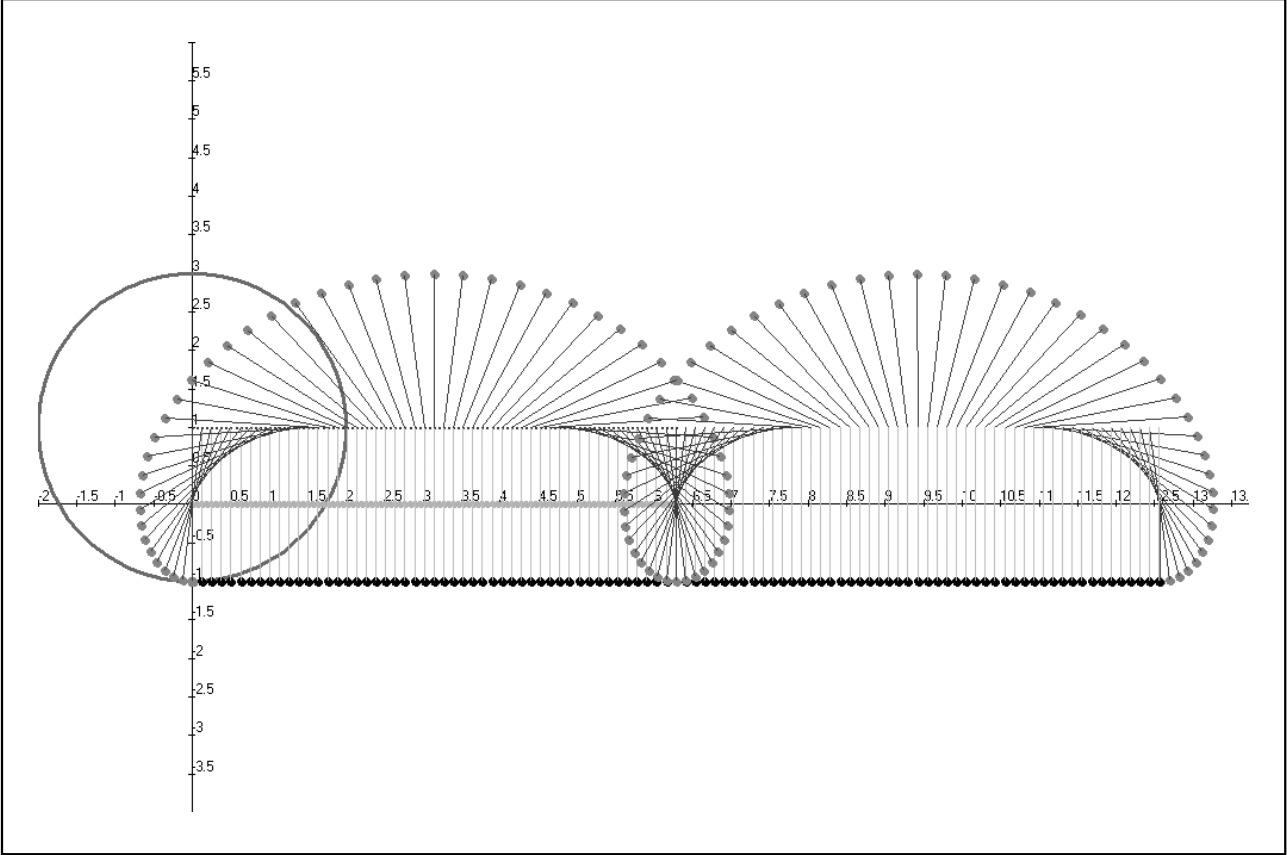


Mathematik mit CAS im Grundkurs
Unterricht – Strategien - Klausuren - Abitur
Das Berliner CAS-Projekt Sekundarstufe 2



Eberhard Lehmann

Mathematik mit CAS im Grundkurs

Unterricht – Strategien - Klausuren - Abitur

Eberhard Lehmann

© 2005 Texas Instruments

Dieses Werk wurde in der Absicht erarbeitet, Lehrerinnen und Lehrern geeignete Materialien für den Unterricht an die Hand zu geben. Die Anfertigung einer notwendigen Anzahl von Fotokopien für den Einsatz in der Klasse, einer Lehrerfortbildung oder einem Seminar ist daher gestattet. Hierbei ist auf das Copyright von Texas Instruments hinzuweisen. Jede Verwertung in anderen als den genannten oder den gesetzlich zugelassenen Fällen ist ohne schriftliche Genehmigung von Texas Instruments nicht zulässig.

Layout: Texas Instruments, Eberhard Lehmann

Druck: Pinsker Druck und Medien

Mathematik mit CAS im Grundkurs

Unterricht – Strategien - Klausuren - Abitur

Das Berliner CAS-Projekt Sekundarstufe 2 – 2003-2005

Inhaltsverzeichnis

	Vorwort	2
1.	Projektplanung – Projektziele	3-4
2.	Projekttablauf Workshops – Unterrichtsbesuche - Abschlusstagung	5-8
3.	Unterrichtsbeispiele mit CAS-Einsatz	9-32
3.1	Bericht über die ersten drei Wochen des Einsatzes des Taschencomputers VOYAGE™ 200 im Grundkurs Mathematik, Klasse 12 (Lutz Geist)	9
3.2	Ableitung der Sinus-Funktion (Matthias Müller)	13
3.3	Näherungsweise Zeichnung von Ableitungsfunktionen mit dem Taschencomputer	21
3.4	Wachstumsfunktionen im Leistungskurs Mathematik (Ursula Wunsch)	24
3.5	Viele Kreise – eine Unterrichtsstunde im Grundkurs, 1. Semester	27
3.6	Anmerkungen zu Hausarbeiten mit CAS	31
4.	Klausuren mit CAS-Einsatz	33-46
4.1	Anmerkungen zur Zeiteinschätzung bei der Bearbeitung von CAS-Aufgaben in Abitur- und anderen Klausuren und in Klassenarbeiten	33
4.2	Tipps für Klassenarbeiten mit CAS – auch nützlich für den Unterricht	34
4.3	Eine Grundkursklausur zur Analytischen Geometrie (Lutz Geist)	39
4.4	Eine Grundkurs-Klausur zur Analysis (Christiane Vogt)	40
4.5	Einige Leistungskurs-Klausuraufgaben (Angelika Reiß, Ulrich Döring)	42
5.	CAS im Abitur	47-58
5.1	Computer und offene Aufgaben in Klausuren und im schriftlichen Abitur (Diskussionsbeitrag)	47
5.2	Vorschlag für eine Abituraufgabe (Günter Dreesen-Meyer)	50
5.3	Eine ausführlich kommentierte Grundkurs-Abitur-Klausur	52
5.4	Mündliches Abitur mit dem Taschencomputer	55
6.	Schülermeinungen	59-61

Vorwort

Das vorliegende Heft befasst sich mit Unterrichtsergebnissen aus dem 2. Berliner CAS-Projekt – diesmal für die Sekundarstufe 2. Wegen der Fülle des entstandenen Materials können hier nur Teilbereiche dargestellt werden. Die dazugehörigen Daten über Projektbedingungen und Projektablauf, die insbesondere für Organisatoren ähnlicher Projekte wichtig sind, können nachgelesen werden unter www.snafu.de/~mirza in der Datei *Berliner-CAS-Projekt-Sek2.pdf*.

Zusammen mit den schon erschienenen beiden Evaluations-Heften zum 1. Berliner CAS-Projekt Sekundarstufe 1 (2001-2003), veröffentlicht u.a. bei BK-Teachware, und dem Heft „Klassenarbeiten mit Computeralgebra in der Sekundarstufe 1 (Arbeitstexte, Lösungsansätze, Kommentare zum CAS-Einsatz, Ergänzungen) - Texas Instruments 2004“ ergibt sich damit ein abgerundeter Überblick über Berliner Projekt-Erfahrungen zur Unterrichtspraxis mit CAS-Rechnern.

Das vorliegende Heft führt bis hin zum schriftlichen Abitur mit CAS. Leider können die von den Projekt-Kolleginnen und –Kollegen gestellten Aufgaben nicht veröffentlicht werden, da die Abiturarbeiten noch „in Arbeit“ sind. Dafür findet der Leser jedoch Hinweise zur Erstellung von Abituraufgaben mit CAS (Kapitel 5) und diverse Klausuraufgaben aus den Projektkursen (Kapitel 3). Kapitel 3 enthält Unterrichtssequenzen meistens zu Grundkursthemen, wie sie von Projekt-Lehrerinnen und Lehrern durchgeführt wurden. Diese Sequenzen werden wegen ihrer detaillierten Ablaufschilderung und wegen des Materialangebots insbesondere für CAS-Anfänger nützlich sein. Mit den Kapiteln 3 bis 5 wird der Unterrichtspraxis breiter Raum gegeben. Hier kommen besonders die Projekt-Lehrerinnen und –Lehrer zu Wort und sind damit auch an der vorliegenden Evaluation direkt beteiligt.

Die Darstellung der organisatorischen Rahmenbedingungen und Maßnahmen beschränkt sich jedoch bewusst auf wenige Aspekte in den Kapiteln 1 und 2, siehe Anfangsbemerkung im Vorwort.

An einigen Stellen des Heftes finden sich „Blickpunkte“, die eingefügt wurden, um den Lesern weitere Anregungen für die Unterrichtsarbeit zu geben. Dabei geht es um das Analysieren und Interpretieren mathematischer Abbildungen.

→ Blickpunkte stehen auf den Seiten 18, 20, 28, 41, 44, 58.

Abschließend wird auch auf diesem Weg allen Projekt-Teilnehmerinnen und –Teilnehmern für ihr Engagement bei der Durchführung des Projekts gedankt. Für die Arbeit erhielten sie keinerlei Stundenermäßigungen! Besonderer Dank geht an die Kolleginnen und Kollegen, die Material für die vorliegende Evaluation zur Verfügung gestellt haben. Die Schulleiter haben das Projekt durch die konsequente Einhaltung ihrer Beurlaubungszusagen für die vielen Workshops gefördert.

Folgende Institutionen waren wichtige Partner für die Durchführung des Projekts:

- Die Berliner Senatsverwaltung für Schulen hat die Geldmittel für ca. 700 Taschencomputer bereitgestellt.
- Das Berliner Fortbildungsinstitut LISUM und das Projekt T3-Münster haben die Workshops finanziert.
- Die Firma DYNATECH hat auf die Rechnerbestellung durch einige Literaturzugaben für die Schulen reagiert.
- Texas Instruments hat das Projekts durch diverse Aktionen gefördert und den Abschlussbericht finanziert.

Berlin, den 7.7.2005

Eberhard Lehmann, Projektleiter

1. Projektplanung – Projektziele

Projektleitung: Dr. Eberhard Lehmann, mirza@snaflu.de, www.snaflu.de/~mirza

Projektgruppe: 7 Berliner Schulen (Details siehe unten)

1.1 Kurze Beschreibung des Vorhabens

(A) Projekt-Grundlagen

(1) Durchführung von Mathematikunterricht (MU) mit Taschencomputer-Einsatz (TC-Einsatz) in Grundkursen, wobei jedem Schüler ein TC des Typs VOYAGE™ 200 der Firma Texas Instruments mit einem DERIVE-ähnlichen Computeralgebrasystem (CAS) zur Verfügung steht. Der VOYAGE™ 200 ist das Nachfolgemodell des TI-92-Plus.

Der TC verbleibt während des Projekts ständig beim Schüler, so dass dieser ortsunabhängig bzw. unabhängig von einem PC-Raum, also auch zu Hause zur Verfügung steht.

(2) Das Projekt wird überwiegend in Grundkursen durchgeführt, um den Mathematikunterricht gerade in diesen Gruppen zu fördern und die Motivationslage der Grundkursschüler zu verbessern.

(3) Das Projekt ist einem zeitgemäßen MU verpflichtet, der gekennzeichnet ist durch

- offene Unterrichtsformen mit selbständiger Schülerarbeit,
- eine veränderte Aufgabenkultur (offene Aufgaben, Anwendungsbezug, Problemorientierung) und
- Medieneinsatz.

(4) Das Hauptaugenmerk liegt auf den Aspekten

- CAS-Einsatz bei Klausuren, insbesondere auch in Abiturklausuren,
- Entwurf von Arbeitsblättern mit CAS-Einsatz,
- Hausaufgaben mit CAS-Einsatz (Nachbereitung / Übung, Vorbereitung von Unterricht).

(B) Was wird von den teilnehmenden Lehrern / Schulen erwartet?

(1) Engagierte LehrerInnen, die mit ihren Schülerinnen und Schülern an den oben formulierten Zielen gemeinsam mit den anderen beteiligten Kolleginnen und Kollegen und der Projektleitung arbeiten wollen. Geringe Erfahrungen im Computereinsatz im Unterricht sind erwünscht.

(2) Zu den Erwartungen gehört die Verpflichtung zur aktiven Teilnahme an den angebotenen Workshops und an anderen einschlägigen Veranstaltungen. Die Voraussetzungen hierzu müssen von der jeweiligen Schulleitung gesichert sein.

(3) Von jeder beteiligten Schule sollen in der Regel 2 Grundkurse (Start mit dem 1. Semester) an dem Projekt teilnehmen. Das Projekt läuft bis zum Abitur der beteiligten Grundkurse.

(4) Die Projektteilnahme soll durch die Mathematik-Fachkonferenz abgesichert sein. Die LehrerInnen des Projekts berichten auf den Fachkonferenzen über die sich kumulierenden Projekterfahrungen.

(5) Klausurthemen, Arbeitsbögen, Hausaufgaben sollen der Projektleitung über E-Mail zugeleitet werden.

(C) Angebote der Projektleitung

(1) Durchführung regelmäßiger Workshops zu den diversen Aspekten des Projekts. Dabei auch Einführungen in die Unterrichtsarbeit mit dem VOYAGE™ 200 und gelegentliche gemeinsame Unterrichtsentwürfe.

(2) Materialsammlung über E-Mail (Klausuren, Arbeitsbögen, Hausaufgaben)

(3) Besuche an den beteiligten Schulen, einschließlich gelegentlicher Unterrichtsbesuche - auch mit dem Angebot des Projektleiters, gelegentlich selbst Unterricht in den Lerngruppen durchzuführen.

Sonstiges

- Die Taschencomputer VOYAGE™ 200 werden vom Landesschulamt / Korbit kostenlos zur Verfügung gestellt und verbleiben mindestens während der Projektdauer an der Schule (in der Regel auch danach).
- Stundenermäßigungen werden in der Regel nicht möglich sein.
- Das Projekt wird u.a. von dem Projekt T3 beim Zentrum für Lehrerbildung (ZfL) der Universität Münster und der Firma Texas Instruments unterstützt.

Die regelmäßigen Treffen / Workshops dienen u.a. folgenden Zwecken:

- Vorstellen von Unterricht / Unterrichtsmaterialien
- Erfahrungsaustausch zwischen Schulen / KursleiterInnen
- Vervollkommnung der VOYAGE™ 200-Kenntnisse
- Diskussion von Fragen unter (2)
- Entwurf von Klausuraufgaben

1.2 Beteiligte Schulen / Kurse

Schule <i>Ansprechpartner</i>	GK1-ma-1	GK2-ma-1	GK3	LK
Wieland-Herzfelde <i>Reiß</i>	Hr. Karig	Fr. Rutenberg		Fr. Reiß, Hr. Briese Fr. Kahn
Fritz-Karsen <i>Letzner</i>	Fr. Vogt	Hr. Hansberg		Fr. Letzner Fr. Wunsch
Carl von Ossietzki <i>Dreeßen-Meyer</i>	Fr. Wendenburg	Hr. Thaler	Hr. Dreeßen-Meyer	MA-1 Hr. Dr. Abitz
Oranke <i>Schiefelbaum</i>	Hr. Schiefelbaum	Fr. Sandisong		Hr. Bläsing
OSZ Köpenick <i>Schultze-Motel, Müller</i>	Fr. Schulze-Motel	Herr Geist	Fr. Doernbrack	Hr. Müller
Leonardo da Vinci, <i>Keller</i>	Fr. Keller Fr. Rinklake	Fr. Zimmermann		
Askanische OS Später eingestiegen	Fr. Keller	Fr. Knappe		

Damit sind insgesamt beteiligt: 25 Lehrerinnen (15) und Lehrer (10), ca. 300 Schüler.

