# Übergangsmatrix und Bevölkerungswanderung im Grundkursabitur

*Günter Heitmeyer*

### Vorbemerkung

Stochastische Matrizen wurden als Unterrichtsgegenstand gewählt, um Verbindungen zwischen Themen der Stochastik und der Linearen Algebra ziehen zu können. Der dem Unterricht zur Verfügung stehende Zeitraum betrug etwa 5 Wochen. Neu war für die Schüler im Abitur der Teil c), über den eine Verbindung auch zum Thema „beschränktes Wachstum" aus der Analysis in der Prüfung möglich wurde.

### Aufgabe

Ein Land „XYZ" sei aufgeteilt in drei Wirtschaftsregionen R1, R2 und R3. Zwischen diesen Regionen finde eine jährliche Bevölkerungswanderbewegung statt gemäß folgender Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}06 & 0{,}80 & 0{,}20 \\ 0{,}04 & 0{,}10 & 0{,}70 \end{pmatrix} \text{ mit dem Startvektor } \vec{x} = \begin{pmatrix} 14{,}40 \\ 20{,}60 \\ 25{,}00 \end{pmatrix}.$$

Die Zahlen im Startvektor sind in Millionen zu verstehen und sind in der Reihenfolge R1, R2 und R3 von oben nach unten im Startvektor (Anfangsverteilung im Jahre 0!) eingetragen. Entsprechend ist die Anordnung in der Matrix A zu sehen. Im betrachteten Modell soll zunächst davon ausgegangen werden, dass sich im Land „XYZ" Geburten und Todesfälle aufheben und Veränderungen in den Regionen nur durch die Bevölkerungswanderbewegungen entstehen.

**a)** Interpretieren Sie die Bedeutung der Werte in der Matrix A und stellen Sie den Prozess graphisch dar. Finden Sie außerdem mit Angabe der Begründung heraus, wie viele Personen innerhalb der ersten 2 Jahre insgesamt von Region R2 zu Region R1 abwandern.

**b)** Versuchen Sie experimentell die Entwicklung in den nächsten 50 Jahren zu ermitteln, zu beschreiben und zu deuten. Wählen Sie auch andere Startvektoren! Lösen Sie die Gleichung

$$A \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

zur Bestimmung eines unbekannten Startvektors $\vec{x}$ und vergleichen Sie mit den bisherigen Resultaten, wenn vorausgesetzt wird, dass die Summe der drei Komponenten weiterhin 60,00 Millionen ist. Stellen Sie Zusammenhänge mit den durchgeführten Experimenten her!

**c)** Aus den Daten von oben ergibt sich für die Region R1 folgende Entwicklung:

| **Jahre** | 0 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|
| **Bevölkerung R1** | 14,400 | 24,888 | 28,325 |

| **Jahre** | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|
| **Bevölkerung R1** | 29,820 | 29,981 | 29,998 |

Begründen Sie, wie diese Tabelle entstanden ist, und finden Sie eine geeignete Funktion, die diese Entwicklung beschreibt. Bestimmen Sie möglichst rechnerisch das Jahr, in dem die Bevölkerungszahl von R1 mindestens 29,00 Millionen beträgt! Zeichnen Sie den Graphen!

**d)** Versuchen Sie herauszufinden, wie sich die Bevölkerung von „XYZ" in den ersten drei Jahren entwickeln würde, wenn noch ein Wachstum von 3% vorhanden wäre, gemessen an der Bevölkerungszahl des Vorjahres in jeder einzelnen Region!

**Hilfsmittel: Taschenrechner TI-83 Plus**

### Lösungshinweise:

**Aufgabenteil a)**

Die Bedeutung der Zahlenwerte aus der Übergangsmatrix wird im nachfolgenden Übergangs-Graphen deutlich: 90% der Personen aus R1 verbleiben in der Region, es kommen noch jeweils 10% der Bevölkerung aus den Regionen R2 und R3 hinzu.

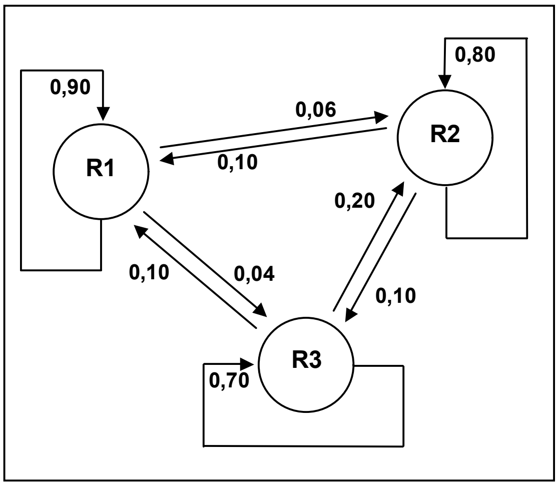


*Abb. 1*

Im ersten Jahr gehen 20,6·0,1 Millionen Personen von R2 nach R1, im 2. Jahr sind es 22,344·0,1 Millionen, insgesamt 2,06+2,2344=4,2944. Der Wert für das 1. Jahr ergibt sich direkt aus der Aufgabenstellung, der Zahlenwert 22,344 ist die 2. Koordinate von

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 17{,}52 \\ 22{,}344 \\ 20{,}136 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung kann auch mit Hilfe eines Baumdiagramms ähnlich wie in der Stochastik gefunden werden!

