Thème : Analyse

# Nombre dérivé et tangente

TI-82 Advanced
Edition Python

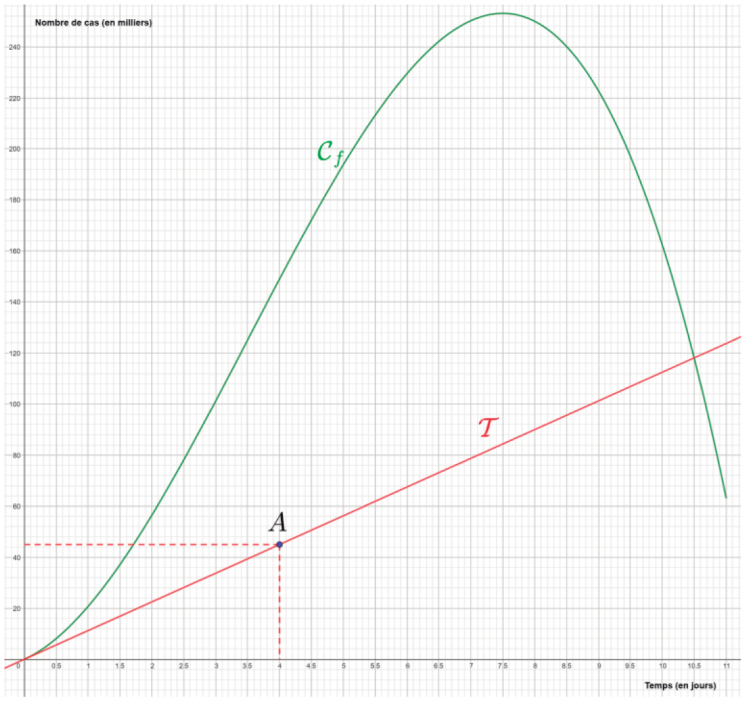
TI-83 Premium CE
Edition Python

## Enoncé

Lors d'une épidémie observée sur une période de onze jours, un institut de veille sanitaire a étudié l'évolution du nombre de personnes malades. La durée, écoulée à partir du début de la période, est exprimée en jours. Elle est notée $t$. On modélise le nombre de cas grâce à la fonction $f$ suivante, où $f(t)$ représente le nombre personnes malades, en milliers, à l'instant $t \in [0\,;11]$ :

$$f(t) = -t^3 + \frac{21}{2}t^2 + \frac{45}{4}t$$

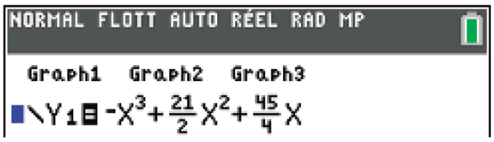
On donne ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction $f$. La droite $\mathcal{T}$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $0$ et passe par le point $A$ de coordonnées $(4\,;45)$.



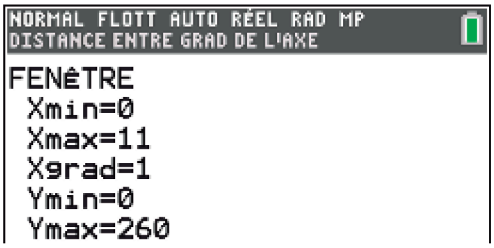

1. Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Calculer $f'(t)$ pour tout $t$ dans l'intervalle $[0\,;11]$.
3. En déduire l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$, en justifiant tous les calculs.

## 1. Image et nombre dérivé

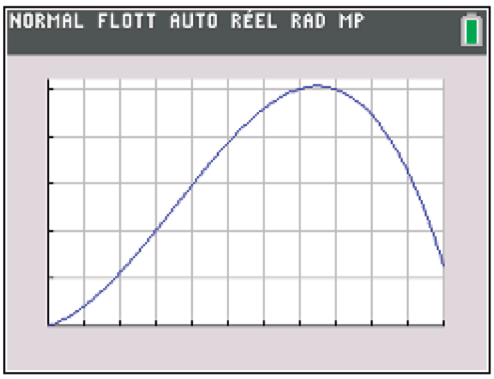
Nous allons commencer par utiliser la calculatrice pour obtenir la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.




- Dans le menu f(x), on saisit l'expression $f(x)$ dans **Y1**.




- Avant de passer au graphique, on peut utiliser celui de l'énoncé pour configurer aisément notre fenêtre graphique, en appuyant sur la touche fenêtre. La capture d'écran ci-contre vous permet de voir cette utilisation astucieuse de l'énoncé, pour gagner un temps précieux sur le cadrage de la courbe.