2. Projektablauf

Workshops

Projektbegleitende Workshops bildeten die gemeinsame Basis für den Unterricht in den Kursen aller Projekt-Teilnehmerinnen und -Teilnehmer.

In den Workshops wurden insbesondere folgende Ziele verfolgt:

- Vermittlung neuer Kenntnisse zum CAS-Einsatz und zur Bedienung des VOYAGE™ 200
- Entwurf und Diskussion von Unterrichtsreihen
- Berichte über abgelaufenen Unterricht
- Gedankenaustausch aller direkt beteiligten Lehrer
- Informationen aller Art, z.B. Literaturempfehlungen, Hinweis auf Tagungen und Vorträge
- Austausch von Materialien der beteiligten Lehrer
- Verteilung von Materialien durch den Projektleiter

Bereits vor Beginn der eigentlichen Arbeit mit den Schülern ab August 2003 gab es drei Workshops. Im Laufe des Projekts wurden drei Ganztags-Workshops angesetzt, jeweils mit auswärtigen Referenten zu den Themen

- Klausur- und Abituraufgaben mit CAS – Erfahrungen aus Niedersachsen (Referent: Knechtel)
- CAS beim Zentralabitur – Erfahrungen aus vier Bundesländern (Referenten: Dr.Scheu, Dr. Weitendorf, Dr. Langlotz, StD. Weißkirch)
- CAS im Stochastik-Unterricht (Referent: StD. Benno Grabinger – Rheinland-Pfalz)

Beispiel für die Ergebnisse eines Workshops

VOYAGE™ 200 in der Analytischen Geometrie (AG) - Diskussionsergebnisse

- In AG sind häufig viele Daten einzugeben, z. B. bei Ebenen immerhin 3 Vektoren und zwei Parameter. Das lässt sich nicht vermeiden.
- Deshalb ist es nicht überall zweckmäßig Formeln als Bausteine zu speichern. Das sollte nur dort geschehen, wo man auf vielfältige Weise damit weiter arbeiten kann.
- Störend sind auch die kurzen Zeilen beim TI, da sich die Terme nicht vollständig sehen lassen → Abkürzungen, neue Definitionen wählen.
- Obige Probleme verringern sich, wenn man die Vektoren der AG als spezielle Matrizen (Spalten sind (3,1)-Matrizen, 3 Zeilen / 1 Spalte) betrachtet. Dann können die zahlreichen im CAS zur Verfügung stehenden Rechenoperationen der Matrizenrechnung angewendet werden. Die Einbeziehung von Matrizen von Anfang an kommt insbesondere für den Leistungskurs *Lineare Algebra* in Frage, siehe hierzu u.a. www.snafu.de/~mirza.
- Das CAS stellt einige Bausteine für die AG zur Verfügung, eine Auswahl:
 - dotP (Skalarprodukt),
 - norm (Länge eines Vektors),
 - crossP (Kreuzprodukt),
 - unitV (Einheitsvektor),
 - rref (für lineare Gleichungssysteme)

- Graphische Darstellungen der AG im \mathbb{R}^3 sind am **VOYAGE™ 200** wenig sinnvoll. Es gibt aber Ansätze in Richtung Darstellende Geometrie und Arbeiten mit Projektionen von *Hubert Weller (siehe TI-Hefte)*.
- Für graphische Darstellungen kann man auch PC-Programme, z.B. *ANALYGEO (Kaese-Software)* benutzen.

Man kann Analytische Geometrie auch sehr abwechslungsreich und motivierend unterrichten!

- Es wird empfohlen auch im Grundkurs nicht nur die klassischen Themen Punkt, Gerade, Ebene, Schnitte, Winkel, Länge zu behandeln, sondern auch Kreise und Kugeln.
- Dabei sollte die Trennung zwischen den Inzidenzaufgaben (Lagebeziehungen, Schnitte) und den metrischen Problemen (Länge, Winkel) aufgehoben werden. Zum Beispiel kann man auch mit dem Skalarprodukt beginnen (z.B. mit der Berechnung der Kontrollziffer bei ISBN von Büchern, → von Frau Wendenburg vorgetragen). Dieser Einstieg ermöglicht dann auch eine schnelle Verwendung der Ebenen-Normalenform.

Literaturhinweise zur Analytischen Geometrie und Linearen Algebra:

- *Benno Grabinger: Projekte und Aufgaben zur Analytischen Geometrie, Schroedel-Verlag 1999.*
- *Reiner Raup und Günter Scheu: Mathematikunterricht mit TI-89 und TI-92 Plus in den Klassenstufen 12 und 13 , Teil II Analytische Geometrie, TI-Buch 2001 - hier wird die klassische Vektorrechnung benutzt*
- *Eberhard Lehmann: Lineare Algebra mit dem TI-92 - Matrizen und ihre Anwendungen - Analytische Geometrie - Lineare Gleichungssysteme - Abbildungsgeometrie - Mathematik mit Bausteinen, TI-Buch*
- Gute Erfahrungen mit Schülern liegen vor für die Abbildungsgeometrie, Grundlage der Computergrafik. Hier bietet der TI etliche gute Möglichkeiten, besonders (im Grundkurs) für den \mathbb{R}^2 . Ansatzpunkt sind hier die Parameterdarstellung eines Kreises oder von Geraden. Zum Beispiel:

$x(t) = 5 \cdot \cos(t)$, $y(t) = 5 \cdot \sin(t) + 2$	Kreis mit $r = 5$ durch (0,2)	Verallgemeinert als Baustein: $x(t,a,b) = a \cdot \cos(t) + b$, $y(t,c,d) = c \cdot \sin(t) + d$
$x(t) = t$, $y(t) = 14 - t$	eine Gerade	Verallgemeinert als Baustein: $x(t) = t$, $y(t,m,n) = m \cdot t + n$

- Neue Aspekte in der AG ergeben sich durch die Verwendung von Ray-Tracing-Programmen, z.B. POVRAY.

Unterrichtsbesuche

Die Projektvereinbarungen enthielten auch eine Option für Unterrichtsbesuche des Projektleiters bei den Projektlehrerinnen und Projektlehrern, bekanntlich ein schwieriges Unterfangen. Hiervon wurde in bescheidenem Umfang Gebrauch gemacht. Zunächst einige

Anmerkungen zum Sinn der Unterrichtsbesuche im Rahmen des CAS-Projekts

- 1) Individuelle Tipps: Mathematikunterricht mit Computereinsatz erfordert bekanntlich spezifische didaktische Entscheidungen und Unterrichtsmethoden. Konkrete Hilfestellung kann besonders gut nah am jeweiligen Unterricht, d.h. am besten direkt vor Ort nach einer

Unterrichtsstunde erfolgen. Hier können die jeweiligen Stärken und Schwächen analysiert werden und individuelle Tipps für den folgenden Unterricht gegeben werden. Hierbei kommen dem Projektleiter langjährige Erfahrungen als Seminarleiter für Mathematik und Informatik insbesondere auch im Computereinsatz auf verschiedenen Ebenen zu gute.

- 2) Hilfestellungen im Projekt: Die Erkenntnisse können vom Projektleiter oder vom Lehrer im nächsten Workshop an die anderen Projektteilnehmer weiter gegeben werden.
- 3) Sammlung von Tipps: Durch Unterrichtsbesuche an verschiedenen Schulen kommt damit eine Sammlung wertvoller Tipps für den Unterricht mit Computern zustande, die wiederum Hilfen für weitere Lehrerinnen und Lehrer sein können.
- 4) Anregungen für den Projektleiter: Die Gespräche im kleinen Kreis der Projekt-Lehrerinnen und –Lehrer einer Schule geben dem Projektleiter wichtige Informationen für das weitere Vorgehen im Projekt und über Nachbesserungen der bisherigen Arbeit.

Lehren für den Anfangsunterricht mit CAS aus den Unterrichtsbesuchen

- **Die CAS-Kenntnisse müssen schrittweise aufgebaut werden.** Ein Aufzeigen verschiedener Bearbeitungsmöglichkeiten ist im Anfangsunterricht eher schädlich – später aber sehr erwünscht!
- **Die Schüler brauchen Zeit**, um einerseits den Rechner zu bedienen und andererseits die Mathematik zu verstehen (und auch noch zu dokumentieren). Das Unterrichtstempo muss sich darauf einstellen! Immer langsam voran!

Vermeiden Sie lehrerzentrierten Unterricht – da geht es meistens zu schnell!

Vor diesem Hintergrund muss der Lehrplan abgeklopft werden – die gesetzten Schwerpunkte sollten auch rechnerorientiert ausgewählt werden.

- Übrigens: Ihr Unterrichtstempo und ihr Sprechanteil regulieren sich von allein, wenn Sie die Schüler ihre **Rechner-Ergebnisse viel am View-Screen vortragen lassen**.
- Schüler sind besonders von den schnellen graphischen Darstellungsmöglichkeiten angezogen. Das ermöglicht bei Aufgaben eine frühzeitige Orientierung über zu erwartende Rechenergebnisse und schafft Überblick. So wächst auch die Motivation der Grundkurse Schüler. **Nutzen Sie also viel und frühzeitig Graphiken.**
- Zur Motivation schwächerer Schüler:
Auch schwache Schüler können ihre (Teil-) Ergebnisse mit ihrem Rechner am View-Screen darstellen. So haben auch diese Schüler Erfolgserlebnisse und ihre Motivation wächst spürbar. **Geben Sie auch den schwachen Schülern eine Chance!**
- **Ihr Unterrichts-Kurzprotokoll sollte aufzeigen, wie das CAS-Wissen schrittweise gewachsen ist.**

Lehren – mehr didaktischer Art

- **Produktregel** erst dann unterrichten, wenn sie gebraucht wird (z. B. nicht bei $x^2 \cdot x^3$). Das ist der Fall, wenn ein zweiter Funktionstyp vorliegt, etwa $\sin(x)$.

- Zur Produktregel: Zum Beispiel so:

			Produkt
Zeile 1: Funktionsterme	$u = x^2,$	$v = \sin(x)$	$u \cdot v = x^2 \cdot \sin(x)$
Zeile 2: Ableitungsterme	$u' = 2x,$	$v' = \cos(x)$	$(u \cdot v)' = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$
			<i>Das sagt uns das CAS!</i>

Wie hat das CAS das gemacht? Unsere Vermutung:

Das sind ja gerade die Terme aus der ersten und zweiten Zeile!

Vergleichen $2x \cdot \sin(x) + \cos(x) \cdot x^2 =$

Vermutung: $u'v + v'u$. Das gleiche Schema geht auch für andere Beispiele.

Abschlussstagung

Während der Laufzeit des Projektes entstanden zahlreiche Materialien, von denen viele ausgetauscht wurden und die für jedes Projektmitglied wertvolle Anregungen enthielten. So bot es sich an, einige dieser Materialien auf einer ganztägigen Abschlussstagung – offen für alle Mathematiklehrer – vorzustellen. Neben den unten notierten Aktivitäten wurden also diverse Materialien präsentiert und zum Mitnehmen bereitgestellt. Dadurch ergab sich für die Tagung eine umfangreiche Diskussionsgrundlage für das Plenum, die Workshops und für persönliche Gespräche in den Pausen der Tagung.

Präsentierte Materialien waren u.a.

Autoren	Materialien
Geist	Klausur, Arbeitsblätter
Dreeßen-Meyer	Klausur, Schülerreferat
Schiefelbein	Schülerbefragung, Auswertung
Knappe	Klausur Gk12 ma-1
Keller	Schülerfolien, Arbeitsblätter
Letzner	Stundenentwurf
Rutenberg	Projekt zur Modellierung einer Flasche ,GK
Reiß	Modellierung einer Mensch-Ärger-Dich-Nicht Figur, LK
Dr.Lehmann	- Evaluation zum Berliner CAS-Projekt Sek. 1, Heft 2 - „Berliner Beiträge zum Unterricht mit dem Computer“, Heft 1, Heft 2

Auf der Tagung wurden mehrere Workshops angeboten, die der Diskussion über die Chancen des CAS-Einsatzes bei verschiedenen konkreten Themen dienten:

Leitung der Workshops	Thema
W1 Frau Knappe, Frau Keller	Analysis GK 12, mehr für Anfänger
W2 Frau Kollotschek, Schüler	CAS in Stochastik
W3 Frau Vogt, Frau Wunsch, Herr Hansberg, Herr Thaler	CAS bei Wachstumsprozessen, Regression
W4 Herr Geist, Herr Müller	CAS in Analytischer Geometrie, GK und LK
W5 Herr Dreeßen-Meyer, Herr Dr.Abitz	Modellierung von Glaskörpern

Bei Interesse an dem Material wenden Sie sich bitte an die genannten Kolleginnen und Kollegen, Kontakt über die auf Seite 4 genannten Schulen.

Bedeutung des Workshops für die Projekt-Teilnehmerinnen und -Teilnehmer

Für die Projekt-Teilnehmerinnen und -Teilnehmer war die Abschlussstagung gleichzeitig der letzte Workshop, der auf Grund seiner Struktur noch einmal besondere Bedeutung hatte. So hatten alle die Chance selbst entwickelte Materialien zu präsentieren und auf Fragen der anderen Tagungsteilnehmer zum CAS-Einsatz zu reagieren. Hierbei und beim „Podium“ sowie in den Workshops konnten sich die gewonnenen Kompetenzen im *Mathematik-Unterricht mit CAS-Einsatz* bewähren.

3. Unterrichtsbeispiele mit CAS-Einsatz

3.1 Bericht über die ersten drei Wochen des Einsatzes des Taschencomputers VOYAGE™ 200 im Grundkurs Klasse 12 (von Lutz Geist)

Vorbemerkungen

Man will seinen Unterricht mit einem Computer-Algebra-System (CAS) gestalten. Wie geht man vor? Welche Erfahrungen wurden schon gesammelt? Man muss das Rad nicht noch einmal erfinden. - Eine gute Hilfestellung erhalte ich durch die Schriftenreihe von bk-teachware. (<http://shop.bk-teachware.com>). Ich beziehe mich hier auf das Heft „Integralrechnung mit dem TI-89/92/92+“ von Prugger, Prumetz und Schneider, erschienen in der bk-teachware Schriftenreihe (Nr. 24).

Für den Einstieg wurde ein physikalisches Problem gewählt. Die gewählten Beispiele setzen keine speziellen physikalischen Kenntnisse voraus. Weg, Zeit und Geschwindigkeit sind Größen des Alltags. Die Betrachtung der Fläche unterhalb der Kennlinie in einem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm als Maß für den zurückgelegten Weg wird im Physikunterricht nicht immer explizit behandelt.

