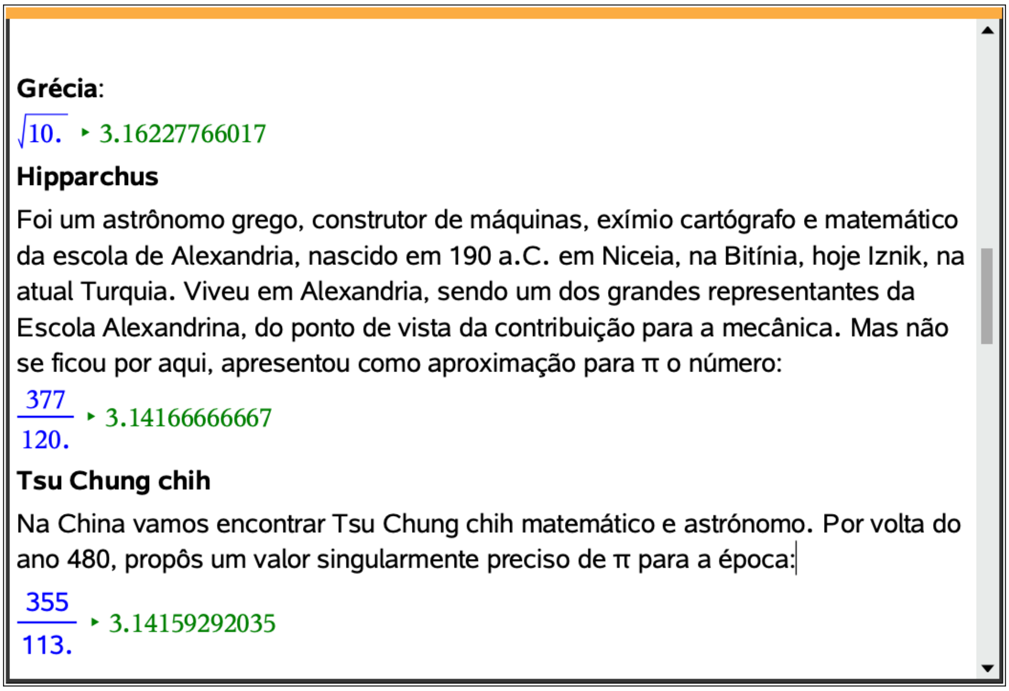
DA GRÉCIA À CHINA

Os **gregos** apresentaram uma aproximação de π bastante curiosa, a de $\sqrt{10}$ que é aproximadamente igual a 3.16227766017 (CARVALHO E SILVA, 1994a; COSTA, 2018, p. 55; ESTRADA, 1993; ESTRADA *et al.*, 2000).

Hiparco foi um astrónomo grego, construtor de máquinas, exímio cartógrafo e matemático da escola de Alexandria, considerado o pai da Trigonometria. Nasceu em 190 a.C. em Niceia, na Bitínia, hoje Iznik, na atual Turquia. Viveu em Alexandria, sendo um dos grandes representantes da Escola Alexandrina, do ponto de vista da contribuição para a mecânica. Mas não se ficou por aqui, apresentou como aproximação para π o número $\frac{377}{120}$ que é aproximadamente igual a 3.14166666667 (CARVALHO E SILVA, 1994a; COSTA, 2018, p. 55; ESTRADA, 1993; ESTRADA *et al.*, 2000).

Na China vamos encontrar **Tsu Chung Chih** matemático e astrónomo. Por volta do ano 480, propôs um valor singularmente preciso de π para a época: $\frac{355}{113} \approx 3.14159292035$ (CARVALHO E SILVA, 1997, 1993, 1994a; COSTA, 2018, p. 55; ESTRADA, 1993; ESTRADA *et al.*, 2000). Recorrendo novamente ao Bloco de Notas da *TI-Nspire CX II-T* obtemos o seguinte:

Figura 5 – Trabalho no Bloco de Notas da *TI-Nspire CX II-T*



Fonte: Autor

LEONARDO DE PISA (FIBONACCI)

Voltando ao livro de História da Matemática de Vitor Katz (2010), na página 368 encontramos a seguinte passagem:

> Leonardo escreveu uma secção sobre círculos em que cita o valor padrão, $\frac{22}{7}$, para π. Mas Leonardo, além disso, mostrou como calcular este valor pelo processo de Arquimedes.
> Mostrou que a relação entre o perímetro de um polígono regular de 96 lados circunscrito a um círculo, e o diâmetro, é de 1440 para $458\frac{1}{5}$, e a razão do perímetro de um polígono de 96 lados inscrito num círculo para o diâmetro, fica entre 1440 e $458\frac{4}{9}$. Notando que $458\frac{1}{3}$, isto é, $458 + \frac{1}{3}$ tem um valor entre $458\frac{1}{5}$ que é, $458 + \frac{1}{5}$ e $458\frac{4}{9}$, isto é, $458 + \frac{4}{9}$, afirma que a razão entre o perímetro e o diâmetro está próxima de $1440 \div 458\frac{1}{3} = 864 \div 275$, ou seja, $\frac{1440}{458+\frac{1}{3}}$.
> Como $864 \div 274\frac{10}{11} = 3\frac{1}{7}$, ou seja, $\frac{864}{274+\frac{10}{11}}$ Leonardo obteve o valor arquimediano. $\frac{864}{275}$.

Recorrendo uma vez mais ao Bloco de Notas da *TI-Nspire CX II-T* obtemos o que mostra a figura 6.

Figura 6 – Trabalho no Bloco de Notas da *TI-Nspire CX II-T*

Fibonacci (Leonardo de Pisa):

"Leonardo escreveu uma secção sobre círculos em que cita o valor padrão, $\frac{22}{7}$, para π. Mas Leonardo, além disso, mostrou como calcular este valor pelo processo de Arquimedes.