**Aufgabenteil b)**

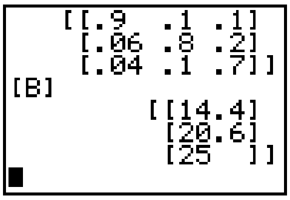


*Abb. 2*

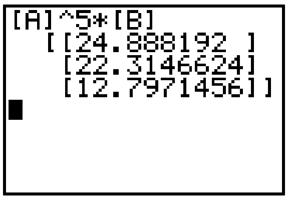


*Abb. 3*

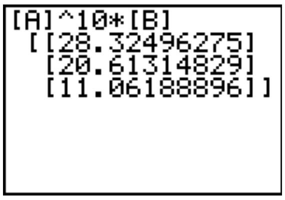


*Abb. 4*

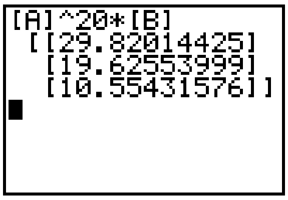


*Abb. 5*

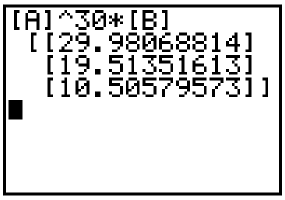


*Abb. 6*

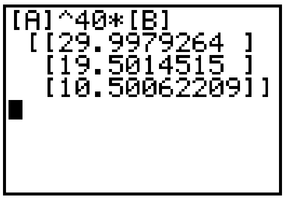


*Abb. 7*

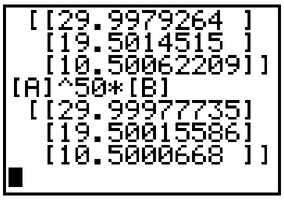


*Abb. 8*

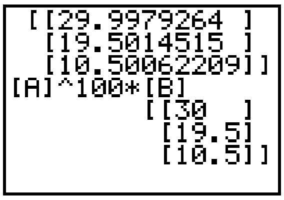


*Abb. 9*

Aus den Abbildungen 2 – 9 ist für den gegebenen Startvektor eine Entwicklung zum "Grenzvektor" erkennbar.

Bei anderen Startvektoren ist die gleiche Entwicklung zu beobachten. Dies liegt daran, dass z.B. die Region R1 stabiler gegen Abwanderung ist. Erst bei größerer Bevölkerung in R1 wirken sich die niedrigeren Übergangswahrscheinlichkeiten in den Absolutzahlen aus, bis schließlich Zu- und Abwanderung gleich groß sind.

**Hinweis:** Ist allerdings beim Startvektor die Zahl von R1 größer als 30, dann fällt die Einwohnerzahl von R1 bis auf die Grenzsituation „30“ ab!

Die Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$ legt die Bedingung für einen Startvektor fest, so dass sich beim Ergebnis nichts mehr ändert. Es ergibt sich ein Gleichungssystem, bei dem in der Hauptdiagonalen gegenüber A überall "1" abgezogen wird!

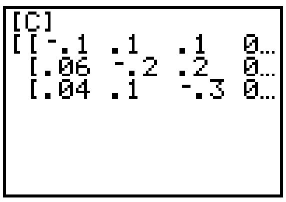


*Abb.10*

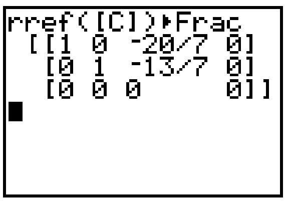


*Abb. 11*

Es ist zu berücksichtigen, dass die Gesamtbevölkerung mit 60 Millionen als konstant angenommen wird. Gemäß Abbildung 11 ergibt sich dann für die Komponenten des Lösungsvektors:

$$z = t \wedge x - \frac{20}{7}t = 0 \wedge y - \frac{13}{7}t = 0 \wedge x + y + z = 60$$

$$\Rightarrow \frac{20}{7}t + \frac{13}{7}t + t = 60 \Leftrightarrow 40t = 420 \Leftrightarrow t = 10{,}5$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 19{,}5 \\ 10{,}5 \end{pmatrix}$$

Der Grenzvektor ist also gleich dem Fixvektor, es finden keine Veränderungen mehr statt.