Mit der Einführungsaufgabe 1.01 wird auf die Bedeutung der Fläche unter einem Graphen hingearbeitet. - Mit der Aufgabe 1.02, die als Hausaufgabe aufgegeben wurde, wird dieser Sachverhalt vertieft. Diese Aufgabe wurde von den Schülern unterschiedlich gelöst, da in der Aufgabenstellung weder ein Maßstab noch Geschwindigkeiten angegeben wurden. Dies bietet breiten Raum zu Diskussion über die einzelnen Lösungen. - Die Aufgabe 1.03 führt uns zum eigentlichen Problem: Die Berechnung der Fläche unter einem beliebigen Graphen. Nach der Betrachtung des stückweise definierten Graphen, können die ersten beiden Teilflächen mit Hilfe der Elementarmathematik berechnet werden. Bei der dritten Teilfläche muss erst die Funktionsgleichung des einschließenden Graphen ermittelt werden. **Hier kommt das CAS zum ersten Mal zum Einsatz. Die Schüler erkannten sehr schnell, dass eine Parameteraufgabe gelöst werden muss.** Sie waren begeistert, wie elegant dies mit dem CAS funktionierte. Auch erkannten Sie, dass der Rechner ihnen die Denkarbeit nicht abnimmt, sondern von ihnen eher mehr Denkarbeit erwartet wird. In der Diskussion wurden Möglichkeiten der Berechnung einer krummlinig begrenzten Fläche besprochen. Die Streifenmethode war eine mögliche unter den genannten. Diese wurde vertieft. - Als weitere Anwendung der Streifenmethode wurde die Aufgabe 1.06 (Westermann) ausgewählt. **Ein Rollenspiel in der Mathematik.** Eine neue gute Erfahrung für die Schüler und den Lehrer. Es haben sich schnell zwei Gruppen gefunden (Käufer und Verkäufer). Die beiden Gruppen haben selbstständig ihre Aufgabe weiter unterteilt und verteilt. Sie wählten selbst ihren „Verhandlungsführer“, der die Gruppe vertritt. Es war eine interessante Erfahrung zu erleben, wie geschickt, hartnäckig und ernst Schüler Verhandlungen führen können. Wichtig für die Verhandlung ist eine Zeitvorgabe und der Zwang zu einem positiven Verhandlungsergebnis. - **Die durchgeführten Übungen führten dann zur Definition des bestimmten Integrals.** Die bisher berechneten Flächen unter einem Graphen wurden jetzt mit dem Integral noch einmal berechnet. Die Ergebnisse wurden verglichen und diskutiert. Weiterführend wurde die Berechnung von Flächeninhalten zwischen dem Graphen einer nichtlinearen Funktion und der x-Achse untersucht.

Weitere Literatur:

- mathe >open end< „Materialien für den Einsatz von Grafikrechnern und Computeralgebra“ Teil 2 : Integralrechnung von Knechtel, Krüger, Kühl und Meyer bei Westermann, ISBN 3-14-112812-X

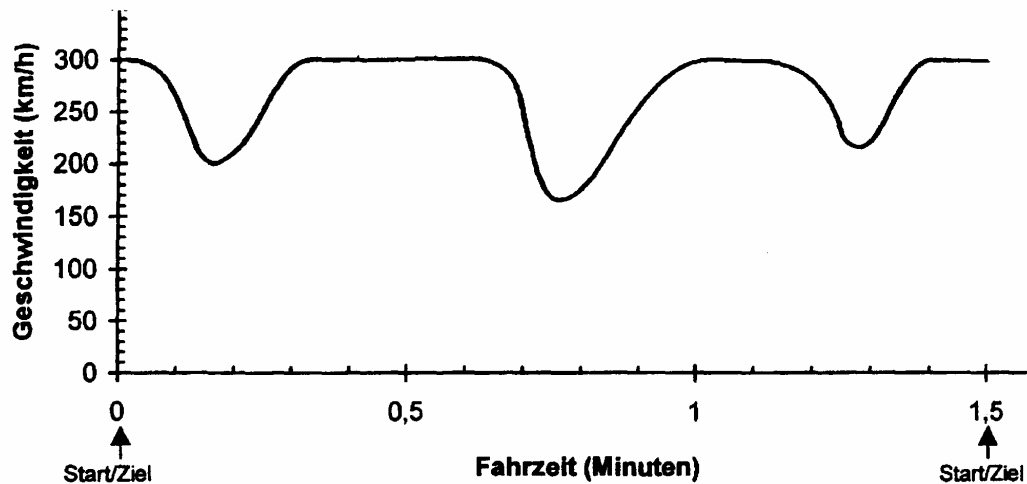
Datum, Stunde	Angaben zum Thema und CAS-Einsatz
19.08.03 Stunden 1+2	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Organisation des Unterrichts im Grundkurs ➤ Einführung in die Unterrichtseinheit ➤ Aufgabe zur Flächenberechnung unter einem Graphen auch in Teilintervallen, Bestimmung von Durchschnittswerten (Aufgabe 1.01) ➤ HA: Aufgabe 1.02: Ermittlung eines v-t-Diagrammes ohne Vorgabe von Geschwindigkeitswerten ➤ kein CAS-Einsatz
21.08.03 Stunde 3	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Ausgabe des VOYAGE™ 200 ➤ Einführung in den Rechner und erste Übungen zur Handhabung ➤ CAS-Einsatz: ca. 30 min
26.08.03 Stunde 4+5	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Besprechung der HA (Aufgabe 1.02) als Schülergespräch ➤ Flächenberechnung unter Funktionen, deren Graph eine Gerade ist. ➤ Problemstellung: Flächenberechnung unter Funktionen, deren Graph keine Gerade ist. (Aufgabe 1.03) ➤ CAS-Einsatz: sporadisch
28.08.03 Stunde 6	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Aufgreifen der Problemstellung (Aufgabe 1.03): Interpretation der graphischen Darstellung, Unterteilung, Ermittlung der Funktionsgleichungen, für den dritten Abschnitt mit dem VOYAGE™ 200 ➤ Anwendung der Streifenmethode auf den dritten Abschnitt ➤ HA: Aufgaben 1.05 und 1.07
02.09.03 Stunde 7+8	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Besprechung der HA ➤ weitere Übung zur Streifenmethode (Aufgabe 1.06) in Gruppen mit unterschiedlicher Streifenbreite, Auswertung ➤ Problemstellung: „Hilfe für den Gemeinderat“ (Westermann) in Gruppen gelöst und im Rollenspiel dargestellt. ➤ HA: Strategie der Problemlösung schriftlich darlegen ➤ CAS-Einsatz: ca. 70 min
04.09.03 Stunde 9	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Zusammenfassung Streifenmethode ➤ Bildung des Grenzwertes der Summe von unendlich kleinen Streifen führt zur Definition des Integrals ➤ Lösung der Aufgabe 1.03 mit Hilfe der Berechnung des Integrals mit dem Rechner (Black Box)

Anlage: Die verwendeten Arbeitsblätter → → →

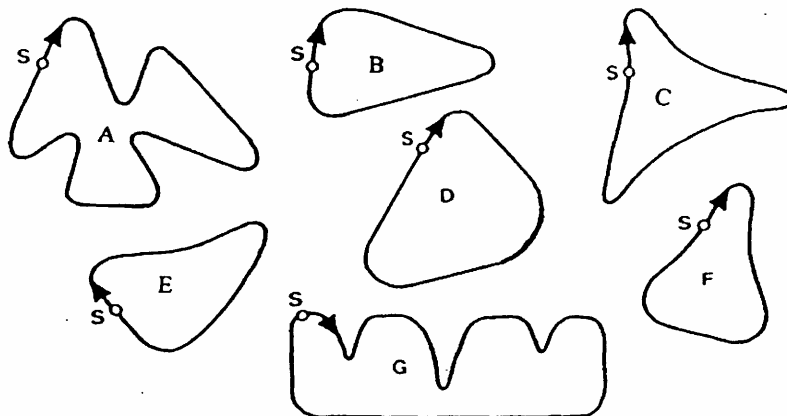
 <p>Klasse: Name:</p>	<p style="text-align: center;">Integralrechnung mit dem VOYAGE™ 200 Weg - Zeit - Geschwindigkeit</p>	<p>Berlin, den</p> <p>Fach: Ma</p> <p>Blatt-Nr.: 1</p>
--	---	--

Aufgabe 1.01 (nach Fischer/Malle 1985, S. 237)

Das folgende Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm bezieht sich auf die Fahrt (zweite Runde) eines Rennwagens auf einem Rundkurs.



- a) Um welchen der angegebenen Rundkurse A - G könnte es sich dabei handeln? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

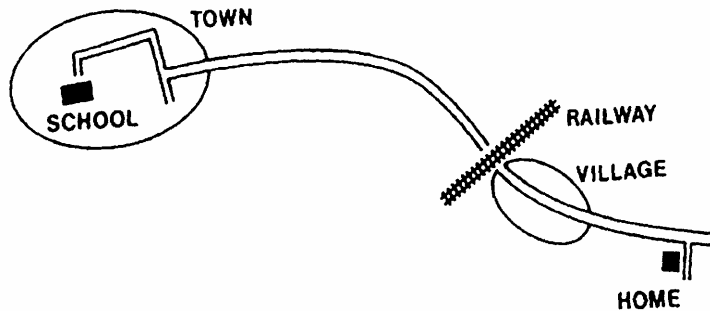


S: Start/Ziel

- b) Ermitteln Sie anhand des Geschwindigkeit-Zeit-Diagrammes näherungsweise die in den Intervallen $[0,3; 0,5]$, $[0,7; 0,8]$ und $[0; 0,3]$ zurückgelegten Längen! (Hinweis: Es gilt: Weg s = Geschwindigkeit v · Zeit t . Versuchen Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit in diesem Intervall abzuschätzen!)
- c) Versuchen Sie die ungefähre Länge des Rundkurses zu ermitteln!

Aufgabe 1.02 (nach Fischer/Malle 1985, S. 236)

Im folgenden Diagramm ist Michis Schulweg maßstabsgetreu wiedergegeben.

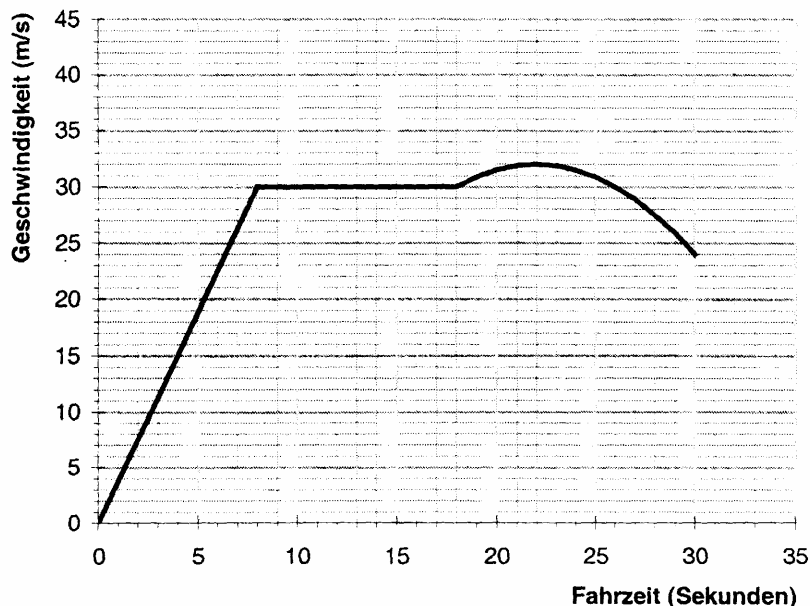


Michi wird von seinem Vater mit dem Auto von der Schule abgeholt und nach Hause gebracht. Die Fahrt dauert 14 Minuten, wobei der Vater bei der Kreuzung vor der Stadtausfahrt 30 Sekunden, vor dem Eisenbahnübergang 2 Minuten anhalten muss.

- Zeichnen Sie ein mögliches Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm für die Heimfahrt von der Schule!
- Kann es sich bei dem in a) gezeichneten Graphen um den Graphen einer Funktion handeln? Begründen Sie!
- Ermitteln Sie mit Hilfe der in a) gezeichneten Grafik die Länge von Michis Schulweg!

Aufgabe 1.03

Auf der firmeninternen Teststrecke in Wolfsburg wird ein neuer VW-Prototyp getestet. Die elektronischen Aufzeichnungen in den ersten 30 Fahrsekunden liefern für die Geschwindigkeit des Fahrzeugs folgendes Diagramm:



- Beschreiben Sie in Worten die Entwicklung der Geschwindigkeit des Fahrzeugs in den ersten 30 Fahrsekunden!
- Versuchen Sie die Entwicklung der Geschwindigkeit durch eine/mehrere Funktionsgleichung/en zu beschreiben!

	<p>Integralrechnung mit dem VOYAGE™ 200 Weg - Zeit - Geschwindigkeit</p>	<p>Berlin, den</p> <p>Fach: Ma</p> <p>Blatt-Nr.: 2</p>
<p>Klasse:</p> <p>Name:</p>		

Lösungshinweis zu b):

Im Intervall [18; 30] scheint der Graph der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion die Form einer Polynomfunktion zweiten Grades, Funktionsgleichung $v(t) = at^2 + bt + c$, zu haben und durch die Punkte P(18; 30), Q(30; 24) zu gehen. Im Punkt S(22; 32) scheint ein Maximum vorzuliegen.

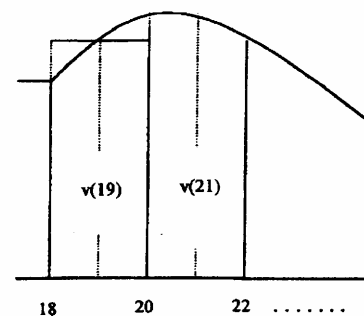
Aus diesen Daten lässt sich eine Gleichung der Polynomfunktion zweiten Grades rechnerisch oder einfacher durch Eingabe der Werte in den Data-Matrix-Editor des Rechners ermitteln:

- Öffnen Sie mit APPS den Data/MatrixEditor.
- Legen Sie ein neues Datenblatt an.

Die Ermittlung der Polynomfunktion erfolgt gemeinsam! Notieren Sie sich die notwendigen Schritte!

Aufgabe 1.03c) (Fortsetzung von Aufgabe 1.03):

Welchen Weg legt das Fahrzeug im Zeitintervall
 i) [8;18] ii) [0;8] iii) [18;30] zurück?



Wir versuchen das Verfahren zu verbessern, indem wir das Intervall [18;30] in die sechs Teilintervalle [18;20], [20;22] ... [28;30] zerlegen. Für jedes dieser Teilintervalle ermitteln wir die Geschwindigkeit in der Mitte des Intervalls und berechnen damit näherungsweise die Länge des in diesem Teilintervall zurückgelegten Weges.

Die Ermittlung der Geschwindigkeiten kann dabei aus der Grafik erfolgen:

Aus der Gleichung der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion $v(t) = -0,125t^2 + 5,5t - 28,5$ (vgl. Aufgabe 1.03b) kann der Graph der Funktion erstellt werden. Der gesuchte Funktionswert wird wie folgt ermittelt:

Zoomen des Graphen im Teilintervall [18; 20]

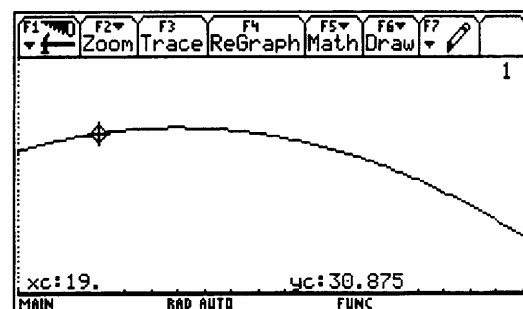
F3 Trace

Eingabe des x-Wertes der gesuchten Stelle:

xc:19.