Mostrou que a relação entre o perímetro de um polígono regular de 96 lados circunscrito a um círculo, e o diâmetro, é de 1440 para $458\frac{1}{5}$, e a razão do perímetro de um polígono de 96 lados inscrito num círculo para o diâmetro, fica entre 1440 e $458\frac{4}{9}$. Notando que $458\frac{1}{3}$, isto é, $458+\frac{1}{3.}$ tem um valor entre $458\frac{1}{5}$, que é, $458+\frac{1}{5.} \blacktriangleright 458.2$ e $458\frac{4}{9}$, isto é, $458+\frac{4}{9.} \blacktriangleright 458.444444444$, afirma que a razão entre o perímetro e o diâmetro está próxima de

1440 : 458 1/3= 864 : 275, ou seja, $\frac{1440}{458+\frac{1}{3}} \blacktriangleright \frac{864}{275}$ e $\frac{864}{275.} \blacktriangleright 3.14181818182$

Como 864 : 274 10/11 = 3 1/7, ou seja, $\frac{864}{274+\frac{10}{11}} \blacktriangleright \frac{22}{7}$, Leonardo obteve o valor arquimediano." (Katz, 2010, p. 368)

Fonte: Autor

MÉTODO DE MONTE CARLO

Designa-se por método de **Monte Carlo** qualquer método, de uma classe de métodos estatísticos, que se baseiam em amostragens aleatórias massivas para obter resultados numéricos (PESTANA; VELOSA, 2008).

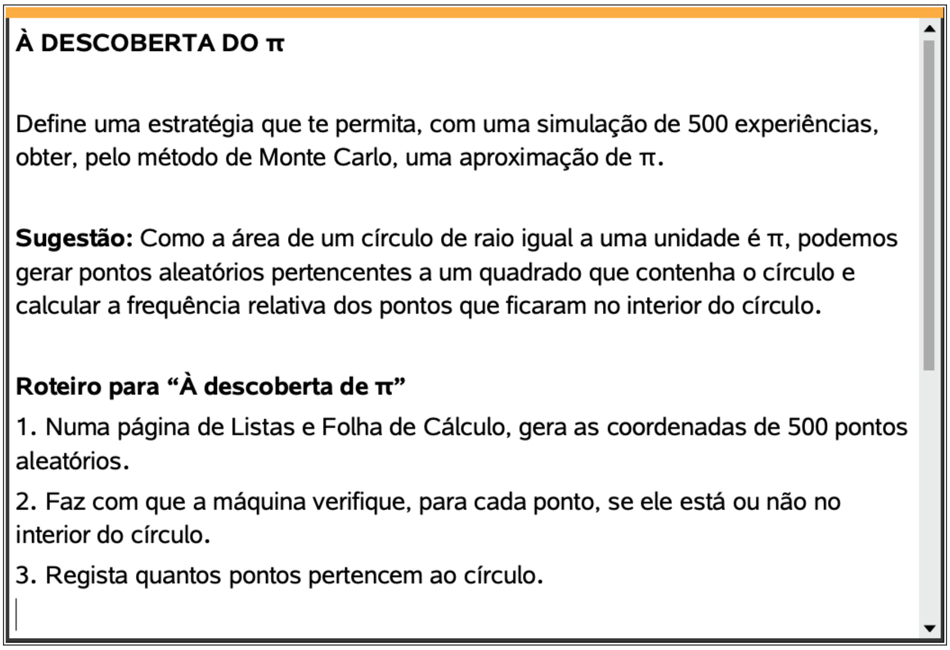
Usaremos este método utilizando vários ambientes da *TI-Nspire CX II-T*.

No primeiro processo partiremos da **folha de cálculo**, onde geramos aleatoriamente pares de números, entre -1 e 1, (pares ordenados de pontos), medimos a distâncias de cada ponto à origem para depois fazermos a sua representação numa página de **Geometria**. Estes pares ordenados pertencem a um quadrado centrado na origem, de lado 2; a medição vai permitir-nos contar quantos destes pontos estão dentro de uma circunferência de raio 1, e, a partir daí, determinar uma aproximação de π. Num terceiro processo faremos o mesmo, mas marcando os pontos aleatoriamente no ambiente de **Geometria** e recolhendo as suas coordenadas na **folha de cálculo**. Processo em tudo idêntico ao acabado de referir.

Terminamos com uma simulação em ***Python***, na *TI-Nspire CX II-T*.

À descoberta de π é o nome da tarefa que passaremos a descrever de seguida e da qual apresentamos a Figura 7, retirada do **Bloco de Notas** da *TI-Nspire CX II-T* (CARVALHO E SILVA, 1994a; ESTRADA, 1993; ESTRADA *et al.*, 2000; KATZ, 2010).

Figura 7 – à Descoberta de π



À DESCOBERTA DO π

Define uma estratégia que te permita, com uma simulação de 500 experiências, obter, pelo método de Monte Carlo, uma aproximação de π.

Sugestão: Como a área de um círculo de raio igual a uma unidade é π, podemos gerar pontos aleatórios pertencentes a um quadrado que contenha o círculo e calcular a frequência relativa dos pontos que ficaram no interior do círculo.

Roteiro para "À descoberta de π"

1. Numa página de Listas e Folha de Cálculo, gera as coordenadas de 500 pontos aleatórios.

2. Faz com que a máquina verifique, para cada ponto, se ele está ou não no interior do círculo.

3. Regista quantos pontos pertencem ao círculo.

Fonte: Autor

À DESCOBERTA DO π

Define uma estratégia que te permita, com uma simulação de 500 experiências, obter, pelo método de Monte Carlo, uma aproximação de π.

Sugestão: Como a área de um círculo de raio igual a uma unidade é π, podemos gerar pontos aleatórios pertencentes a um quadrado que contenha o círculo e calcular a frequência relativa dos pontos que ficaram no interior do círculo.

Roteiro para "À descoberta de π"

1. Numa página de Listas e Folha de Cálculo, gera as coordenadas de 500 pontos aleatórios.
2. Faz com que a máquina verifique, para cada ponto, se ele está ou não no interior do círculo.
3. Regista quantos pontos pertencem ao círculo.
4. Obtém a representação gráfica da tua simulação. Para isso, cria uma página de Gráficos com a circunferência (ou um quarto dela), o quadrado que a inclua e o gráfico de dispersão.
5. Repete dez vezes o procedimento anterior e registas os resultados, de modo a obteres uma simulação com 5000 experiências.
6. Recolhe os dados dos teus companheiros de modo a teres um número muito maior de simulações.
7. Qual é o valor aproximado de π que se obteve?
8. A partir destes resultados, indica o intervalo de confiança a 95% para o valor de π.

