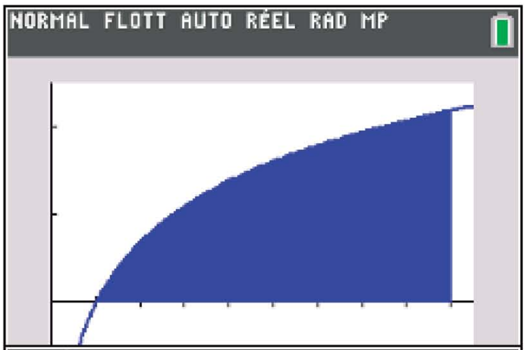
Méthode des rectangles

Enoncé

Il existe de nombreuses méthodes pour réaliser une intégration numérique : la méthode des rectangles est une méthode algorithmique permettant d'encadrer l'aire d'un domaine sous une courbe en réalisant une somme de surfaces de rectangles.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x)$. On note C_f la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On cherche à calculer l'aire A délimitée par C_f, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 9$. On a représenté cette aire en bleu ci-contre.



1. Le script `AIRERECT` contient la fonction Python **f** qui prend comme argument **x** et qui renvoie **ln(x)**.

Compléter les listes **x** et **y** de la fonction Python **graphe** pour représenter graphiquement la fonction **f** sur l'intervalle $[1; 9]$ avec 200 points.

ÉDITEUR : AIRERECT
LIGNE DU SCRIPT 0008

```
from math import log as ln
import ti_plotlib as plt

def f(x):
  y=ln(x)
  return y

def graphe():
  plt.cls()
  plt.window(0,10,-0.2,2.5)
  plt.axes("on")
  plt.grid(1,1,"dot")
  x=[...]
  y=[...]
  plt.plot(x,y,".")
```

Fns… | a A # | Outils | Exéc | Script

2. Compléter la fonction Python **meth_rect** qui prend comme argument **pas**, et qui affiche les rectangles et les valeurs approchées encadrant l'aire A recherchée. Lancer cette fonction en prenant **pas**=2 puis 1 puis 0,2.

3. Démontrer que la fonction F définie sur $[1\,;9]$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction f sur $[1\,;9]$. Vérifier les encadrements de l'aire A obtenus avec les valeurs approchées précédentes en calculant sa valeur à l'aide de la fonction F et de la calculatrice.

1. Fonction graphe

On utilise ici la définition des listes en compréhension c'est-à-dire que l'on définit directement à l'intérieur de la liste la description des éléments souhaités et leur nombre.

```
  x=[1+i/25 for i in range(200)]
  y=[f(i) for i in x]
```

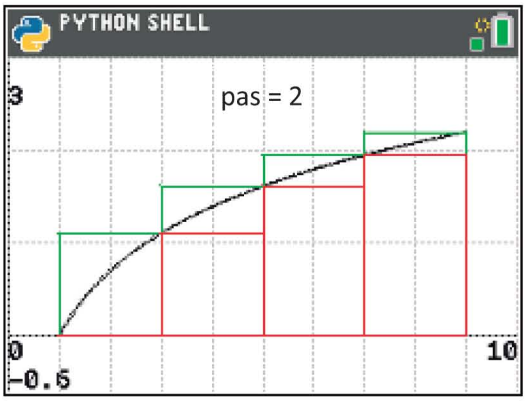
cls permet d'effacer l'écran ; **window** définit les valeurs extrêmes de la fenêtre ; **axes** affiche les axes (Ox) et (Oy) ; **grid** affiche les graduations ; **plot** affiche un tracé continu à partir des listes de coordonnées des points, ici les 200 points de coordonnées **(1+i/25;f(1+i/25))**.