Der Rechner zeigt den dazugehörenden y-

Wert an: yc:30,875



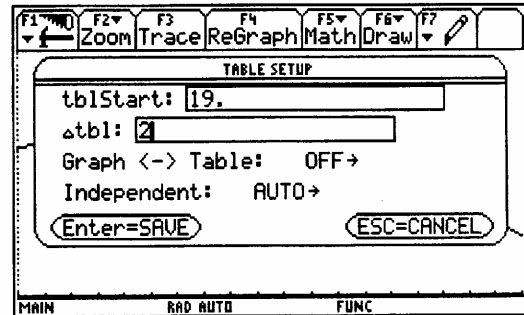
Dieses Vorgehen wird für die weiteren 5 Teilintervalle wiederholt.

Man erhält für die Teilintervalle folgende „durchschnittliche Geschwindigkeiten“:

30,875; 31,875; 31,875; 30,875; 28,875; 25,875

Die Ermittlung der Geschwindigkeit kann aber auch aus der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion $v(t) = -0,125t^2 + 5,5t - 28,5$ erfolgen.

Man kann mit dem VOYAGE™ 200 zum Beispiel eine entsprechende Tabelle der Funktionswerte $v(t)$ erstellen:



Eingabe der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion im Y-Fenster.

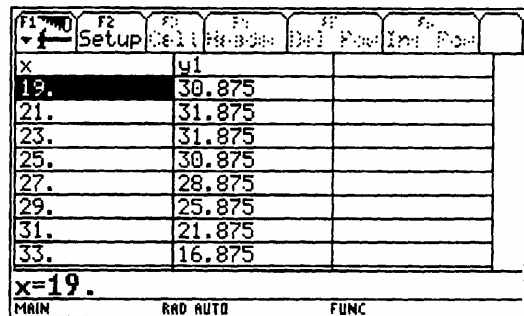
Mit \blacklozenge -Tbl Set den Beginn der Tabelle definieren:

tblStart: 19

und die Schrittweite festlegen:

Δ tbl : 2

Mit zweimaligem Drücken von ENTER bestätigen.

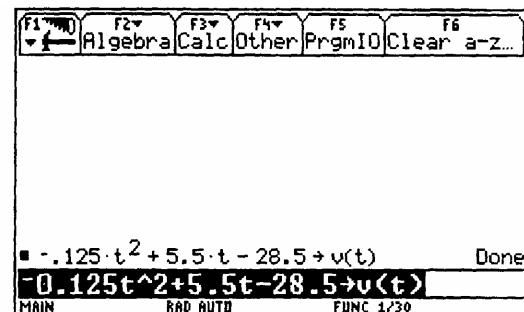


\blacklozenge -TABLE liefert die gewünschte Tabelle:

Man kann sich die gesuchten Funktionswerte aber auch direkt vom Rechner ermitteln lassen:

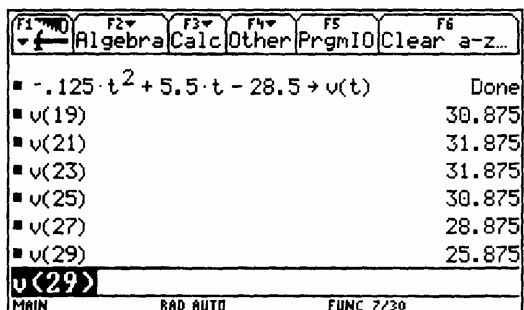
Wir speichern die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion im HOME - Fenster unter $v(t)$ ab:

$-0.125 \cdot t^2 + 5.5 \cdot t - 28.5 \text{ STO } \blacktriangleright v(t)$



Für die Mitte der Teilintervalle wird der Funktionswert ermittelt:

$v(19), v(21), \dots$



	Integralrechnung mit dem VOYAGE™ 200 1. Weg - Zeit - Geschwindigkeit	Berlin, den Fach: Ma. Blatt-Nr.: 3
Klasse: Name:		

Wir übernehmen die Werte für die Geschwindigkeiten $v(t)$ und berechnen damit die gesamte Weglänge:

$$\begin{aligned}
 & s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 = \\
 & s(18;20) + s(20;22) + s(22;24) + s(24;26) + s(26;28) + s(28;30) \approx \\
 & v(19) \cdot 2 + v(21) \cdot 2 + v(23) \cdot 2 + v(25) \cdot 2 + v(27) \cdot 2 + v(29) \cdot 2 \approx \\
 & 30,875 \cdot 2 + 31,875 \cdot 2 + 31,875 \cdot 2 + 30,875 \cdot 2 + 28,875 \cdot 2 + 25,875 \cdot 2 = 360,5
 \end{aligned}$$

Die gesuchte Weglänge beträgt somit ungefähr 360,5 m.

Wir wissen nicht, wie genau dieses Ergebnis ist, anschaulich ist aber klar, dass wir es weiter verbessern können, wenn wir in noch mehr Teilintervalle unterteilen.

Aufgabe 1.04

Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 5 m/s und beschleunigt dann so, dass seine Geschwindigkeit gleichmäßig um 2 m/s zunimmt.

- Geben Sie eine Gleichung jener Zeit-Geschwindigkeits-Funktion an, die die Geschwindigkeit des Autos ab dem Beginn des Beschleunigungsvorganges beschreibt!
- Wie groß ist der in den ersten drei Sekunden (ab dem Beginn der Beschleunigung) zurückgelegte Weg?
- Wie groß ist der in der dritten Sekunde (nach Beginn der Beschleunigung) zurückgelegte Weg?
- Wie groß ist der im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ (nach Beginn der Beschleunigung) zurückgelegte Weg?

Aufgabe 1.05

Ein Auto fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 45 m/s (= 162 km/h) und bremst dann so ab, dass sich die Geschwindigkeit gleichmäßig um 6 m/s verringert. Nach wie vielen Sekunden (nach Beginn des Bremsvorganges) kommt das Auto zum Stillstand und wie lang ist der Bremsweg?

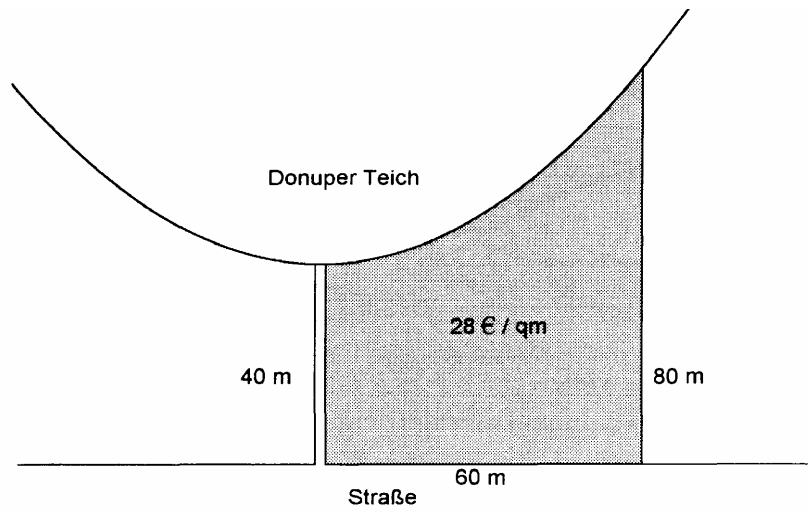
Aufgabe 1.06

Die Geschwindigkeit eines Körpers zum Zeitpunkt t sei durch $v(t) = 3 \cdot t^2$ gegeben. Ermitteln Sie näherungsweise die Länge des Weges, den der Körper zwischen $t = 0$ und $t = 10$ zurücklegt!

Aufgabe 1.07

Die Geschwindigkeit eines Körpers zum Zeitpunkt t sei durch $v(t) = \frac{40}{t^2+8}$ gegeben. Welchen Weg legt der Körper im Zeitintervall $[1;7]$ zurück?

Hilfe für den Gemeinderat



Der Rat der Gemeinde Weyhe braucht kompetente Hilfe.

Das Grundstück am Donuper Teich in der Gemeinde soll verkauft werden.

Der private Eigentümer als Verkäufer und die Gemeinde Weyhe als mögliche Käuferin müssen sich über den Kaufpreis einigen. Beide vereinbaren, die Größe des Grundstückes zu ermitteln und dabei eine Einteilung in Rechtecke vorzunehmen.

Reicht der im Haushalt kalkulierte Betrag in Höhe von 90.000 € zum Kauf des Grundstücks?

- Bilden Sie Gruppen von „Käufern“ und „Verkäufern“.
- Versuchen Sie, den Flächeninhalt des Grundstückes zu ermitteln. Achten Sie dabei darauf, dass Ihre eigenen Interessen gewahrt sind und ein Kompromiss dennoch möglich bleibt.
- Die „Kaufverhandlungen“ sollen in einem Rollenspiel durchgeführt werden. Bereiten Sie dieses Rollenspiel vor.

Arbeitsaufträge:

Verwenden Sie neben rein algebraischen Lösungsmethoden gleichrangig auch grafische und tabellarische Methoden.

- a) Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks möglichst genau.
Untersuchen Sie dabei auch immer die Genauigkeit Ihrer Berechnung.
- b) Formalisieren und verallgemeinern Sie Ihre Ergebnisse.
- c) Beschreiben Sie das Verfahren zur Flächenberechnung mit Worten in Form eines mathematischen Aufsatzes und gehen Sie dabei auch auf Vor- und Nachteile ein.

3.2 Ableitung der Sinusfunktion (von Matthias Müller)

Diese Unterrichtsstunde soll den Schülern einerseits die Möglichkeit eröffnen, eine mathematische Regel zu entdecken und andererseits diese Regel unter Zusammenführung mehrerer im Unterricht erarbeiteter Zusammenhänge zu beweisen.

Der Unterricht beginnt mit der Darstellung der Sinusfunktion. Die Schüler sollen den Graphen beschreiben und markante Punkte nennen. Anknüpfend an ihr Wissen über Kurvendiskussionen von Polynomfunktionen sollen sie dann beschreiben wie z. B. die Hoch- und Tiefpunkte berechnet werden könnten. Dabei sollen die Schüler erkennen, dass ihnen zur Durchführung dieses mathematischen Kalküls noch eine wichtige Voraussetzung fehlt: Die Ableitung der Sinusfunktion.

Das graphische Differenzieren könnte von den Schülern auch an einem von ihnen erstellten Graph durchgeführt werden. Allerdings ist das Anlegen der geeigneten Tangenten an den Graphen manuell nicht ganz einfach. Außerdem müssten die Schüler dann von jeder eingezeichneten Tangente die entsprechende Funktionsgleichung ermitteln um die Steigung zu bekommen. Dieses Vorgehen erscheint mir einerseits sehr zeitaufwändig zu sein. Andererseits steckt in dieser Aufgabe auch kein Erkenntnisgewinn, da die Schüler Steigungen von Geraden sicher bestimmen können, nur dass es eben relativ aufwändig ist. Hier wird deshalb auf die Möglichkeiten des TI zurückgegriffen. Dieser kann sowohl den Funktionsgraphen als auch die Tangenten rasch darstellen. Zusätzlich zeigt er auch sofort die Funktionsgleichungen und damit auch die benötigten Steigungen der betreffenden Tangenten an. Die Schüler können diese dann ablesen und in die vorbereitete Tabelle übertragen.

Die Überprüfung der vermuteten Ableitungsregel mit Hilfe der Differentialquotienten bereitet einerseits den rechnerischen Beweis vor, da die Schüler hier schon einmal die mathematische Beschreibung der Behauptung formulieren müssen. Andererseits bestätigt diese Überprüfung mit dem TI erst einmal die Vermutung, so dass die Schüler auch einen Sinn darin sehen werden, ihre Vermutung zu beweisen, da diese offenbar stimmig ist und sie keinen Irrweg verfolgen.

Der eigentliche Beweis ist ja relativ komplex. Er erfordert die Zusammenführung verschiedener Sachverhalte und einige "geschickte" Termumformungen. Daher gebe ich den Schülern einige Hinweise mit auf den Weg, so dass sie einen roten Faden verfolgen können, der sie dann hoffentlich zum Ziel führen wird.

Die einzelnen Aufgaben sind von mir zu einem Arbeitsbogen zusammengefasst worden, auf dem sich sowohl die Aufgabenstellungen als später dann auch die Sicherungen der Schüler befinden. Am Ende der Stunde sollten die Schüler dann eine zusammenhängende Darstellung des Unterrichtsgegenstandes vorliegen haben, die dann auch als Vorlage für die folgende Behandlung ähnlicher Fragestellungen dienen kann. Der Arbeitsbogen ist so gestaltet, dass die zu findende Ableitungsregel erst auf der Rückseite explizit auftaucht, so dass die Schüler unvoreingenommen in die Entdeckungsphase gehen.

Die Sicherung der einzelnen Unterrichtsphasen soll durch die Schüler erfolgen. Ihnen stehen dafür sowohl das Overhead-Display des TI als auch vorbereitete OH-Folien zur Verfügung, die sich mit der Darstellung auf dem Arbeitsbogen decken. Bewährt hat sich die Methode, einen Schüler die Arbeit am Overhead-Display durchführen zu lassen (Tangenten-

Angelegstellen auf Zuruf), während ein anderer neben seinem Arbeitsbogen auch gleich die entsprechende Folie ausfüllt. Die Überprüfungs- und Beweisphase werden von den Schülern in Partnerarbeit durchgeführt. Das ergibt bei den Schülern die Notwendigkeit, sich über mathematische Inhalte zu unterhalten.

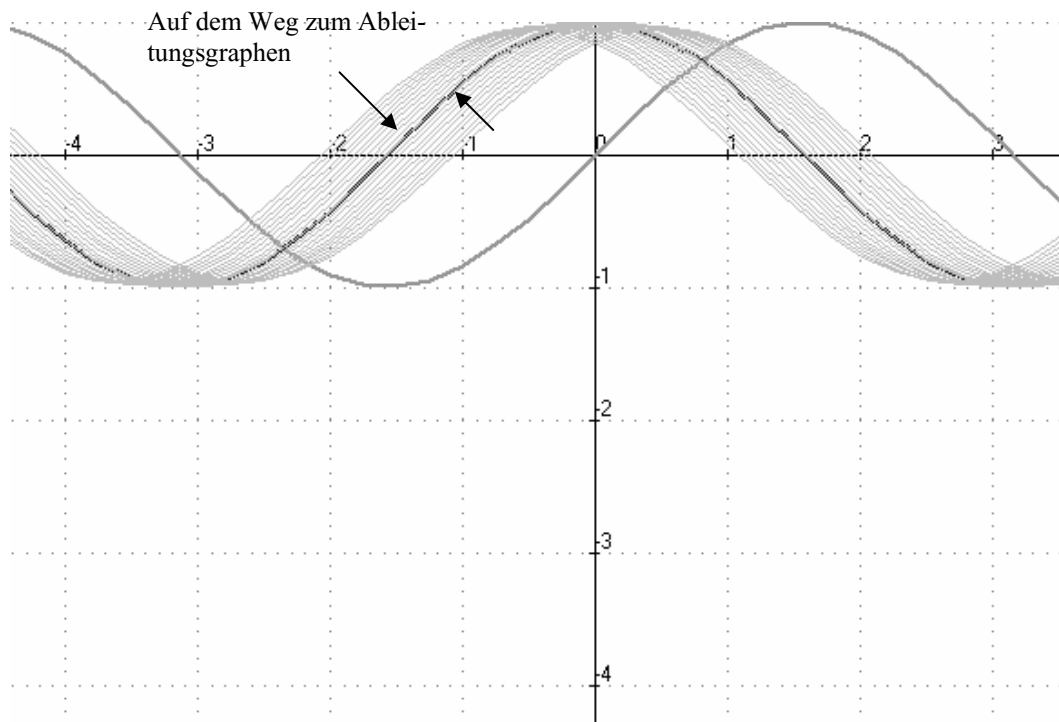
Matthias Müller, eMail: Mueller.OSZWivov@Web.de

Anlagen:

- Arbeitsbogen
- Vorlage
- OH-Folie

Blickpunkt 1

Einfügung von E.Lehmann: Differenzenquotienten-Graphen zu $y = \sin(x)$



f1: $\sin(a)$

f2: $(f1(a+b)-f1(a))/b$

f3: $f2(x,1)$

f4: $f2(x,u)$

f5: $f2(x,-u)$

f6: $\cos(x)$

Ausgangsfunktion

Differenzenquotient mit 2 Parametern

Differenzenquotient für $a=x$ und $b=1$

u läuft gegen 0 (von oben), f4 gegen den cos

$-u$ läuft gegen 0 (von unten), f5 gegen den cos

die tatsächliche Ableitungsfunktion

Zusätzliche Einstellungen erfolgten bei den Zeichenoptionen.