Iniciando a simulação, na folha de cálculo, vamos obter, por exemplo:

Figura 8 – à Descoberta de π

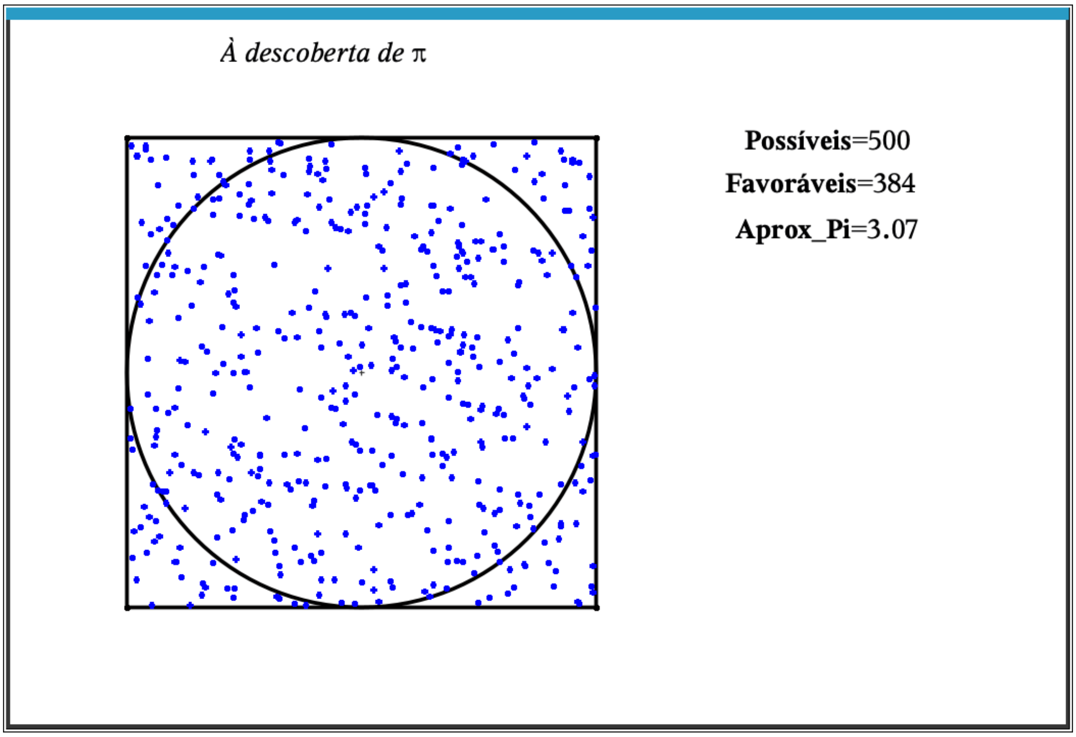
	A xp	B yp	C distancia	D
=	=2*rand(500)−1	=2*rand(500)−1	= √ (xp^2+yp^2)	
1	0.887194804984	0.63701933193	1.01084786989	
2	0.81663772195	0.188314794652	0.459310293047	
3	-0.706624341556	0.009048022691	1.18938129554	
4	0.029403900973	0.51910774719	0.587512243413	
5	-0.188380716463	0.20618419616	0.742879376533	
6	0.467624622496	0.260731368521	0.985388588623	
7	-0.912016025015	-0.333698888635	0.915296058429	
8	-0.321274949997	0.032301899407	0.81513801482	
9	0.990932682164	0.960722254877	0.219885989308	
10	-0.599319476421	-0.51271547009	0.693213405989	
11	0.596140201792	-0.554442268649	0.565056813303	
12	0.903796665241	0.857421295593	0.884073941011	
13	-0.55804305337	-0.990773201551	0.758003880182	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	

D

Fonte: Autor

Representando estes pontos na página de Geometria, podemos agora ver cada recolha, simultânea, de 500 pontos.

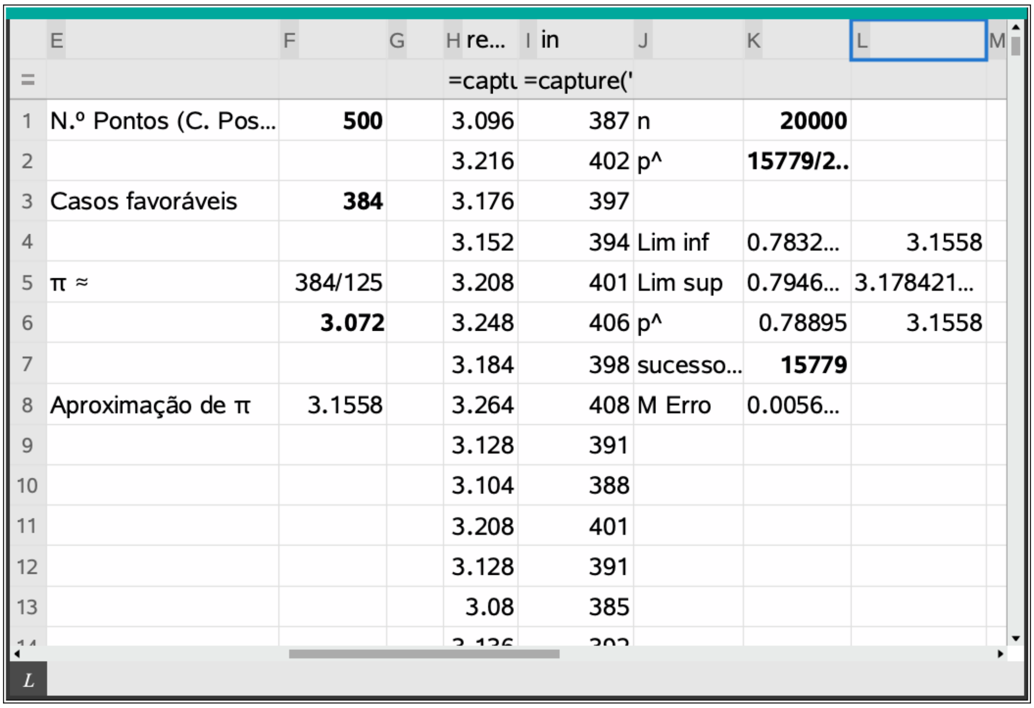
Figura 9 – à Descoberta de π



Fonte: Autor

Na Figura 10 e após 20000 simulações observamos uma aproximação de π com um intervalo de confiança a 95%. Na Figura 11, observamos que não estamos longe do intervalo real.

