

# Rubrik: Tipps und Tricks

## Gleichungssysteme mit Parametern

Dr. Hubert Langlotz

Für viele, die seit längerem mit CAS-Rechnern arbeiten, ist das folgende Problem vermutlich bekannt. Da aber z. B. in Thüringen viele neue Nutzer hinzu gekommen sind, ist es vielleicht angebracht, noch einmal darauf hin zu weisen. (vgl. auch TI-Nachrichten 2/99, K.-H. Keunecke: *Vorsicht bei Gleichungssystemen mit Parametern: rref() löst nicht alle!*)

### Beispielaufgabe:

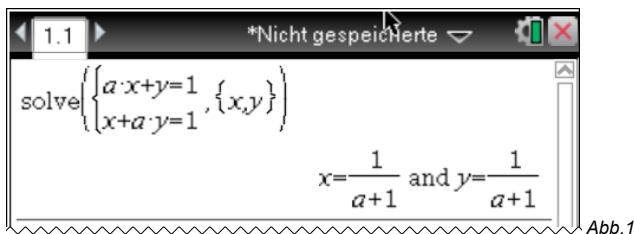
Man bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$a \cdot x + y = 1 \text{ und } x + a \cdot y = 1$$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter  $a$ !

### Erster Lösungsversuch

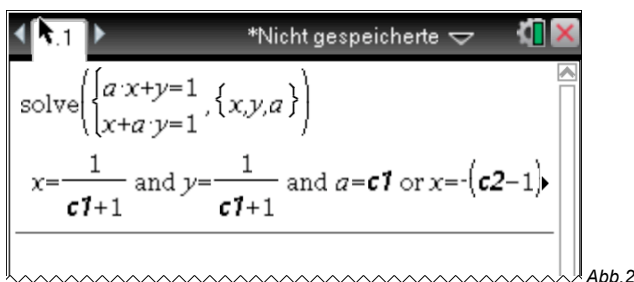
Ein erster Versuch mit den Lösungsvariablen  $x$  und  $y$  liefert nur eine Lösung.



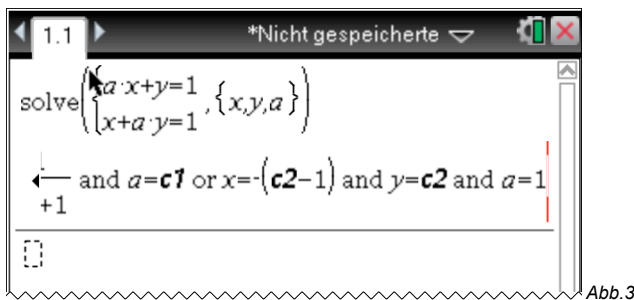
Von den Schülerinnen und Schülern sollte man vielleicht erwarten, dass sie den Fall  $a = -1$  ausschließen und interpretieren können (Was bedeutet dies?).

### Zweiter Lösungsversuch

Was aber passiert, wenn man das Gleichungssystem **so** löst, also drei Lösungsvariablen angibt?



Man sieht, dass noch ein weiterer Fall ( $a=1$ ) diskutiert werden muss.



Interessant wird es, wenn man die Gleichungen als lineare Funktionen auffasst und sich diese in Abhängigkeit vom Parameter  $a$  darstellen lässt.

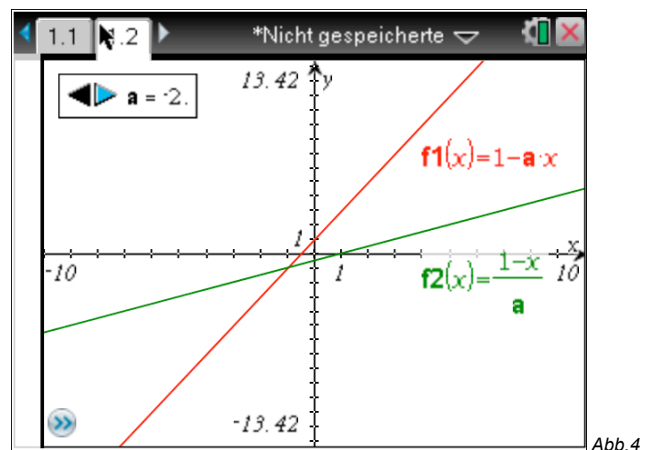
Formt man die beiden Gleichung nach  $y$  auf, ergeben sich die Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  mit:

$$f_1(x) = y = 1 - a \cdot x \text{ bzw. } f_2(x) = y = (1 - x) / a$$

Es entstehen in der Grafik vier unterschiedliche Fälle, die nachfolgend diskutiert werden.