Hinweis: Hier wurde das Animationsprogramm ANIMATO verwendet, das die Vorgänge schrittweise zeigen kann, siehe u.a. www.snafu.de/mirza.

OSZ Wirtschaft und Sozialversicherung Gymnasiale Oberstufe - Kursphase	Mathematik Leistungskurs MA - 1 Ableitung der Sinusfunktion	Name: Datum
---	--	--------------------

Aufgaben:

1. Stellen Sie die Sinusfunktion mit Hilfe des TI graphisch dar.

<i>Empfohlene Einstellungen für den Graphikbildschirm</i>		
Xmin = -1	Ymin = -2	Xres = 1
Xmax = 7	Ymax = 2	
Xscl = 1	Yscl = 1	

Hinweis: Achten Sie darauf, dass Ihr Rechner auf Bogenmaß eingestellt ist.

2. Legen Sie nun an geeignete Stellen Tangenten an den Graph an (Menü F5 → A:Tangente), lesen Sie die Steigungen ab und tragen Sie diese in die folgende Tabelle ein:

x_0							
$f'(x_0)$							

3. Übertragen Sie die so gewonnenen Punkte in das Koordinatensystem und verbinden Sie sie.
 - Stellen Sie eine Vermutung auf, welcher Graph auf diese Weise entsteht.



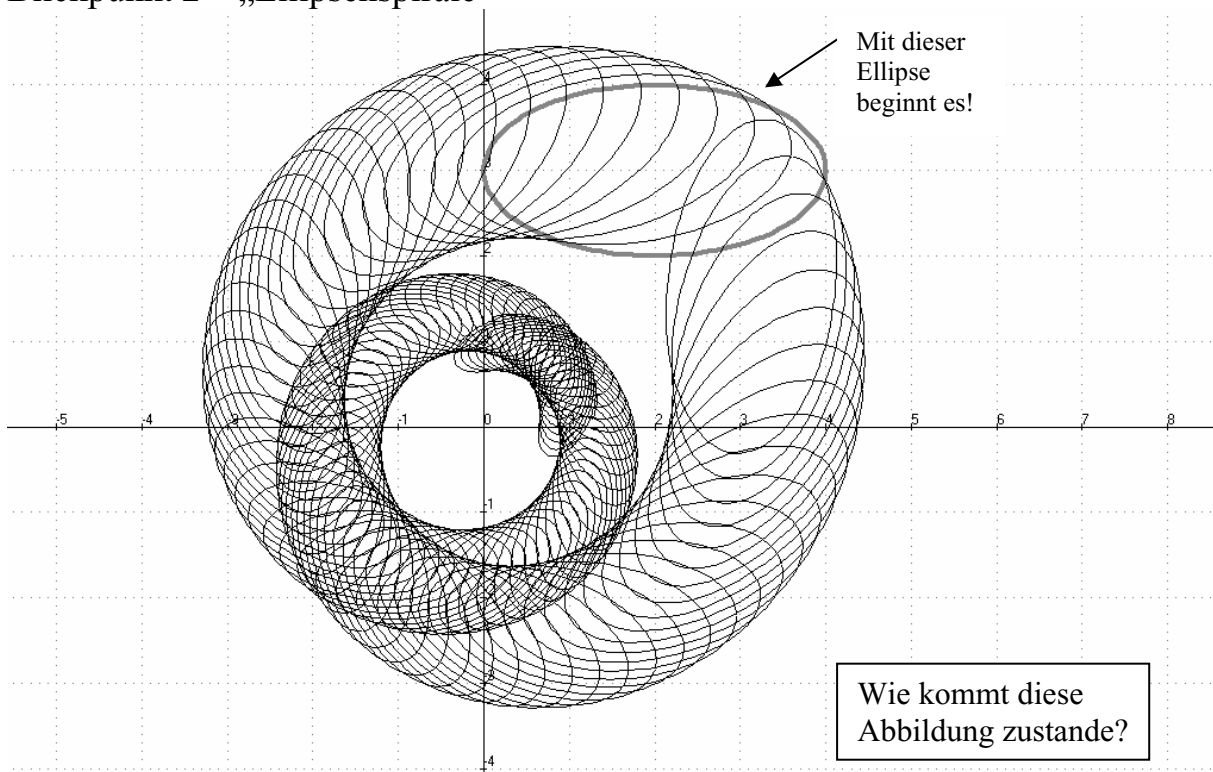
4. Überprüfen Sie Ihre Vermutung, indem Sie den entsprechenden Differentialquotienten in den TI eingeben und auswerten lassen.

x_0							
$f'(x_0)$							

Hinweise:

- Verwenden Sie den Differentialquotient nach der h-Methode.
- Es gilt das Additionstheorem $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$.
- Nutzen Sie die Ihnen bekannten Grenzwerte
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$ aus.

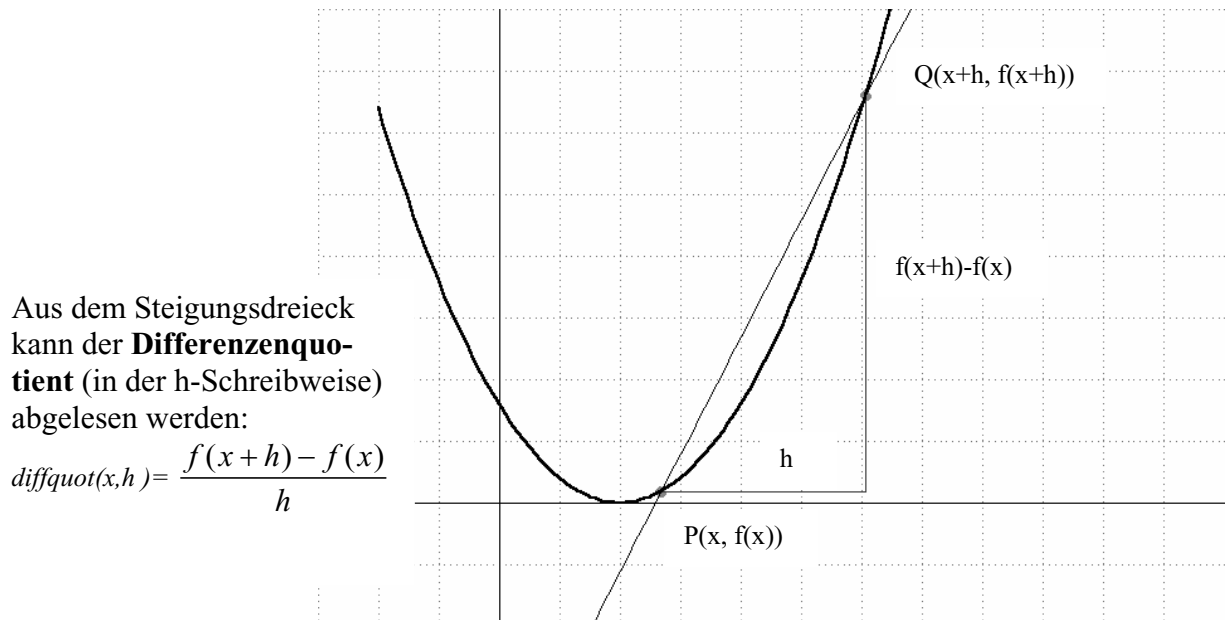
Blickpunkt 2 – „Ellipsenspirale“



3.3 Näherungsweise Zeichnung von Ableitungsfunktionen mit dem Taschencomputer (von Eberhard.Lehmann)

Wiederholung 1

Ausgangspunkt der Überlegungen ist das längst bekannte Steigungsdreieck:



Der Differenzenquotient zum Funktionsterm $f(x)$ wird hier von uns abgekürzt mit **diffquot(x,h)**. Sein Wert ist abhängig von dem gewählten x -Wert und der Schrittweite h . Diese Schreibweise mit der Angabe der Variablen x und h wird sich für die Arbeit mit einem CAS gleich als sehr nützlich erweisen.

Wiederholung 2:

Erinnern Sie sich noch an die ausführliche Berechnung der Ableitung von $f(x) = x^2$ nach der h -Methode (siehe Seite)? Nach der Berechnung der Ableitungsfunktion $f'(x) = 2x$ war es Ihnen dann leicht möglich den Ableitungsgraphen - in diesem Fall eine Gerade - zusammen mit dem Graphen der Ausgangsfunktion $f(x) = x^2$ in ein Koordinatensystem zu zeichnen.

Um Entsprechendes für andere Funktionen durchführen zu können, ist die Kenntnis der Ableitungsfunktion unerlässlich. Doch es ist nicht immer einfach sie zu ermitteln! Probieren Sie es doch einmal für die Sinusfunktion. Der Differentialquotient lautet in diesem Fall:

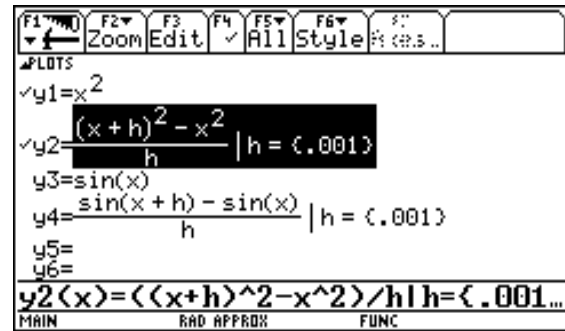
- $\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$. Aber wie geht es nun rechnerisch weiter?
- Term umformen und Grenzwert bilden - aber wie?

Nun kommt die Überraschung! Sie werden mit dem CAS Ableitungsgraphen zeichnen können ohne die Ableitungsfunktion zu kennen!

1. Zeichnung von Differenzenquotienten-Funktionen

Arbeit mit dem CAS des Voyage-200-Taschencomputers (oder mit TI-92):

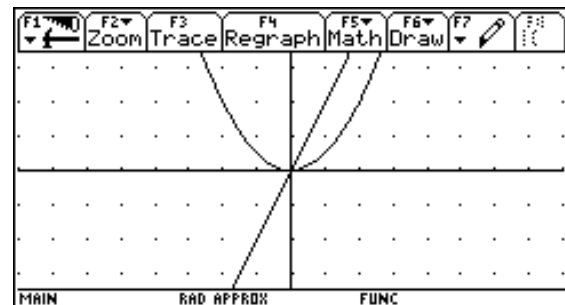
- 1) Im „y-Editor“ werden die Eingaben für y1 und y2 durchgeführt. $h = \{0.001\}$.
- 2) y1(x) und y2(x) werden graphisch dargestellt, siehe 2.Bild.
- 3) Im „y-Editor“ werden die Eingaben für y3 und y4 durchgeführt.
- 2) y3(x) und y4(x) werden graphisch dargestellt, siehe 3.Bild.



Funktion und „Ableitungsfunktion“

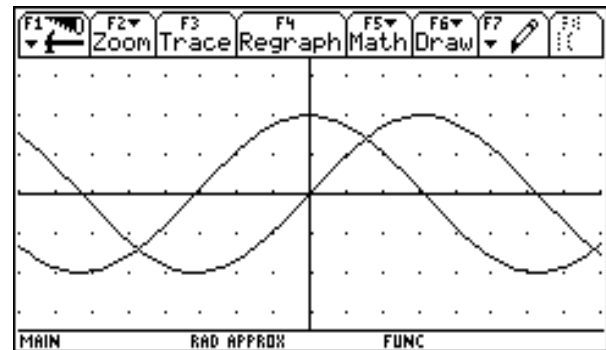
Aufgabe 1: Erläutern Sie den mathematischen Gehalt der Abbildung.

- Um welche Funktionsgraphen handelt es sich?
- Was hat das mit der Ableitungsfunktion zu tun?



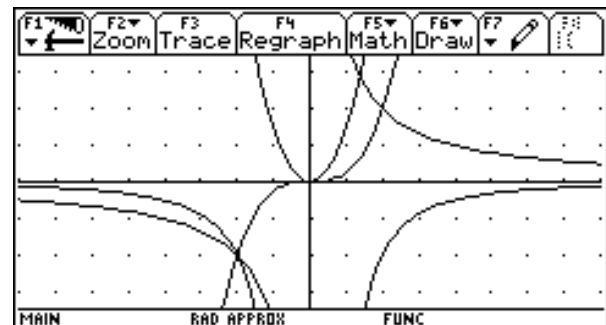
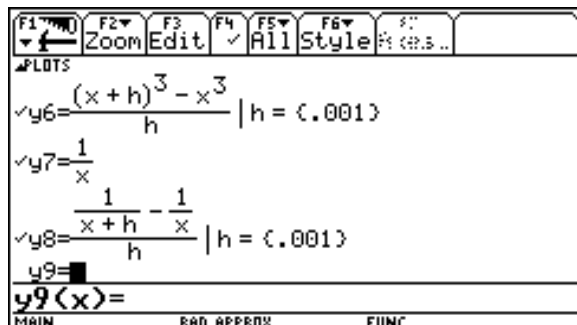
Aufgabe 2: Deuten Sie auch diese Abbildung.

- Ausgangsfunktion
- „Ableitungsfunktion“
- Oben haben Sie gelesen: „Nun kommt die Überraschung! Sie werden mit dem CAS Ableitungsgraphen zeichnen können ohne die Ableitungsfunktion zu kennen!“ Erläutern Sie diese Aussage!



Hinweis: Später werden Sie ausrechnen, dass die Ableitung von $y = \sin(x)$ wirklich $y' = \cos(x)$ ist.

Aufgabe 3: Deuten Sie die beiden folgenden Bildschirmabdrucke. - Erstellen Sie dann ähnliche Bilder für weitere Ihnen bekannte Funktionen aus dem vorhergehenden Unterricht.



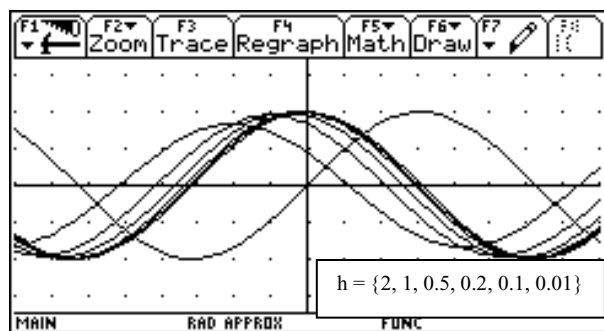
2. Die bisherigen Untersuchungen zeigen:

Mit Hilfe der Differenzenquotiententerms $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ist es möglich, die Ableitungsfunktion $y = f'(x)$ hinreichend genau zu zeichnen. Dazu wählt man einen kleinen h-Wert, zum Beispiel $h = 0.001$.

Wegen der begrenzten Auflösungsfähigkeit des Computerbildschirms handelt es sich aber stets um einen näherungsweise Darstellung.