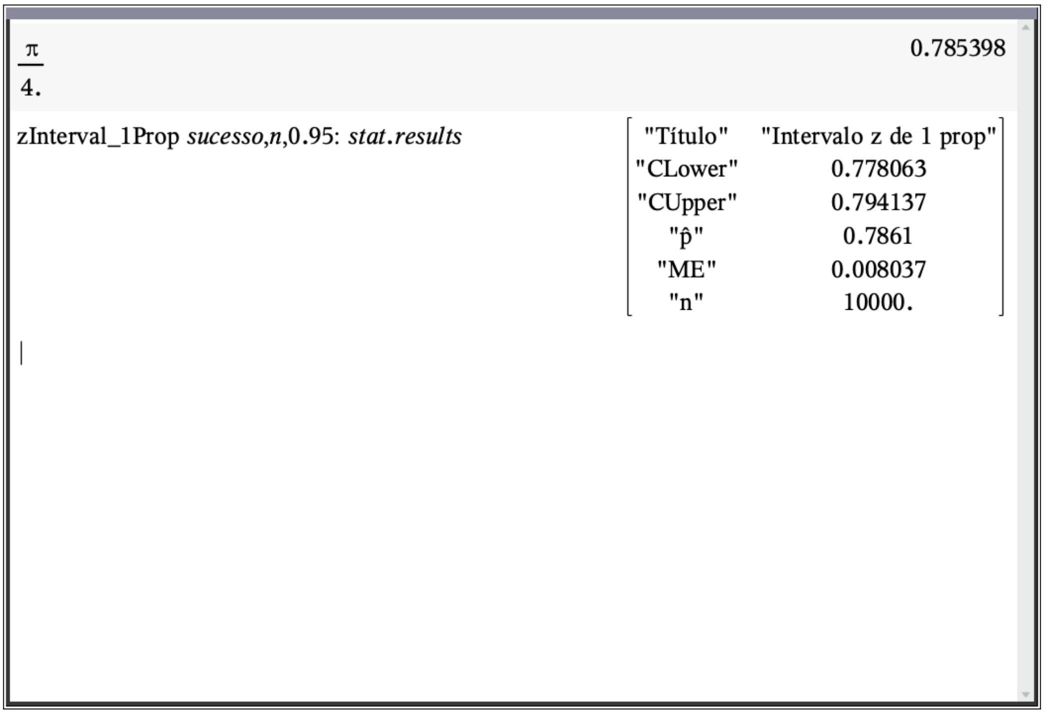
Figura 10 – à Descoberta de π



	E	F	G	H re...	I in	J	K	L	M
=				=captu	=capture('				
1	N.º Pontos (C. Pos...	**500**		3.096	387	n	**20000**		
2				3.216	402	p^	**15779/2..**		
3	Casos favoráveis	**384**		3.176	397				
4				3.152	394	Lim inf	0.7832...	3.1558	
5	π ≈	384/125		3.208	401	Lim sup	0.7946...	3.178421...	
6		**3.072**		3.248	406	p^	0.78895	3.1558	
7				3.184	398	sucesso...	**15779**		
8	Aproximação de π	3.1558		3.264	408	M Erro	0.0056...		
9				3.128	391				
10				3.104	388				
11				3.208	401				
12				3.128	391				
13				3.08	385				

Fonte: Autor

Figura 11 – à Descoberta de π

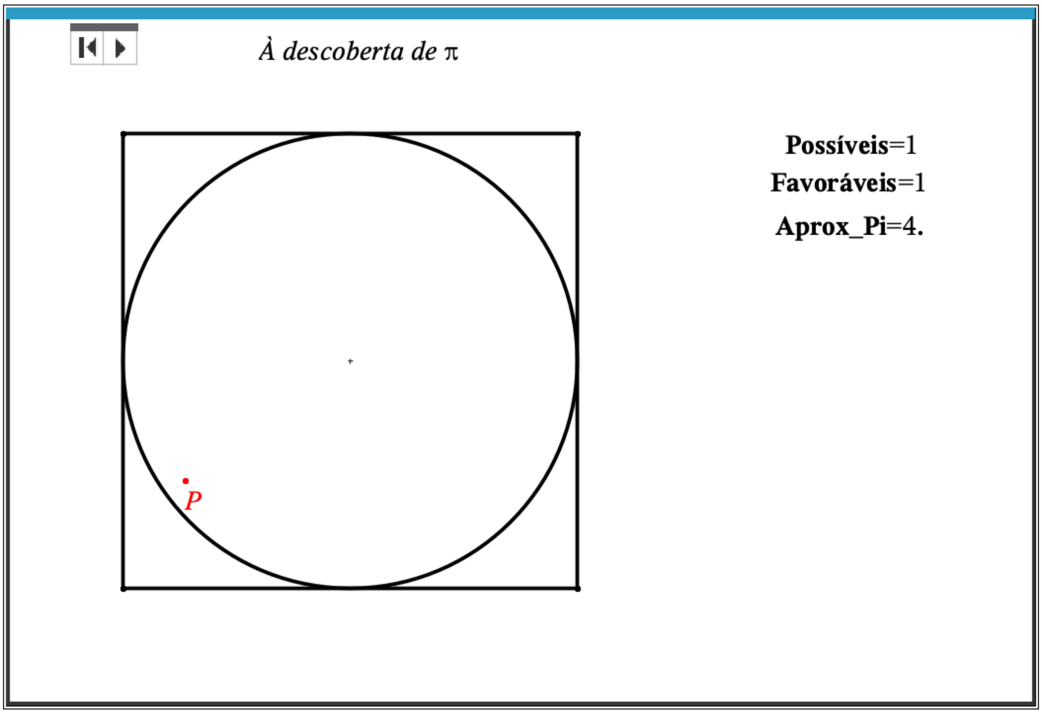


Fonte: Autor

Como referimos, esta tecnologia permite-nos partir da página de Geometria e, usando o movimento que este ambiente proporciona, ir aproximando o número π.

Repare-se, sucessivamente nas Figuras 12 e 13, onde apenas foi gerado um ponto e automaticamente recolhido na folha de cálculo e registada a distância ao centro da circunferência, origem do referencial.