2. Fonction meth_rect

ÉDITEUR : AIRERECT
LIGNE DU SCRIPT 0025

```
def meth_rect(pas):
  x,Sinf,Ssup=1,0,0
  while x<9:
    #rectangle supérieur
    x_r=[x,x,x+pas,x+pas,x] #abscisses des sommets
    y_r=[0,f(x+pas),f(x+pas),0,0] #ordonnées des sommets
    plt.color(0,255,0) #vert
    plt.plot(x_r,y_r,".")
    Ssup=Ssup+...
    #rectangle inférieur
    x_r=[x,x,x+pas,x+pas,x]
    y_r=[0,f(x),f(x),0,0]
    plt.color(255,0,0) #rouge
    plt.plot(x_r,y_r,".")
    Sinf=...+...
    x=...
  plt.color(255,0,0)
  plt.text_at(1,"Sinf="+str(Sinf),"center")
  plt.color(0,255,0)
  plt.text_at(2,"Ssup="+str(Ssup),"center")
  plt.show_plot()
```

Fns… | a A # | Outils | Exéc | Script



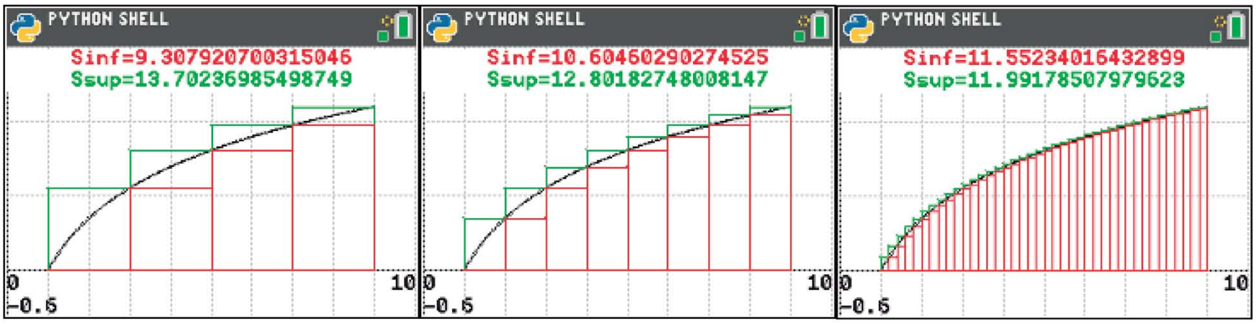
Méthode des rectangles

Sinf et **Ssup** représente les valeurs approchées (inférieure et supérieure de l'aire A recherchée : à chaque itération nous devons donc rajouter l'aire du rectangle suivant et augmenter **x** d'un pas (ci-contre) : **color** change la couleur en rouge (code **rgb** 255,0,0) ou en vert (code **rgb** 0,255,0).

```
    Ssup=Ssup+f(x+pas)*pas
    x_r=[x,x,x+pas,x+pas,x]
    y_r=[0,f(x),f(x),0,0]
    plt.color(255,0,0)
    plt.plot(x_r,y_r,".")
    Sinf=Sinf+f(x)*pas
    x=x+pas
```

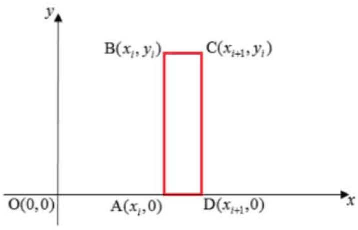
Toutes ces instructions sont accessibles dans [math] choix 5:**ti_plotlib**.

On obtient alors les résultats suivants avec **pas**=2 puis 1 puis 0,2 :



L'aire A vérifie toujours : **Sinf** $< A <$ **Ssup** .

Remarque : pour tracer un rectangle ABCD à l'aide de la bibliothèque **matplotlib** de Python, on utilise l'instruction **plot** avec les listes des coordonnées de A, B, C, D et A. On termine par A pour fermer le tracé.



3. Calcul de l'aire

Méthode utilisant une primitive : on calcule la dérivée de la fonction F.

On a $F'(x) = \left(1 * \ln(x) + x * \frac{1}{x}\right) - 1 = \ln(x)$ pour tout réel $x \in [1\,;9]$, donc la fonction F est bien une primitive de f sur $[1\,;9]$.

Ainsi $A = \int_1^9 f(x)\,dx = F(9) - F(1) = 9\ln(9) - 8$ soit $A \approx 11{,}775$.

On appuie sur [2nde] [math] et on sélectionne [∫ d]

Méthode graphique : On peut obtenir une valeur approchée de l'aire en utilisant le menu calculs de la calculatrice accessible avec [2nde] [trace] choix 7: ∫f(x)dx. On entre successivement les bornes 1 puis 7 (valider en appuyant sur [entrer]).

On obtient une aire $A \approx 11{,}775$ ce qui correspond bien à une valeur vérifiant les encadrements de la question 2°).