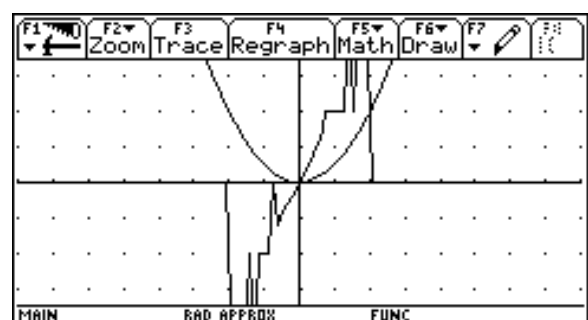
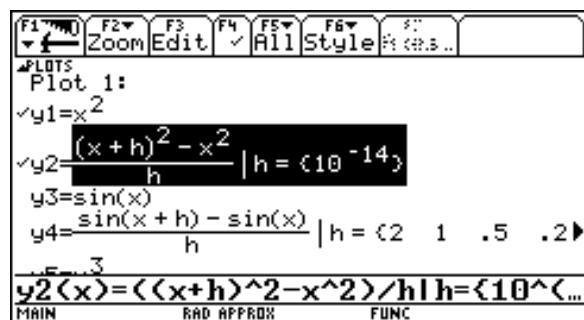
3. Wenn man nun eine h-Folge wählt, die sich immer mehr auf die 0 zubewegt, so entsteht auch auf dem Bildschirm eine Bildfolge, mit der man die rechnerische Grenzwertbildung $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ eindrucksvoll visualisieren kann.

Aufgabe 4: Erstellen Sie weitere derartige Bilder auch für andere Funktionen. Wählen Sie dabei auch die Menge $h = \{-2, -1, -0.5, -0.2, -0.1, -0.01\}$.



4. Ausbau der Überlegungen: Unsicherheiten - Grenzen des Rechners

Es hat sich gezeigt, dass die obigen Ergebnisse je nach Anspruch genau genug zum Zeichnen des Graphen von Ableitungsfunktionen sind; ein rechnerischer Nachweis ist dennoch besser, weil die Grenzen des Rechners Probleme aufwerfen. Betrachten Sie dazu die folgende Abbildung, die für $h = \{10^{-14}\}$ entstanden ist:



Nun zeichnet $y_2(x)$ offenbar nicht mehr den Graphen der Ableitungsfunktion von $y = x^2$! - Können Sie das verstehen? - **Letzte Gewissheit liefert also nur die Rechnung.**

Aufgabe 5: Experimentieren Sie mit weiteren Werten für die Schrittweite h und mit anderen Funktionen.

Zusammenfassung:

Wenn man z. B. die kleine Schrittweite $h=0.001$ wählt, ist es möglich, den Graphen der Ableitungsfunktion $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ mit Hilfe der Differenzenquotientenfunktion

(*) $\text{diffquot}(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, in hoher Genauigkeit zu zeichnen. Damit beherrscht man die Graphen zahlreicher Ableitungsfunktionen schon bevor man den Term der jeweiligen Ableitungsfunktion kennt. Die Definition (*) kann als „Differenzenquotienten-**Baustein**“ bezeichnet werden. Derartige Definitionen sind kennzeichnend für eine ökonomische Arbeit mit Computeralgebrasystemen.

3.4 Wachstumsfunktionen im Leistungskurs Mathematik

(von Ursula Wunsch)

Wachstum • Exponentiell • Beschränkt • Logistisch	Regression	Anwendung: Wachstum bei Fichten	VOYAGE™ 200
--	------------	------------------------------------	-------------

Einleitung

Im zweiten Semester des Leistungskurses ist die Bearbeitung von Funktionen zum exponentiellen, beschränkten und logistischem Wachstum vorgesehen.

Der Einstieg über die Lösung von entsprechenden Differentialgleichungen ist von der 'mathematischen Seite' her sicher angemessen, aber er entspricht nicht der realen Situation. In der Realität geht man bei Wachstumsproblemen zumeist von gemessenen Wertepaaren aus.

Ohne den Einsatz eines CAS ist nur ungenau aus diesen Wertetabellen auf die Funktionsgleichung zu schließen. Man wählt dazu zwei Wertepaare und berechnet daraus die Parameter der Funktionsgleichung des angenommenen Wachstumsmodells.

Dabei hängt sehr viel vom Glück ab, ob die aus rechnerischer Sicht gewählten Wertepaare auch für die Funktion 'gut' gewählt sind.

Man muss also als Lehrer/in die Aufgaben so konstruieren, dass man mit einem solchen Vorgehen auch passende Funktionsgleichung erhält. **Mit dem VOYAGE™ 200 eröffnen sich hier Möglichkeiten realistischer zu arbeiten.**

Bei allen drei Wachstumsfunktionen handelt es sich um exponentielle Zusammenhänge, die durch Logarithmieren zu einer linearen Darstellung der Funktionswerte geführt werden können.

Exponentielles Wachstum

Die Funktionsgleichung ist von der Form $f(x) = ae^{kx}$, durch Logarithmieren erhält man $\ln(f(x)) = kx \ln(a)$.

Die Darstellung für den Logarithmus der Funktionswerte ist also eine Gerade. Eine Gleichung dieser Geraden lässt sich durch lineare Regression relativ einfach bestimmen. Und aus dieser Geradengleichung ist durch die Zusammenhänge $\ln(a)$ als y-Achsenabschnitt und k als Steigung die exponentielle Funktionsgleichung zu ermitteln. Der VOYAGE™ 200 bietet auch die Möglichkeit einer exponentiellen Regression an. Da aber keine Parameter über die Güte einer solchen Näherung Aufschluss geben, wäre dieser Weg aufwändiger als der beschriebene.

Beschränktes Wachstum:

Die Funktionsgleichung von der Form $f(x) = S - ae^{kx}$ wird zu $S - f(x) = ae^{kx}$ umgeformt und dann logarithmiert, so erhält man $\ln(S - f(x)) = \ln(a) + kx$.

Die Funktionsgleichung lässt sich auch hier wieder aus Steigung und y-Achsenabschnitt der Regressionsgeraden ermitteln.

Bei der Bearbeitung konkreter Aufgaben muss man zumeist davon ausgehen, dass die Schranke S nicht sofort aus den Werten abzulesen ist. Man kann daher einen Wert für S annehmen und durch die Güte der Ausgleichsgeraden abschätzen, ob der angenommene Wert verwendbar ist.

Logistisches Wachstum:

Einfacher zu bearbeiten als mit der Formel von Verhulst ist dieses Verhalten mit einer Funktionsgleichung in der Form $f(x) = \frac{aS}{a + (S - a)e^{-Skx}}$, dabei ist S die obere Schranke und a der Anfangswert.

Daraus erhält man: $\frac{1}{f(x)} = \frac{a}{aS} + \frac{(S - a)}{aS} e^{-Skx}$ bzw. $\ln\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{f(x)}\right) = \ln\left(\frac{S - a}{aS}\right) - Skx$.

Aus diesem linearen Zusammenhang ergibt sich die Funktionsgleichung des logistischen Wachstums durch $k = \frac{-m}{S}$ und $a = \frac{S}{1 + Se^b}$, wobei m die Steigung und b der y-Achsenabschnitt der Geraden ist. Auch beim logistischen Wachstum kann die Grenze S durch Schätzen und Verbessern der Ausgleichsgeraden ermittelt werden.

Anhand einer konkreten Aufgabe soll jetzt die Vorgehensweise mit dem CAS des VOYAGE™ 200 dargestellt werden (die Daten - nicht der Aufgabentext - wurden der "Fichtenaufgabe" aus den EPA-Mathematik 2002, S.20, entnommen).

Aufgabe:

Fichten stellen in Deutschland mit über 40% der Gesamtwaldfläche die wichtigste Holzart dar. In einer Region wurden folgende Durchschnittswerte gemessen:

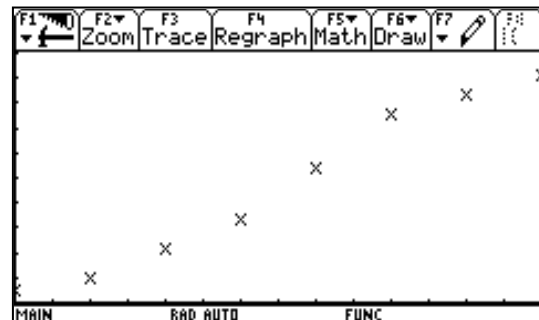
Alter des Baumes in Jahren	0 (Setzling)	20	40	60	80	100	120	140	160
Durchmesser in m (bei älteren Fichten gemessen in 1,30 m Höhe)	0,05	0,1	0,22	0,33	0,54	0,75	0,83	0,91	0,95

Bestimmen Sie unter der Annahme des logistischen Wachstums eine Gleichung der Funktion d mit $d(t) = \frac{aS}{a + (S - a)e^{-Sk t}}$, die das Dickenwachstum der Fichten beschreibt. Skizzieren Sie die gemessenen Durchschnittswerte sowie den Graphen von d.

(1) Die Werte werden in den Data/Matrix-Editor des Rechners eingegeben.

(2) Über F2 'Plot Setup' ist die Darstellungsweise dieser Werte zu setzen und dann im Grafikfenster darzustellen.

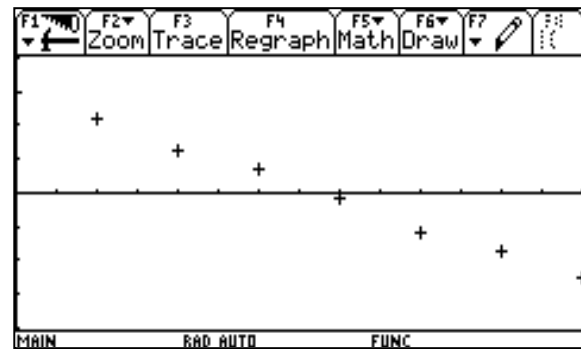
	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA							
	c1	c2	c3	c4	c5		
3	40	.22					
4	60	.33					
5	80	.54					
6	100	.75					
7	120	.83					
8	140	.91					
9	160	.95					
r3c1=40							
MAIN RAD AUTO FUNC							



(3) An der Darstellung sieht man, dass eine Annäherung durch logistisches Wachstum sinnvoll ist. Auch die obere Grenze kann durch die Zeichnung abgeschätzt werden, sie kann nur unwesentlich größer als der letzte Funktionswert sein. Eine erste Vermutung könnte also $S=0,98$ sein.

(4) Mit dieser Annahme trägt man jetzt die logarithmischen Werte in c3 ein, dazu genügt es in der Titelzeile c3 die Berechnungsformel einzugeben. Und diese logarithmischen Werte lassen sich dann auch plotten.

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA							
	c1	c2	c3	c4	c5		
1	0	.05	2.9434				
2	20	.1	2.195				
3	40	.22	1.2599				
4	60	.33	.69808				
5	80	.54	-.1846				
6	100	.75	-1.162				
7	120	.83	-1.691				
c3=ln(1/c2-1/(<.98>))							
MAIN RAD AUTO FUNC							



(5) Über F5 'Calc' kommt man jetzt in die Auswahlmenüs um die lineare Regression der logarithmischen Werte berechnen zu lassen.

main'sichten Calculate

Calculation Type.. LinReg →

x..... c1

y..... c3

Store RegEQ to.... none→

Use Freq and Categories? NO→

Freq.....

Category.....

(include Categories) C

Enter=SAVE ESC=CANCEL

USE + AND + TO OPEN CHOICES

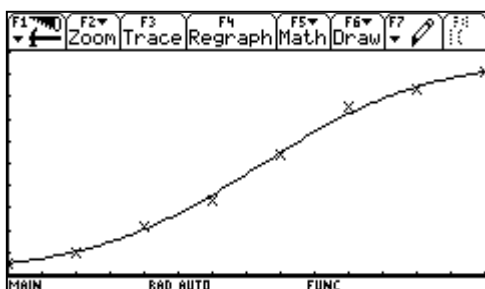
	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA							
	c1						
1	0						
2	20						
3	40						
4	60						
5	80						
6	100						
7	120						
STAT VARS							
y=a·x+b							
a = -.039578							
b = 2.952856							
corr = -.99908							
R² = .998161							
Enter=OK							
c3=ln(1/c2-1/(<.98>))							
MAIN RAD AUTO FUNC							

(6) Man erhält als Steigung den Wert $a = -0,039578$ und als y-Achsenabschnitt $b = 2,952856$. Die Güte der Gerade ergibt sich aus dem Wert für den Korrelationskoeffizienten 'corr'. Im zweiten Semester fehlen die statistischen Voraussetzungen für das Verständnis dieses Wertes, daher soll als Abschätzung genügen, dass die Gerade um so besser ist, je dichter der Betrag dieses Wertes an 1 liegt.

(7) Es ist an dieser Stelle sehr leicht, die Annahme für S zu verändern, man muss nur in der Formel zur Berechnung von c3 einen anderen Wert eintragen und wieder eine lineare Regression durchführen. Im konkreten Beispiel erhält man für $S = 0,97$ und auch für $S = 0,99$ schlechter angepasste Geraden, die Werte des Korrelationskoeffizienten corr sind in diesen Fällen $-0,9981$ bzw. $-0,9989$.

(8) Aus der Steigung und dem y-Achsenabschnitt der Regressionsgeraden erhält man für die Funktionsgleichung des logistischen Wachstums: $a = 0,049552$ und $k = 0,251682$ und damit die Gleichung $d(t) = \frac{0.048561}{0.049552 + 0.930448e^{-0.039579t}}$.

Der Anfangswert $d(0)$ stimmt mit dem aus der Annäherung berechneten Wert a ziemlich gut



überein und auch die Zeichnung des Graphen zu $d(t)$ zusammen mit den vorgegebenen Werten ergibt eine gute Übereinstimmung.

3.5 Viele Kreise - eine Unterrichtsstunde im Grundkurs, 1. Semester (von Eberhard Lehmann)

Kreise	Parameterdarstellung	Anwendung: Türgitter	VOYAGE™ 200
--------	----------------------	-------------------------	-------------

Vorbemerkung:

Die im Folgenden skizzierte Stunde im Grundkurs Mathematik, 1. Semester, wurde in den normalen Kursablauf eingeschoben. Sie wurde von mir als Projektleiter des Berliner CAS-Projekts Sekundarstufe 2 gehalten – die Klasse war mir unbekannt. Von der sonst unterrichtenden Lehrerin Frau Vogt wurden zuletzt die Ableitungen der Sinus- und Cosinus-Funktion behandelt und u.a. bei der Kettenregel verwendet. Jedem Schüler steht ein Taschencomputer VOYAGE™ 200 ständig zur Verfügung. Die Schüler haben den Rechner seit ca. drei Monaten.