Figura 12 – à Descoberta de π



Fonte: Autor

Figura 13 – à Descoberta de π

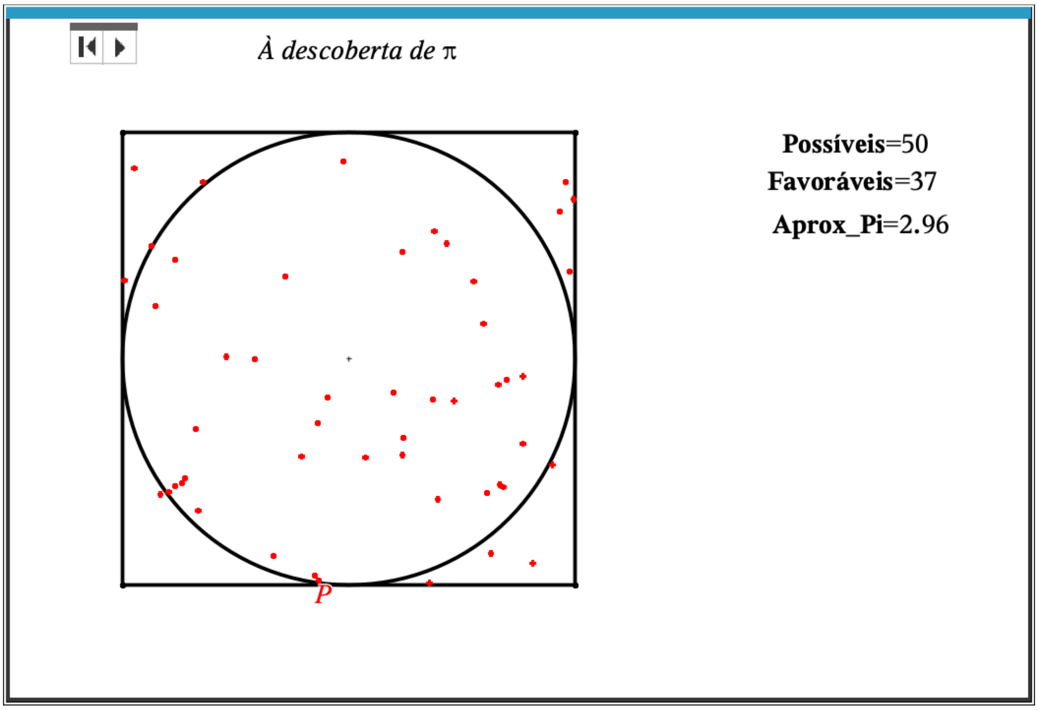
	A px	B py	C distancia	D	E	F	G
=	=capture('xp,1)	=capture('yp,1)	= √ (px^2+py^2)				
1	⁻0.726437647...	⁻0.5285735733...	0.898388377905		Possíveis	1	
2							
3					Favoráveis	1	
4							
5					π	4.	
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							

E

Fonte: Autor

Nas Figuras 14 e 15 já estão gerados e recolhidos 50 pontos. A partir daqui é só deixarmos a experiência correr e após algum tempo temos a aproximação de π pretendida.

Figura 14 – à Descoberta de π



Fonte: Autor

Figura 15 – À Descoberta de π

	A px	B py	C distancia	D	E	F	G
=	=capture('xp,1)	=capture('yp,1)	= √ (px^2+py^2)				
1	-0.726437647...	-0.5285735733...	0.898388377905		Possíveis	**50**	
2	0.989046813...	0.7074811127...	1.21603582353				
3	-0.857972048...	0.2355409964...	0.88971658204		Favoráveis	**37**	
4	0.657154212...	-0.1143523826...	0.667029329944				
5	-0.738110460...	-0.5508174120...	0.920981472508		π	**2.96**	
6	-0.138631349...	-0.2835544610...	0.315629186558				
7	-0.876151373...	0.5019480665...	1.00974902352				
8	-0.772005111...	-0.5581287154...	0.95262771045				
9	-0.335960052...	-0.8681024139...	0.930844217813				
10	0.764156542...	-0.0769556223...	0.768021737574				
11	0.662566781...	-0.5559226133...	0.864895769457				
12	0.696943326...	-0.0903963073...	0.702781255567				
13	-0.678772225...	-0.3119554998...	0.747026082286				
14	[illegible]	[illegible]	[illegible]				

E

Fonte: Autor

GREGORY, LEIBNIZ E NILAKHANTA

Estudemos agora a **fórmula de Gregory**, que na realidade é uma série descoberta de forma independente por James Gregory (1638-1675), por Goufried Leibniz (1646-1716) e por

Nilakhanta, matemático indiano do século XV (CARVALHO E SILVA, 1994b). Esta série permite, também ela, uma aproximação do valor de π. A fórmula pode ser escrita como

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}+\cdots$$

equivalente a

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^{k}\times\frac{1}{2k+1}\right)$$

WALLIS

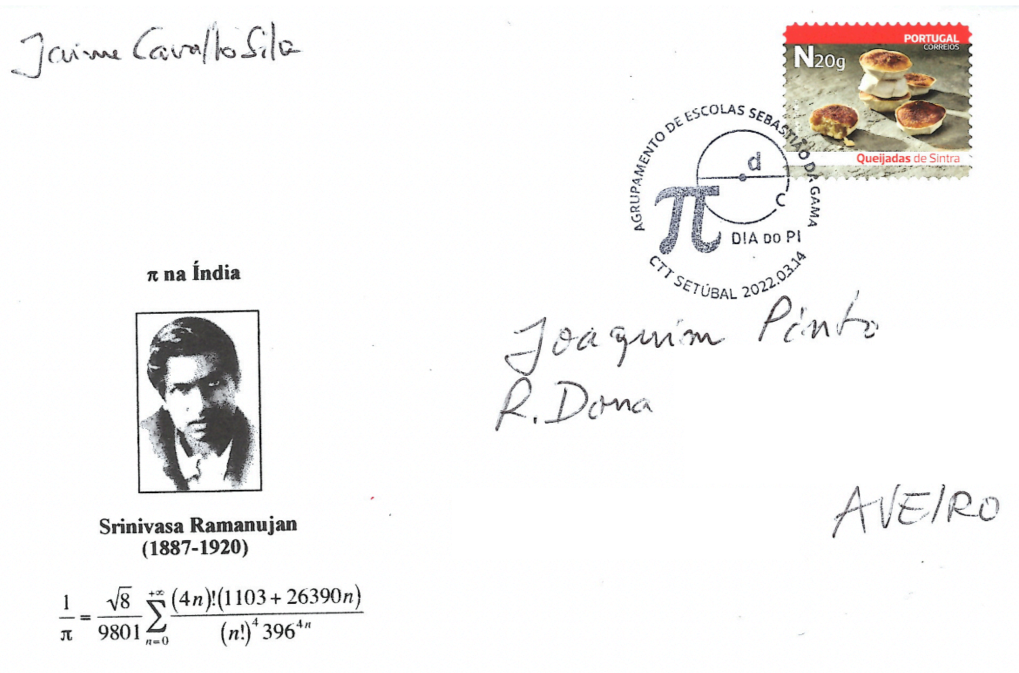
John Wallis foi um matemático britânico que, também, apresentou uma fórmula iterativa para o cálculo de um valor aproximado de π (CARVALHO E SILVA, 1994a; ESTRADA, 1993; ESTRADA *et al.*, 2000; KATZ, 2010):

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}\times\frac{10}{9}\times\frac{10}{11}\times\cdots$$

SRINIVASA RAMANUJAN

A nossa “sorte” levou-nos a um carimbo dos correios, aposto numa carta para comemorar o dia do π, enviada pelo Sr. Professor Doutor Jaime Carvalho e Silva. Um dos carimbos apostos nessa carta refere-se à comemoração do dia do π na Escola Sebastião da Gama, em Setúbal, Portugal e o outro ao $\boldsymbol{\pi}$ **na Índia**, apresentando uma fórmula genial da autoria do não menos genial Matemático Indiano **Srinivasa Ramanujan** (1887-1920).