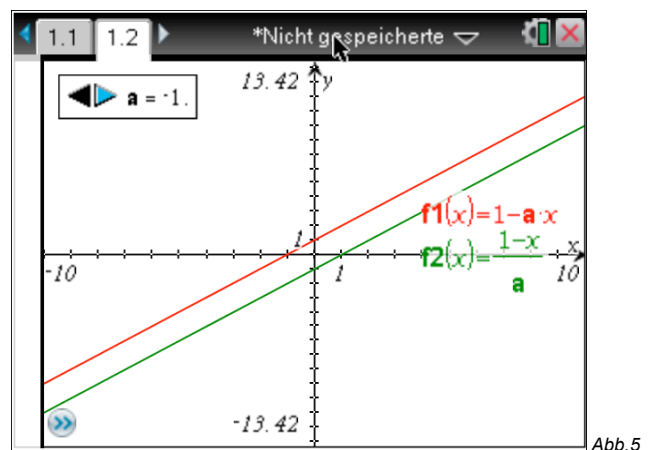
### Fall 1: $a \neq -1$ und $a \neq 0$

Hier handelt es sich um zwei sich schneidende Geraden, d. h. es existiert eine eindeutige Lösung.



### Fall 2: $a = -1$

Die diesem Fall entstehen zwei zueinander parallele Geraden, also hat das Gleichungssystem keine Lösung. Dieser Fall ist auch bei Verwendung des solve-Befehls mit 3 Lösungsvariablen nicht sofort ersichtlich.



### Fall 3: $a = 0$

Eigentlich handelt es sich hier auch wieder um den Fall 1, allerdings wird die Gerade zu  $x = 1$  nicht gezeichnet und der gemeinsame Punkt  $(1|1)$  ist in der Grafik nicht erkennbar.

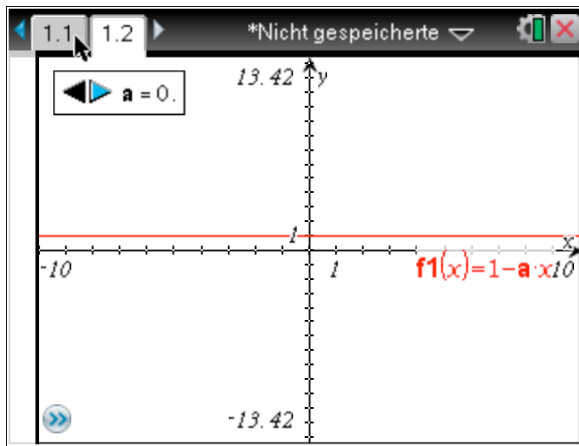


Abb.6

**Fall 4:  $a = 1$** 

Beide Gleichungen sind identisch, d. h. es existieren unendlich viele Lösungen. Dies ist der durch Anwendung des solve-Befehls mit drei Lösungsvariablen gefundene weitere Fall.

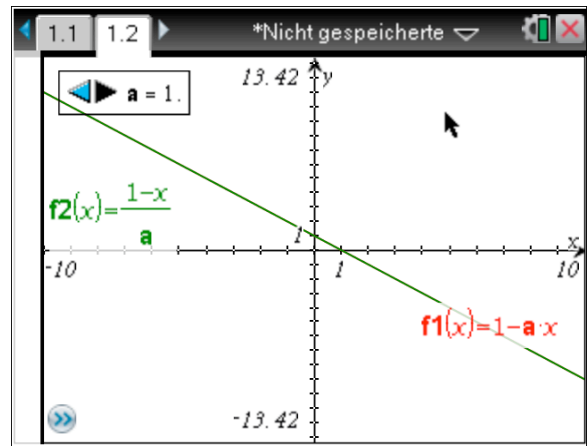


Abb.7

**Zusammenfassend lässt sich feststellen:**

Kommen in einem Gleichungssystem zusätzliche Parameter vor, so sollte man beim Lösen immer nach allen „Variablen“ lösen lassen. Eine graphische Kontrolle (wenn möglich) ist zu empfehlen. Der ebenfalls im Menü befindliche Befehl linsolve() sollte in solchen Fällen nicht verwendet werden, da dort z.B. bei 2 Gleichungen nur 2 Variablen angegeben werden können.

**Autor**

Dr. Hubert Langlotz,  
Wutha-Farnroda (Thüringen)  
[langlotz-mosbach@t-online.de](mailto:langlotz-mosbach@t-online.de)