Die hier dargestellte Stunde hatte folgende Zielsetzungen:

a) Schwerpunkte:

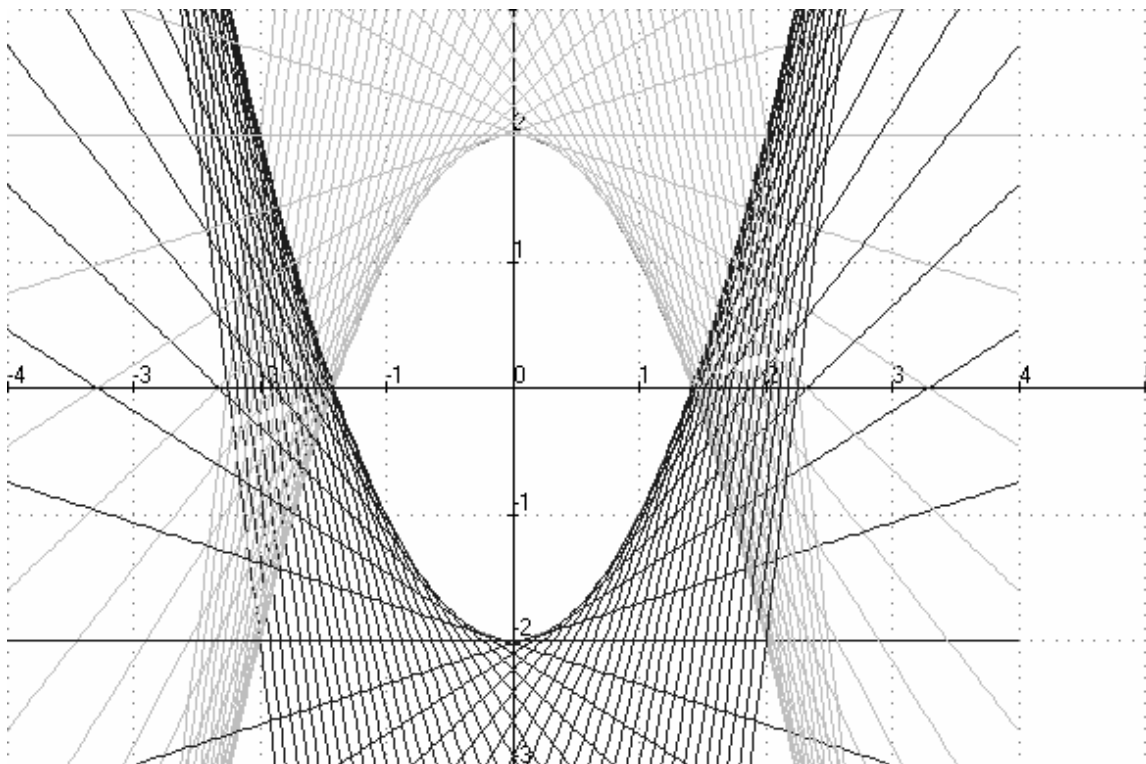
- Einführung der Parameterdarstellung von Kreisen und
- Anwendung bei der Zeichnung vieler Kreise an verschiedenen Positionen im Koordinatensystem mit Hilfe des Taschencomputers

b) Außerdem:

- Übungen zu \sin und \cos in einer neuen Form
- Wiederholung von Gradmaß und Bogenmaß.

Die Stunde wurde eingeleitet mit einer Folie, die ein Bild des Malers Kandinsky zeigte, in dem zahlreiche Kreise künstlerisch dargestellt waren. Das hinten gezeigte Foto (Türgitter mit vielen systematisch angeordneten Kreisen, aufgenommen in Kalabrien) bot danach einen Einblick in die spätere Aufgabenstellung. Diese von den Schülern unerwartete „unmathematische“ Einleitung in die Stunde führte ersichtlich zu einer guten Motivation und Aktivität der Schüler, die insbesondere in den Phasen (2) und (3) deutlich wurde.

- (1) Nach einer durch den Arbeitsbogen vorstrukturierten Einführung der Kreis-Parameterdarstellung mit der Darstellung des Einheitskreises auf dem Bildschirm des Taschencomputers ging die Stunde in eine
- (2) offene Phase über, in der die Schüler weitere Kreise nach eigenem Gutdünken auf dem Bildschirm erzeugten.
- (3) Einige Ergebnisse wurden von den Schülern über den Projektor (View-Screen) vorgestellt.

Blickpunkt 3

Tangenten an Parabeln – wie geht das?

Dr. Eberhard Lehmann, 12-2003
 Stunde im Grundkurs ma-1 an der Fritz-Karsen-Schule

*Arbeitsbogen
 und Folie*

Stundenthema: Viele Kreise

Unsere gemeinsame Arbeitsgrundlage ist die
Parameterdarstellung des Einheitskreises
 $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$.

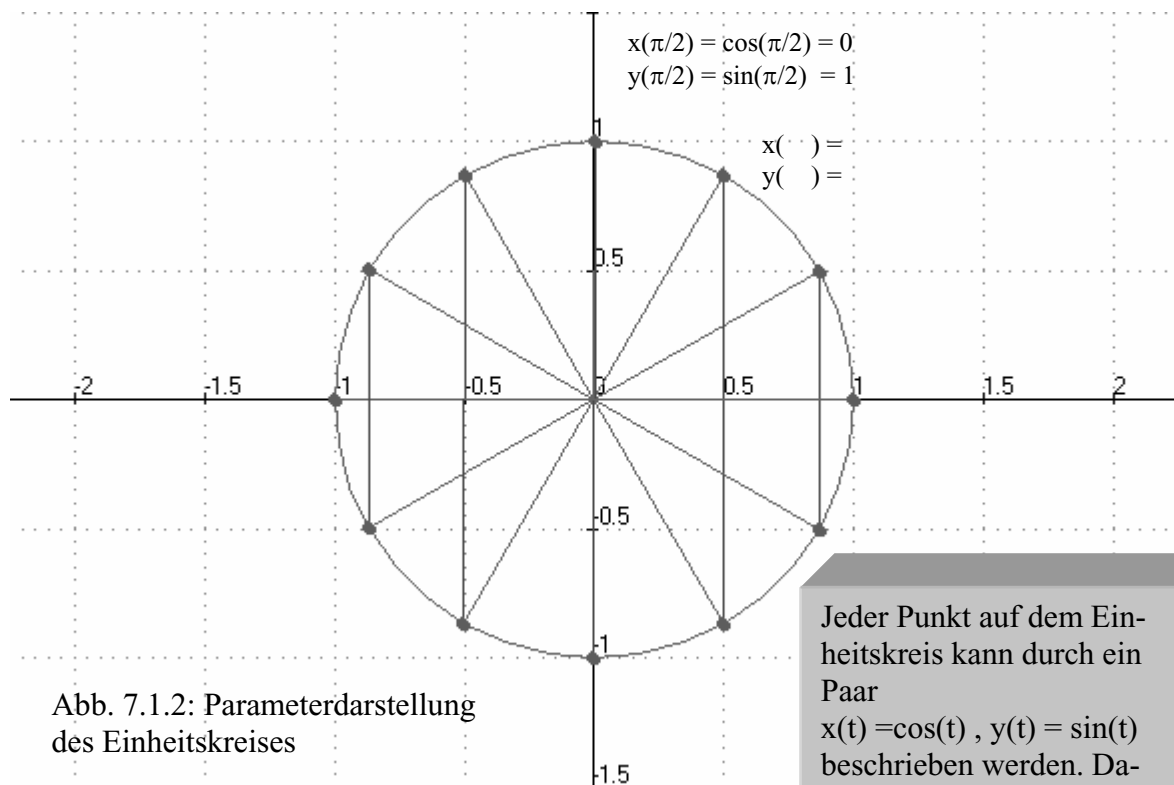


Abb. 7.1.2: Parameterdarstellung
 des Einheitskreises

Jeder Punkt auf dem Einheitskreis kann durch ein Paar $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$ beschrieben werden. Dabei gilt $t \in [0, 2\pi]$.

Erläutere diese Aussage!

Hausaufgabe:

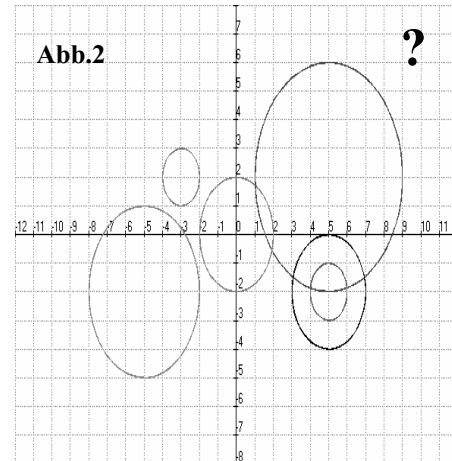
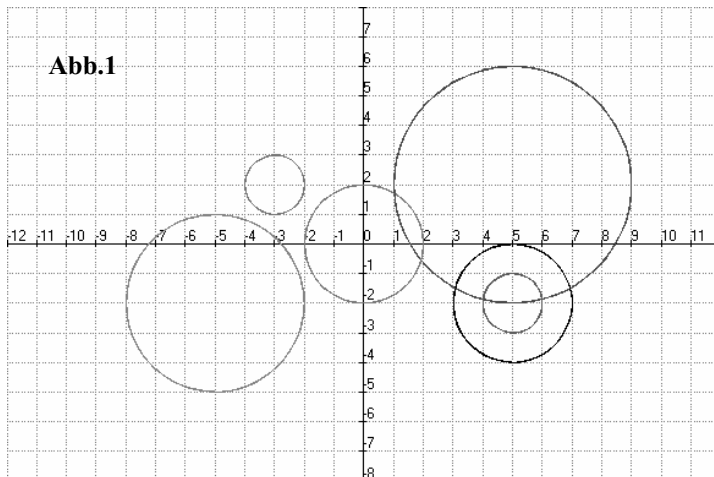
- Berechne die Punkte des Einheitskreises zu den Winkeln mit $t = 0.5$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$, $t = 35^\circ$, $t = 270^\circ$, $t = 2\pi$.
- Berechne den Winkel t zu den Kreispunkten $(0.5, 0.8860)$, $(-0.5, -0.8860)$.
- Liegen die Punkte $(0.5, 0.88)$, auf dem Einheitskreis?

Folie

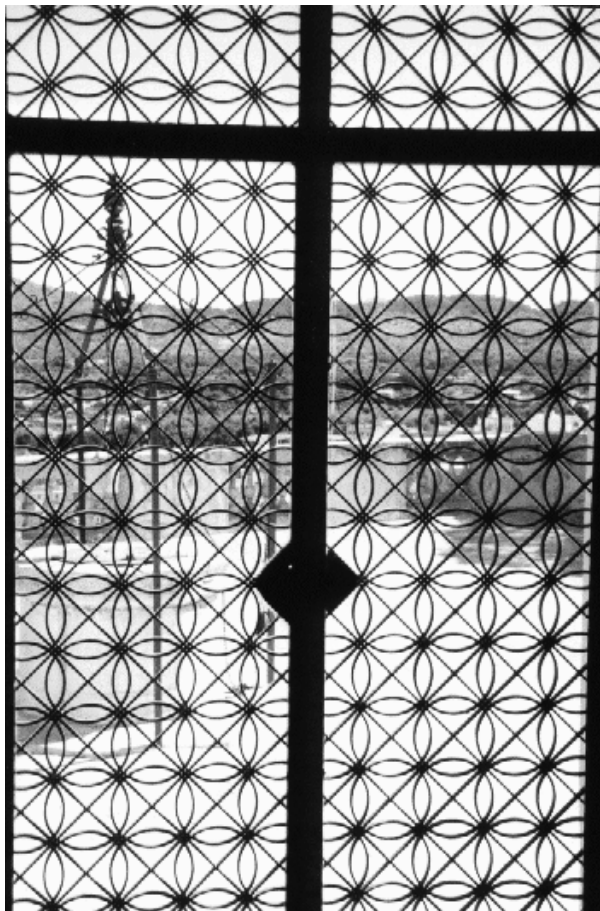
Aufgabe 1:

Die folgende Abbildung 1 zeigt viele Kreise an verschiedenen Stellen des Koordinatensystems.

- Zeichne diese Kreise mit dem Taschencomputer.



Aufgabe 2:

*Eine offene Aufgabenstellung*

- Bescribe die Abbildung eines Türgitters (aufgenommen in der Stadt Cosenza in Kalabrien / Italien) unter Beachtung mathematischer Gesichtspunkte.
- Versuche mit dem Taschencomputer eine (teilweise) Nachkonstruktion der Kreise.
- Formuliere weitere Aufgaben unter Bezug auf die Abbildung.

3.6 Anmerkungen zu Hausarbeiten mit CAS

Der Taschencomputer ermöglicht andere Arten von Hausaufgaben als bisher. Hierbei kommen die Vorteile des bequemen Berechnens auch komplizierter Terme und die Möglichkeiten des schnellen Zeichnens von Grafen besonders zum Tragen. Die Aufgabenstellungen können damit u.a. interessanter werden und mehr experimentelles Arbeiten berücksichtigen. Die Vielfalt der Schülerlösungen wird sich erhöhen, da es in der Regel mehrere Bearbeitungsmöglichkeiten allein durch die Art des Computereinsatzes gibt.

Normalfall im Unterricht ist häufig die Hausaufgabe (HA), die sich bezieht auf das

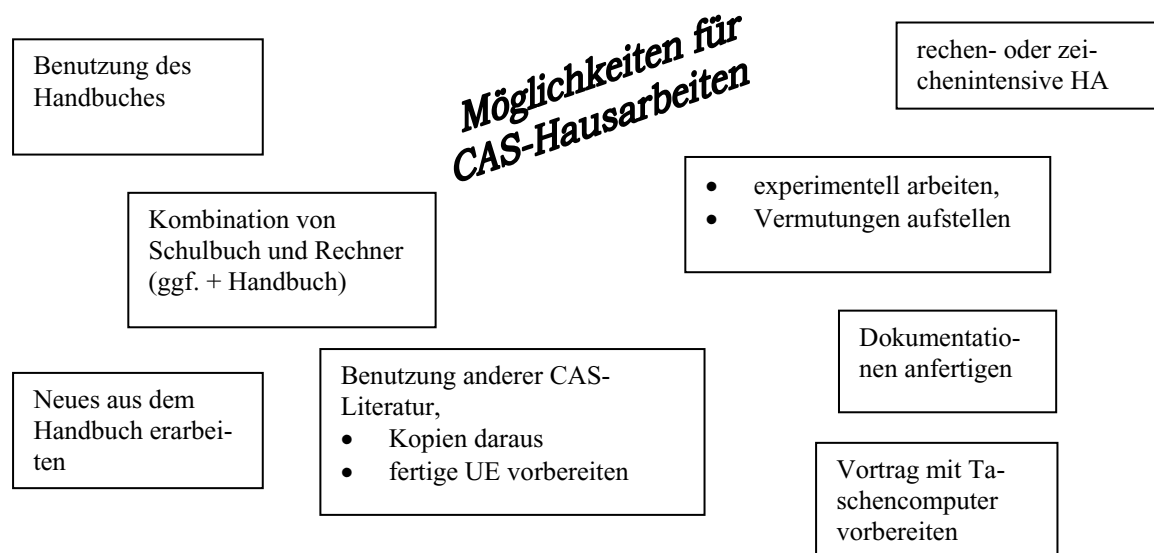
- Üben vorher gelernten Stoffes.

Dem werden nun weitere Hausaufgabenarten gegenübergestellt: Die

- vorbereitende HA,
- produktive HA,
- experimentelle HA,
- lern- und arbeitstechnische HA,
- kreative HA.

Es wird darauf hingewiesen, dass

- jede derartige Hausarbeit nachfolgenden Unterricht (ggf. sogar für längere Zeit) initiiert,
- der Lehrer vor der Aufgabe steht, die zu erwartende Vielfalt von HA-Bearbeitungen im Unterricht zu bewältigen (inhaltlich und zeitlich). Hierfür muss er besondere Strategien entwickeln, z. B.:
 - Präsentieren von Lösungen durch verschiedene Schüler,
 - Einsammeln und Bewerten von Schülerarbeiten,
 - Erstellen von Postern zum Aushang im Klassenraum.



Beispiele hierzu:

(1) Arbeitsbogen - Auf den Seiten 36, 37 werden bereits Möglichkeiten für Hausaufgaben angeboten, auch in Form eines Arbeitsbogens, bei dem die Schüler z.B. zu Hause jeweils unterschiedliche Teilaufgaben bearbeiten. Weitere Aufgabenstellungen sind in den Beiträgen von Kapitel 3 zu finden.