Figura 16 – Carta enviada por Jaime Carvalho e Silva



Fonte: Autor

Srinivasa Ramanujan foi um matemático indiano. Sem qualquer formação académica, deu contributos importantes para as áreas da análise matemática, teoria dos números, séries infinitas, frações contínuas, entre outros ramos da matemática, incluindo problemas considerados insolúveis (CARVALHO E SILVA, 1994a; ESTRADA, 1993; ESTRADA *et al.*, 2000; KATZ, 2010).

Vejamos a fórmula apresentada por Srinivasa Ramanujan, para $n+1$ iterações:

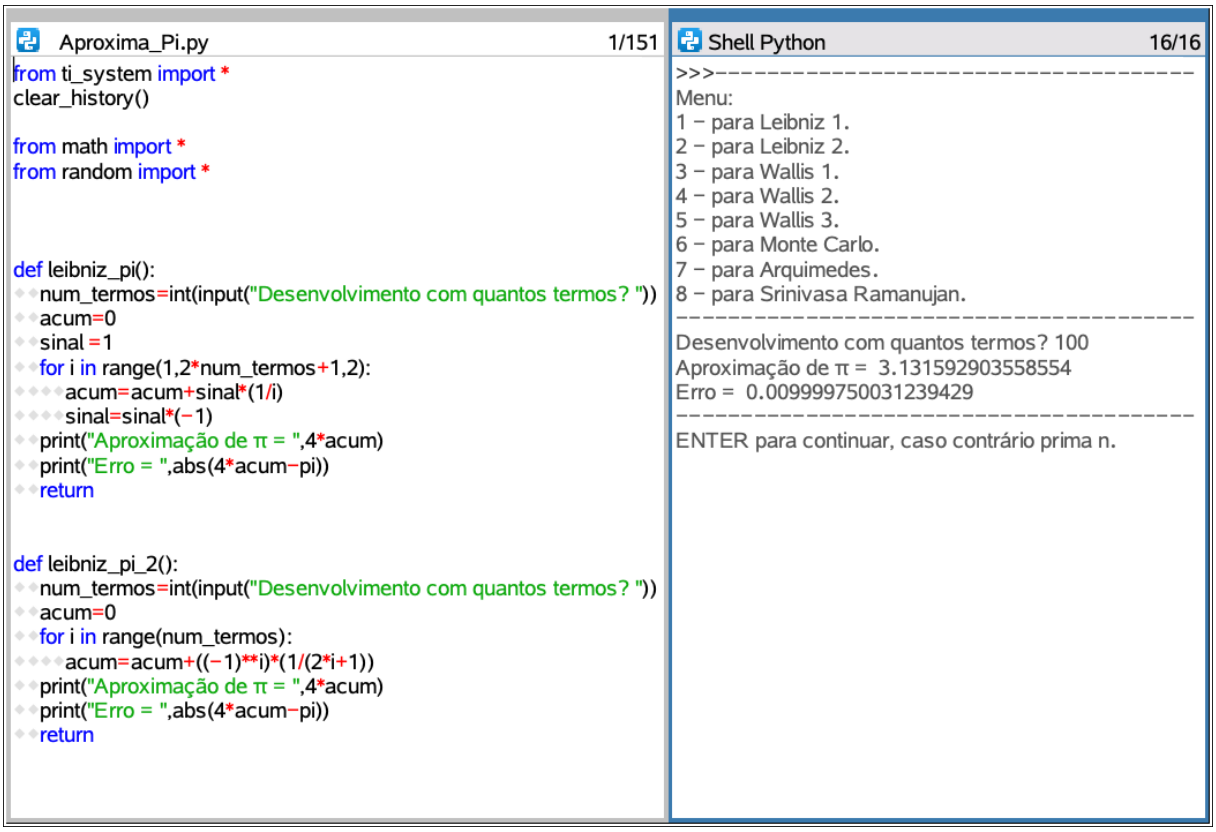
$$\frac{1}{\pi} \approx \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(4k)! \times (1103 + 26390k)}{(k!)^4 \times 396^{4k}} \right)$$

PYTHON E TI-NSPIRE CX II-T

Apresentamos, de seguida, várias figuras onde vamos fazer correr alguns dos programas construídos em *Python* para determinar o valor de π recorrendo às fórmulas acabadas de apresentar.

A Figura 17 apresenta parte de um programa em Python, com a possibilidade de correr oito programas diferentes para aproximar o número π. Nesta Figura vemos como implementamos em *Python* as fórmulas de Leibniz, corremos a opção 2 para 100 iterações, onde obtemos como output a aproximação e a distância (erro) a que estamos do “valor” de π.

Figura 17 – Programas em *Python*



Fonte: Autor

Na Figura 18 vamos fazer correr o programa e implementar a fórmula de Wallis. Com as mesmas 100 iterações estamos mais longe de π.

Figura 18 – Programas em *Python*

Aproxima_Pi.py 61/151

```
def wallis_pi():
    num_fact=int(input("Desenvolvimento com quantos fatores? "))
    acum=1
    for i in range(2,num_fact,2):
        esquerda=i/(i−1)
        direita=i/(i+1)
        acum=acum*esquerda*direita
    print("Aproximação de π = ",2*acum)
    print("Erro = ",abs(2*acum−pi))
    return


def wallis_pi_2():
    num_fact=int(input("Desenvolvimento com quantos fatores? "))
    acum=1
    for i in range(1,num_fact/2):
        acum=acum*((2*i)**2)/((2*i)**2−1)
    print("Aproximação de π = ",2*acum)
    print("Erro = ",abs(2*acum−pi))
    return


def wallis_pi_3():
    num_fact=int(input("Desenvolvimento com quantos fatores? "))
    acum=1
    for i in range(1,num_fact):
        acum=acum*(2*i)/(2*i−1)*(2*i)/(2*i+1)
    print("Aproximação de π = ",2*acum)
    print("Erro = ",abs(2*acum−pi))
    return
```