**Aufgabenteil c)**

Die Bevölkerungszahl in R1 ergibt sich jeweils aus den ersten Komponenten der in Aufgabenteil b) berechneten Vektoren. Überträgt man diese Werte in den Listeneditor, kann eine graphische Darstellung erfolgen:

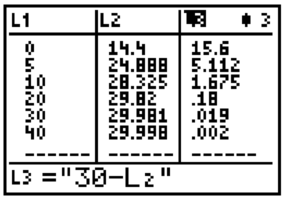


*Abb. 12*

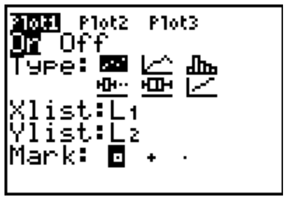


*Abb. 13*

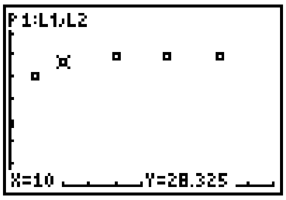


*Abb. 14*

Aus den Werten und der graphischen Darstellung erkennt man, dass der Graph nach oben gekrümmt ist und eine Schranke 30, die sich auch in b) ergibt, eine sinnvolle Angabe ist. Als Ansatz wird also gewählt:

$$f(x) = 30 - a \cdot e^{k \cdot x} \Leftrightarrow a \cdot e^{k \cdot x} = 30 - f(x),$$

siehe oben, Liste L3 in Abb. 12. Auf die Listen L1 und L3 wird eine Exponentielle Regression angewandt.


*Abb. 15*

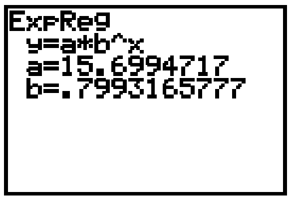


*Abb. 16*

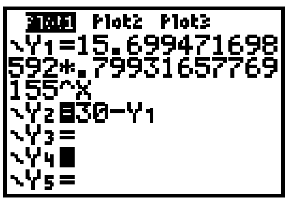


*Abb. 17*

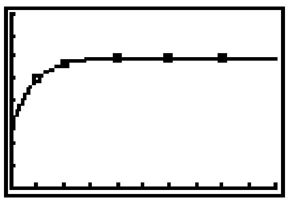

*Abb. 18*

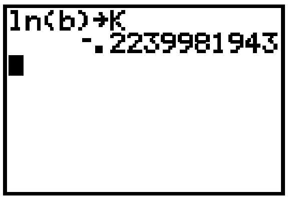


*Abb. 19*

Um zu ermitteln, wann die Bevölkerung in der Region R1 auf 29 Millionen angestiegen ist, wird folgende Gleichung gelöst:

$$29 = 30 - a \cdot e^{k \cdot x} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = e^{k \cdot x}$$

$$\Leftrightarrow k \cdot x = \ln\left(\frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1/a)}{k} = 12{,}293...$$

Im 13. Jahr werden mehr als 29 Millionen Menschen in R1 leben!

**Aufgabenteil d)**

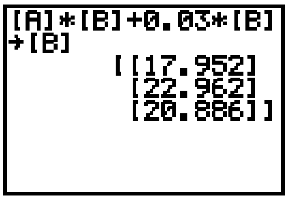


*Abb.20*

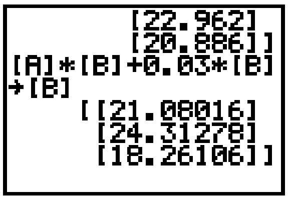


*Abb. 21*

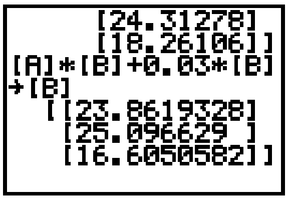


*Abb. 22*

Die Summe der Komponenten im jeweiligen Lösungsvektor erhöht sich um 3%, im ersten Jahr also z.B. um 1,8 Millionen.

Explizite Form: $\vec{x}_n = (A + 0{,}03 \cdot E)^n \cdot \vec{x}$,

dabei ist E die Einheitsmatrix (von den Schülern so allgemein nicht zu erwarten!).

Es wäre als Modell aber auch denkbar, dass man die Neugeborenen anteilmäßig gleich in die Wanderungen mit einbezieht. Dadurch ergeben sich geringe Unterschiede!

1. Jahr: $\vec{x}_1 = A \cdot \vec{x} \cdot 1{,}03 = \begin{pmatrix} 18{,}0456 \\ 23{,}01432 \\ 20{,}74008 \end{pmatrix}$

2. Jahr: $\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1 \cdot 1{,}03 = \begin{pmatrix} 21{,}2349744 \\ 24{,}35147424 \\ 18{,}067551361 \end{pmatrix}$

3. Jahr: $\vec{x}_3 = A \cdot \vec{x}_2 \cdot 1{,}03 = \begin{pmatrix} 24{,}05398091 \\ 25{,}09985177 \\ 16{,}40978732 \end{pmatrix}$

Explizite Form: $\vec{x}_n = 1{,}03^n \cdot A^n \cdot \vec{x}$

Bei den Lösungen der Schülerinnen und Schüler wurde das letzte Modell häufiger zur Lösung benutzt, die Ergebnisse wurden iterativ gefunden, nicht über die explizite Form.

**Autor:**
Günter Heitmeyer
Parkstraße 6
D-31655 Stadthagen
Schule: Ratsgymnasium Stadthagen
E-Mail: guenter.heitmeyer@t-online.de