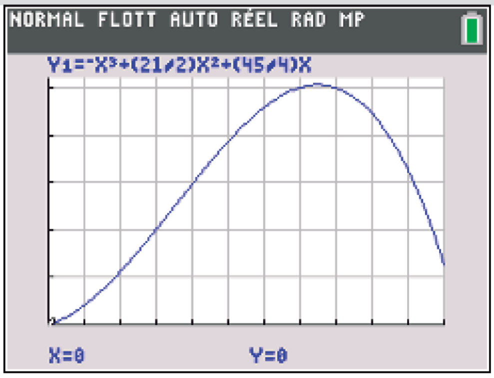

- Enfin, on trace la courbe $\mathcal{C}_f$ en appuyant sur la touche graphe. L'avantage de représenter cette courbe sur la calculatrice est que nous allons pouvoir vérifier les conjectures graphiques demandées dans cette 1ère question.

# Nombre dérivé et tangente



- Commençons par $f(0)$. A l'aide des touches 2nde + trace (calculs f4), on sélectionne la commande **`1:image`**. Puis on entre la valeur 0 dans le bandeau inférieur de la fenêtre graphique alors affichée. On valide par entrer et on lit l'image de 0 par la fonction $f$ :

$$f(0) = 0$$

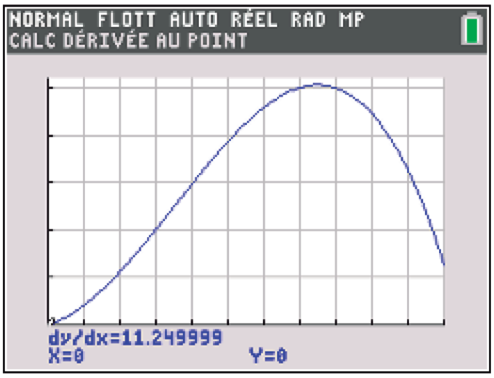



- Nous allons suivre le même procédé pour obtenir le nombre dérivé de $f$ en $x = 0$.

  A l'aide des touches 2nde trace (calculs f4), on sélectionne la commande **`6:dy/dx`**. Contrairement à la commande précédente, il n'y a pas de bandeau qui apparaît automatiquement en bas de la fenêtre graphique. Toutefois, en appuyant sur la touche 0, le bandeau s'affiche. On valide par entrer et on lit le nombre dérivé de $f$ en $x = 0$.

  Attention : la valeur affichée par la calculatrice sera fréquemment une valeur approchée. Ici, la valeur est très certainement de **`11.25`**, c'est-à-dire $\frac{45}{4}$, ce qui doit nous rappeler les coordonnées du point $A$ et donc nous aider à réaliser la conjecture demandée.

$$f'(0) = \frac{45}{4}$$



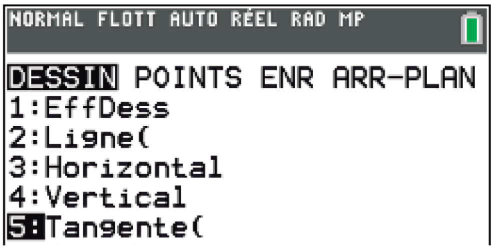

## 2. Fonction dérivée $f'$

Pour tout $t$ dans l'intervalle $[0\,;11]$, $f'(t) = -3t^2 + \frac{21}{2} \times 2t + \frac{45}{4} = -3t^2 + 21t + \frac{45}{4}$

## 3. Equation de la tangente $\mathcal{T}$

Afin d'obtenir l'équation de la tangente à l'aide de la calculatrice, on utilise les touches 2nde prgm (dessin C) pour entrer dans l'onglet **`dessin`**.

On sélectionne alors la commande **`5:Tangente`** (puis on valide avec entrer).



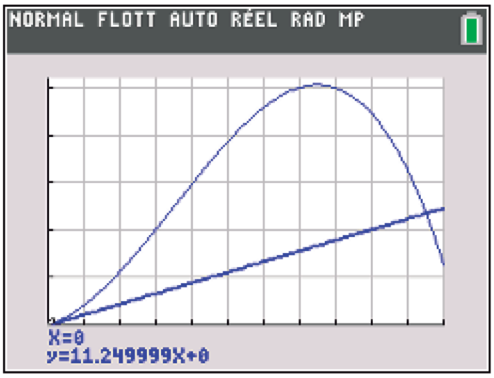

On se retrouve alors dans la fenêtre graphique. Il suffit alors d'entrer la valeur 0 (le bandeau **`X=`** s'affiche alors, comme pour le nombre dérivé) et de valider une dernière fois par entrer. La tangente $\mathcal{T}$ est alors tracée et son équation réduite apparaît dans la partie inférieure de l'écran.

Reste à valider la conjecture par les calculs :

- $f(0) = -0^3 + \frac{21}{2} \times 0^2 + \frac{45}{4} \times 0 = 0$
- $f'(0) = -3 \times 0^2 + 21 \times 0 + \frac{45}{4} = \frac{45}{4}$

Ainsi, l'équation réduite de $\mathcal{T}$ est :

$$\mathcal{T} \ : \ y = f'(0) \times (t - 0) + f(0)$$




C'est-à-dire :

$$\mathcal{T} \ : \ y = \frac{45}{4} t$$