Shell Python 16/16

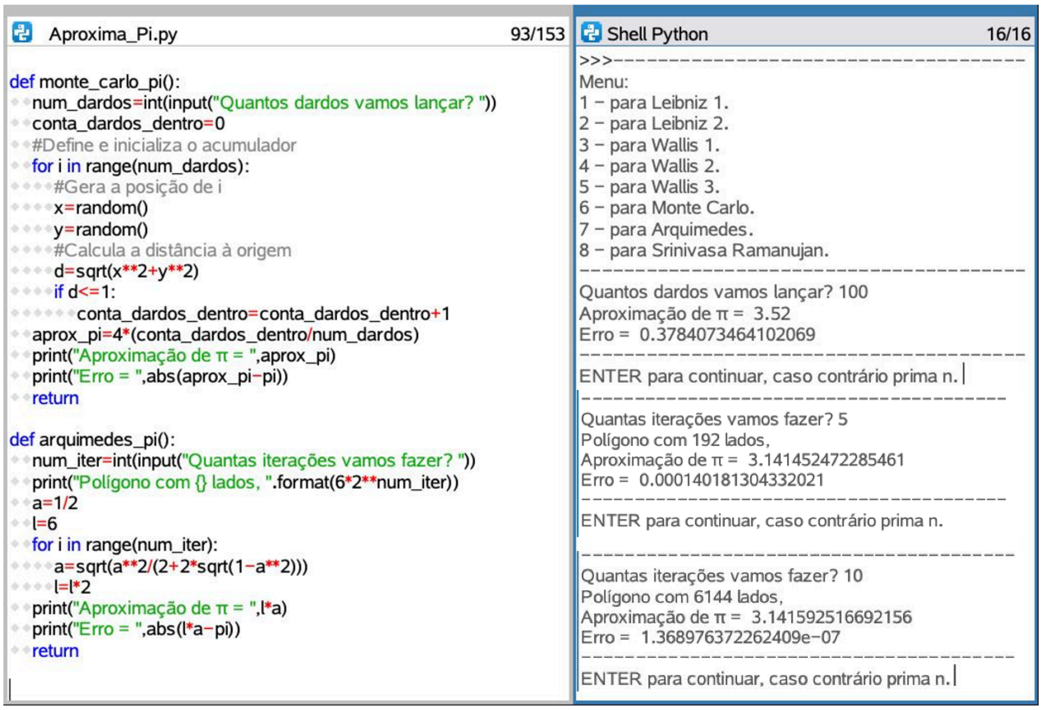
```
>>>-----------------------------------
Menu:
1 – para Leibniz 1.
2 – para Leibniz 2.
3 – para Wallis 1.
4 – para Wallis 2.
5 – para Wallis 3.
6 – para Monte Carlo.
7 – para Arquimedes.
8 – para Srinivasa Ramanujan.
--------------------------------------
Desenvolvimento com quantos fatores? 100
Aproximação de π =  3.125766292325387
Erro =  0.01582636126440606
--------------------------------------
ENTER para continuar, caso contrário prima n.
```

Fonte: Autor

Na Figura 19 vemos uma aplicação do Método de Monte Carlo onde fizemos 100 simulações e obtivemos uma aproximação de π com um erro muito elevado. Na mesma figura vemos o cálculo do valor de π através do processo de Arquimedes, considerando a aproximação da circunferência por polígonos regulares inscritos nela. Se considerarmos a circunferência de diâmetro 1 o seu perímetro será π (MATOS, 1998; MATOS; GONÇALVES, 2021). Fazendo 5 iterações vamos obter um polígono com 192 lados e obtemos um valor para π com um erro na ordem de 10^{-4}. Considerando o dobro das iterações, ou seja 10, vamos obter um polígono com 6144 lados e obtemos um valor para π com um erro que podemos considerar desprezável, da ordem de 10^{-7}.

Temos, com o método de Arquimedes, uma excelente oportunidade para ir estudar o método da exaustão (KATZ, 2010), para encontrar a área de uma figura, e relacioná-lo com o proposto por Arquimedes para encontrar um valor aproximado de π.

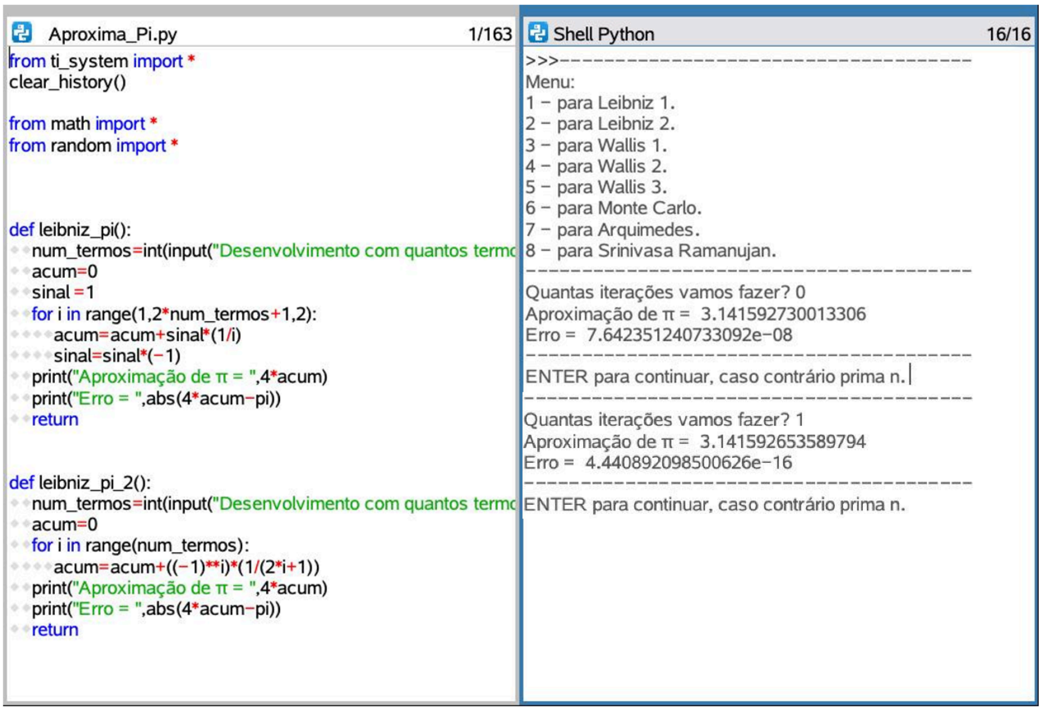
Figura 19 – Programas em *Python*



Fonte: Autor

Terminamos este texto apresentando a Figura 20 com a definição de fatorial em *Python* e o programa correspondente à fórmula apresentada por Ramanujan. Apenas com uma iteração $(n = 0)$ o erro da aproximação de π é da ordem de 10^{-8}, e com duas iterações $(n = 1)$ o erro é da ordem de 10^{-16}!

Figura 20 – Programas em *Python*



Fonte: Autor

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o presente texto pretendemos mostrar que a tecnologia de hoje pode ajudar a fazer uma viagem concreta pela História da Matemática; no caso presente explorámos diferentes modos de obter aproximações ao número π.

As "Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática" apontam a História da Matemática como uma das estratégias para promover o gosto por esta disciplina nos alunos (CARVALHO E SILVA *et al.*, 2020).

As Aprendizagens Essenciais do Ensino Básico referem que "a tecnologia desempenha um papel especialmente relevante por facilitar a transição entre diferentes tipos de representação e análises com maior detalhe ou magnitude, inacessíveis sem os recursos tecnológicos" (CANAVARRO *et al.*, 2021, pp. 3–4); foi isto exatamente o que fizemos ao apresentar as sucessivas aproximações de π.

A par da tecnologia surge o Pensamento Computacional, uma competência a desenvolver nas Aprendizagens Essenciais quer do Ensino Básico quer do Ensino Secundário, de onde destacamos o desenvolvimento de práticas de abstração, de decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, e o desenvolvimento de hábitos de depuração e otimização dos processos (CANAVARRO *et al.*, 2021; CARVALHO E SILVA *et al.*, 2023); também estas práticas foram evidenciadas ao longo do texto podendo ser feitas ainda mais explorações relacionadas com as apresentadas.

Nas Aprendizagens Essenciais do Ensino Secundário também se menciona o recurso sistemático à tecnologia o qual, como vimos neste texto, nos conduz à Resolução de Problemas que nos permitem estabelecer conexões (CARVALHO E SILVA *et al.*, 2023), sendo ponto de partida para exploração de outras noções como, por exemplo, a definição de limite que surge na aproximação apresentada por Arquimedes (MATOS, 1998; MATOS; GONÇALVES, 2021).

Como vimos na parte final, outras incursões pela História podem ser feitas na sala de aula. Terminamos referindo que este texto é, por si só, um exemplo de como a História da Matemática, o Pensamento Computacional, a Resolução de Problemas, as Conexões e, porque não, a Comunicação Matemática, podem ser levados para dentro da sala de aula de Matemática, sem necessitarmos de tecnologias muito sofisticadas (CARVALHO E SILVA, 1997, 1993). Basta-nos uma calculadora gráfica e querermos enfrentar desafios através da História da Matemática.

REFERÊNCIAS

CANAVARRO, Ana Paula; MESTRE, Célia; GOMES, Dulce; SANTOS, Elvira; SANTOS, Leonor; BRUNHEIRA, Lina; VICENTE, Manuela; GOUVEIA, Maria João; CORREIA, Paulo; MARQUES, Pedro Macias; ESPADEIRO, Rui Gonçalo. **Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico**. [*S. l.*]: Ministério da Educação, 2021. Disponível em: https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico.

CARVALHO E SILVA, Jaime. A história da matemática nos novos programas de Matemática em Portugal. *In*: NOBRE, Sérgio (ed.). **2nd Portuguese-Brazilian meeting on

the history of mathematics and 2nd national seminar on the history of mathematics. Proceedings. Rio Claro: UNESP, Departamento de Matematica, 1997. p. 165–172. Disponível em: https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/histmatprogr2.html.

CARVALHO E SILVA, Jaime. A reforma curricular e a História da Matemática. **Educação e Matemática**, n.º 27, p. 27–31, 1993. .

CARVALHO E SILVA, Jaime. History of Mathematics in the classroom: hopes, uncertainties and dangers. *In*: NOBRE, Sérgio (ed.). **Meeting of the HPM**. Blumenau: [*s. n.*], 1994a. p. 129–135. Disponível em: https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/hpm.html.

CARVALHO E SILVA, Jaime. **Princípios de Análise Matemática Aplicada**. [*S. l.*]: McGraw-Hill, 1994b.

CARVALHO E SILVA, Jaime; CANAVARRO, Ana Paula; ALBUQUERQUE, Carlos; MESTRE, Célia; MARTINS, Hélder; ALMIRO, João; SANTOS, Leonor; GABRIEL, Luís; SEABRA, Olga; CORREIA, Paulo. **Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática**. Lisboa: Direção Geral da Educação - Ministério da Educação, 2020. p. 345(345). Disponível em: https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Estudos_Relatorios/gtm_27_03_2020_relatorio_final.pdf.

CARVALHO E SILVA, Jaime; RODRIGUES, Alexandra; DOMINGOS, António; ALBUQUERQUE, Carlos; CRUCHINHO, Cristina; MARTINS, Helder; ALMIRO, João; GABRIEL, Luís; GRAÇA MARTINS, Maria Eugénia; SANTOS, Teresa; FILIPE, Nélida; CORREIA, Paulo; ESPADEIRO, Rui Gonçalo; CARREIRA, Susana. **Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Secundário**. Lisboa: Direção Geral da Educação - Ministério da Educação, 2023. Disponível em: http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-secundario.

COSTA, Ernesto. **Programação em Python: Fundamentos e Resolução de Problemas**. 1.ª ed. Lisboa: FCA - Editora de Informática, 2018.

ESTRADA, Maria Fernanda. A História da Matemática no ensino da Matemática. **Educação e Matemática**, n.º 27, p. 17–20, 1993. .

ESTRADA, Maria Fernanda; SÁ, Carlos Correia; QUEIRÓ, João Filipe; SILVA, Maria do Céu; COSTA, Maria José. **História da Matemática**. [*S. l.*]: Universidade Aberta, 2000.

KATZ, Victor J. **História da Matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

MATOS, João Filipe. Logo.Mat: Calculando PI. **Educação e Matemática**, n.º 5, p. 27–28, 1998. .

MATOS, João Filipe; GONÇALVES, Raul. Memória EeM: há 34 anos era assim... **Educação e Matemática**, n.º 162, p. 26, 2021. .

PESTANA, Dinis; VELOSA, Sílvio. **Introdução à Probabilidade e à Estatística**. 4.ª ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2008.