(2) Handbuch – Im Rechner-Handbuch wird die Zeichnung eines Kreises auf dem TI-Bildschirm beschrieben. Vollziehe die Konstruktion nach, erkläre die Entstehung des Kreises und die mathematischen Hintergründe.

(3) Parabelwald – Im Unterricht haben wir die Zeichnung der Normalparabel $y = x^2$ besprochen. Erzeuge auf dem Bildschirm einen „Parabelwald“.

(4) Termstruktur – Ist die Aussage wahr? Untersuche mit dem Taschencomputer!

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} + \frac{2(a - b)^2}{4b - 4a} = \frac{a - b}{2}$$

Wie könnte der Taschencomputer auf das Ergebnis gekommen sein?

Hinweis: Hier wäre zu diskutieren, ob man so etwas noch ohne CAS bearbeiten sollte.

(5) Vortrag – Bereite eine Präsentation vor unter Benutzung des Taschencomputers: Die Grafen von $y = \sin(x)$ und $y = a \cdot x + b$ schneiden sich in den Punkten ...

(6) Bild auswerten – Dieses Foto mit Brücken in Köln ist ein schöner Beitrag zum Thema „Parabeln“. – a) Erläutere diese Aussage und suche andere Parabel-Aufnahmen. Sind es wirklich Parabeln? b) Versuche eine mathematische Modellierung, indem Du eine passende Parabelgleichung benutzt.



4. Klausuren mit CAS-Einsatz

4.1 Anmerkungen zur Zeiteinschätzung bei der Bearbeitung von CAS-Aufgaben in Abitur- und anderen Klausuren und in Klassenarbeiten

Hinweis: Die folgenden Überlegungen gelten in übertragenem Sinn auch für den Unterricht mit CAS.

Vor einer Unterschätzung des Zeitaufwands von Rechnungen und Zeichnungen mit CAS von Taschencomputern muss gewarnt werden - u.a. aus folgenden Gründen:

1. Eingaben können *Syntaxfehler* aufweisen und müssen ggf. korrigiert werden. Das ist gerade bei komplexeren Termen nicht selten nötig.
2. Bei *Semantikfehlern* muss neu überlegt und neu eingegeben werden.
3. Ein- und Ausgaben müssen je nach Aufgabenstellung *dokumentiert* werden.
4. Dabei muss ggf. *zwischen wichtigen und nebensächlichen Zeilen unterschieden* werden.
5. *Ausgaben* sind u. U. unhandlich und müssen ggf. umgeschrieben werden.
6. Bei komplexen Termen / Zeichnungen *vergeht Rechenzeit*, insbesondere ist das der Fall bei Kurvenscharen.
7. Bei Zeichnungen muss die *passende Window-Einstellung* gefunden werden.
8. Bei Rechnungen und Zeichnungen kommt es häufig auf die *richtige modus-Einstellung und andere Einstellungen* (rad-degree, exact-approx, Nachkommastellen, line usw.) an.
9. Da es häufig mehrere Bearbeitungsmöglichkeiten mit CAS gibt, benötigt der Schüler die Kompetenz, sich für einen Weg zu entscheiden. Das erfordert *gezielte und kompetente Auswahl der CAS-Befehle*.
10. Die Rechnerarbeit kann von den Schülern sehr unterschiedlich geleistet werden. Das reicht von *ungeschickter Bearbeitung bis hin zu sehr eleganter Bearbeitung*, z.B. durch passende Abkürzungen von Funktionen oder Datenmengen und deren Mehrfachverwendung.
11. *Experimentelles Arbeiten kostet besonders viel Zeit* - hierauf treffen alle obigen Aspekte zu.
 - Alle genannten Aspekte sind typisch für die Arbeit mit CAS und müssen beim Zeitansatz für die Teilaufgaben berücksichtigt werden. Das bedeutet u.a., dass eine komplexere Rechenaufgabe oder Zeichnung nicht einfach mit einem oder wenigen Knopfdrücken erledigt ist.
 - **Für die Zuordnung von Bewertungseinheiten ist weiterhin (wie bisher) die für eine Teilaufgabe benötigte Zeit entscheidend.** In diese gehen indirekt die abgefragten Kompetenzen mit ein!
 - **Zuletzt ein sehr hilfreicher Tipp für die Zeiteinschätzung:** Man stelle alle bei der eigenen Lösung verwendeten Computerbildschirme zusammen und markiere das, was der Schüler dokumentieren soll. Beides vermeidet eine Unterschätzung des benötigten Zeitaufwands!

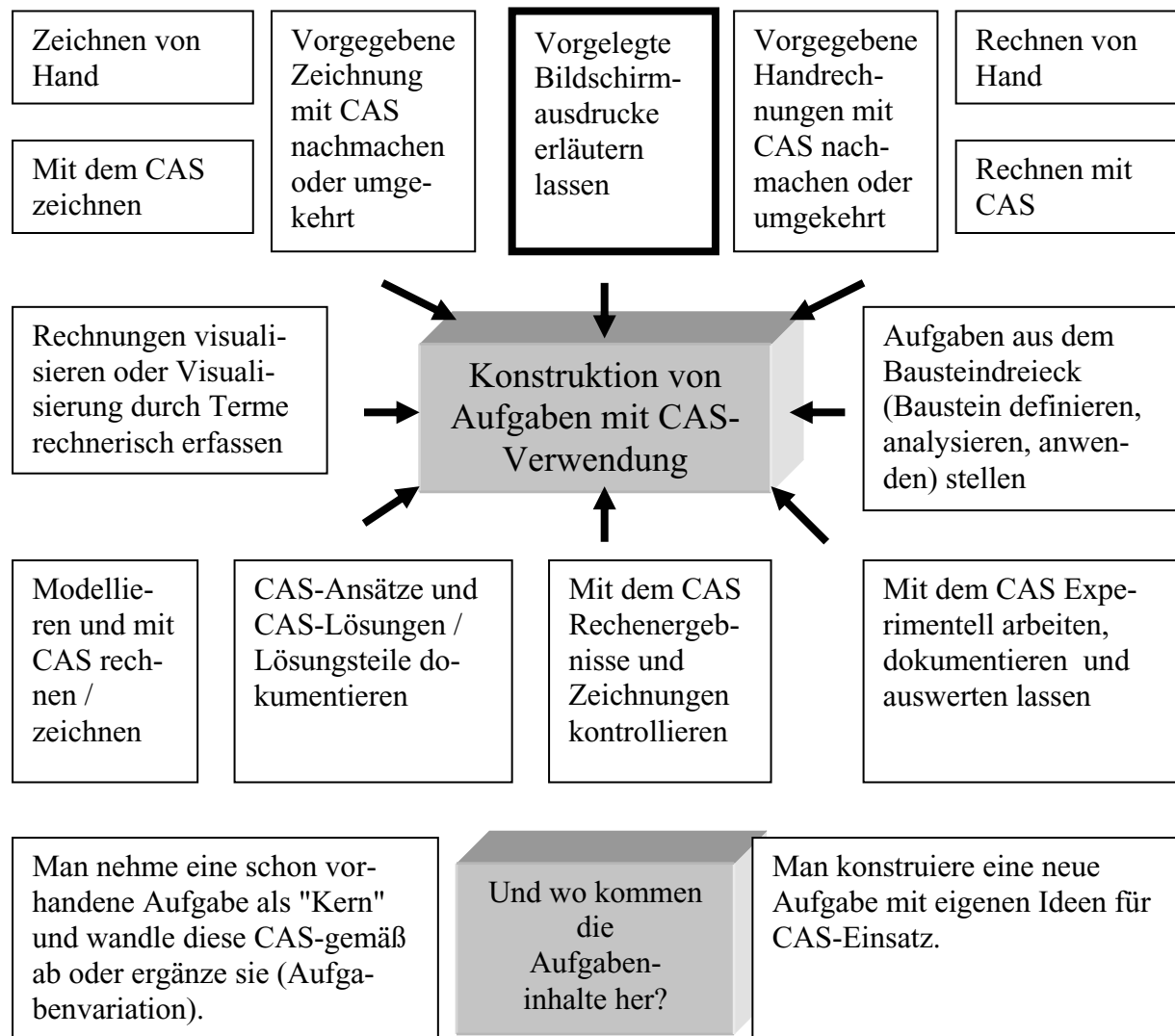
Rechnereinsatz muss vom Benutzer geplant werden! Bei komplexeren Bearbeitungen entspricht das dem Entwurf eines kleinen Programms und das kostet Zeit!

4.2 Tipps für Klassenarbeiten mit CAS - auch nützlich für den Unterricht

Sie finden hier Tipps und zusätzliche Erläuterungen zu folgenden Aspekten:

- Visualisieren mit CAS-Hilfe
- Kontrollieren mit CAS
- Vorgelegte Zeichnungen oder Rechnungen ergänzen
- Aufgaben zur Dokumentation
- Das Bausteindreieck (definieren, analysieren, anwenden)
- Veränderte Aufgabekultur → offene Aufgaben
- CAS und Handrechnung
- Ansätze finden lassen - Modellbildung

Die folgende Abbildung fasst mögliche Aufgabenansätze zusammen:



Visualisieren mit CAS-Hilfe

Das Arbeiten mit Visualisierungen kann von verschiedenen Seiten aus erfolgen:

Rekonstruktion gegebener Abbildungen:

Die Rekonstruktion vorgegebener Abbildungen kann man als eine Standardaufgabe für Grafikrechner oder CAS ansehen. Der Lösungsweg wird in der Regel sein:

- 1) Den geeigneten Maßstab wählen und für den ausgewählten Graphen ablesbare Punkte suchen. Die Koordinaten ablesen.
- 2) Mit diesen Vorgaben kann die Funktionsgleichung aufgestellt werden.
- 3) Zeichnen des Graphen.
- 4) Kontrolle des Graphen (charakteristische Punkte vergleichen).
- 5) Entsprechend wird mit allen Graphen verfahren.
- 6) Gesamtbild kontrollieren.

Um zur Rekonstruktion einer Zeichnung zu kommen, muss der Schüler den *Zusammenhang* zwischen Funktionsgleichung und Graph (z. B. lineare Funktionen und Geraden) *verstanden haben*. Er liest zum Beispiel bei Geraden m und n oder 2 Punkte aus dem Graphen ab, ermittelt die Funktionsgleichung und zeichnet erneut. Dabei muss er noch die Fenstergröße und den Maßstab beachten.

Je nach Kenntnisstand der Schüler und bei komplexeren Abbildungen kann diese Aufgabenstellung einen guten Zugang zum experimentellen Arbeiten mit dem Rechner geben.

Kontrollieren mit CAS

Das CAS kann auf verschiedene Arten zu Kontrollarbeiten eingesetzt werden. Es schafft damit Sicherheit für den Schüler.

- Eigene oder vorgelegte Handrechnungen überprüfen
- Zeichnungen überprüfen
- Vermutungen überprüfen
- Vorgelegte Lösungen verifizieren

Aufgaben zur Dokumentation

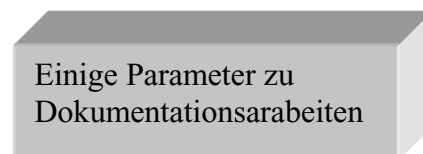
a) Allgemeine Bemerkungen

Dokumentationserwartungen:

Die Erwartungen an die Dokumentation von Computerarbeit entwickelt sich im Verlaufe des Vertrautwerdens der Schüler mit dem Programm und den mathematischen Inhalten.

Die jeweilige Dokumentation ist situationsabhängig und softwareabhängig!

- Welchen Rechner-Kennntnisstand haben die Schüler?
Ist es eine Neueinführung?
War bisher eine
- nur kurze Benutzungsdauer,
- mittlere Benutzungsdauer,
- bereits lange Benutzungsdauer?
- Welche Software wird benutzt? Welche Verknüpfungsmöglichkeiten mit anderer Software (z.B. mit Textverarbeitung) sind möglich und erwünscht?
Handelt es sich um CAS, DGS, Tabellenkalkulation, sonstige spezielle Mathematik-Software?



- Welche Dokumentationswege sind in dem jeweiligen Kurs überhaupt möglich? In welcher Situation? – Hausarbeit, Unterrichtsarbeit, Klassenarbeit, Klausur, Abiturarbeit.

Daraus folgt:

Es lassen sich nur einige wenige allgemeine Grundsätze aufstellen und einige Tipps zur Dokumentation von Computerarbeit geben. Es ist nötig, sich die jeweiligen Situationsparameter bewusst zu machen.

b) Dokumentationstipps für Schüler und Lehrer

Hinweise an Schüler zum Übernehmen von Zeichnungen vom Computerbild

- Auf kariertem Papier mit Bleistift zeichnen,
- charakteristische Punkte möglichst genau eintragen (z. B.: Schnitte mit den Achsen, Extremwerte, ...), sonstige Auffälligkeiten beachten,
- wichtige Zahlenwerte (gerundet) eintragen (Rechner-Koordinatenanzeigen verfolgen),
- in der Regel maßstabsgetreu zeichnen.

Hinweise an Schüler zur Dokumentation von Termen

- Für einen Vorgang (Bildschirmarbeit) ein Rechteck geeigneter Größe als Bildschirmabbild benutzen. Im Rechteck stehen Eingaben, Ausgaben und Erläuterungen dazu. Durch das Rechteck werden Texte zur Rechnerarbeit abgegrenzt von dem anderen Text.

Eingabe:	$m \cdot x + n \rightarrow \text{gerade}(x, m, n)$
ggf. Erläuterungen:	Hier wird ein Baustein für die Geradenform $y = mx + n$ definiert
Ausgabe:	done
ggf. Erläuterungen:	der Baustein wurde gespeichert
Eingabe	$\text{gerade}(x, 3, 4)$ Der Baustein wurde aufgerufen mit $m=3$ und $n=4$
Ausgabe	$3x+4$ für m und n wurden die Werte eingesetzt, so entsteht der ausgegebene Term
Hinweis: Diese ausführliche Form empfiehlt sich zu Beginn einer entsprechenden Unterrichtssequenz.	

- **Bildschirm abschreiben:**

$\text{solve}(x^2+3x+2=0, x)$	$x = -1 \text{ or } x = -2$
usw.	

Hat den Vorteil, dass man im Schülertext sofort die TI-Arbeit erkennt. Fehleingaben werden nicht notiert!

- Man kann die Teile der Bildschirmarbeit auch farblich markieren lassen.

c) Komplexe Terme, längere Rechnungen

Bei komplexen Termen und längeren Rechnungen sollte man mit Zwischenergebnissen arbeiten. Diese werden geeignet bezeichnet und können in der darauf folgenden Arbeit wieder verwendet werden. Häufig empfiehlt sich dabei auch die Berücksichtigung der auftretenden Variablen als Parameter.

Beispiel: Die Gleichung $m \cdot x + 2 = 3 \cdot x - 2$ wird abgekürzt mit `gleich(x,m)`. Also $m \cdot x + 2 = 3 \cdot x - 2 \rightarrow \text{gleich}(x,m)$. Damit steht dieser Baustein ab jetzt zur Verfügung.

Teilergebnisse vorgeben

Bei komplexeren Aufgaben trägt ein Vorgeben von Teilergebnissen (Zahlenergebnisse, Terme, Zwischenzeichnung) zu einer Vorstrukturierung bei und ermöglicht Kontrollen, die den Schüler bei seiner Arbeit bestätigen. Auf diese Weise können schwierigere Aufgaben "entschärft" werden.

d) Umfang der Bearbeitungen

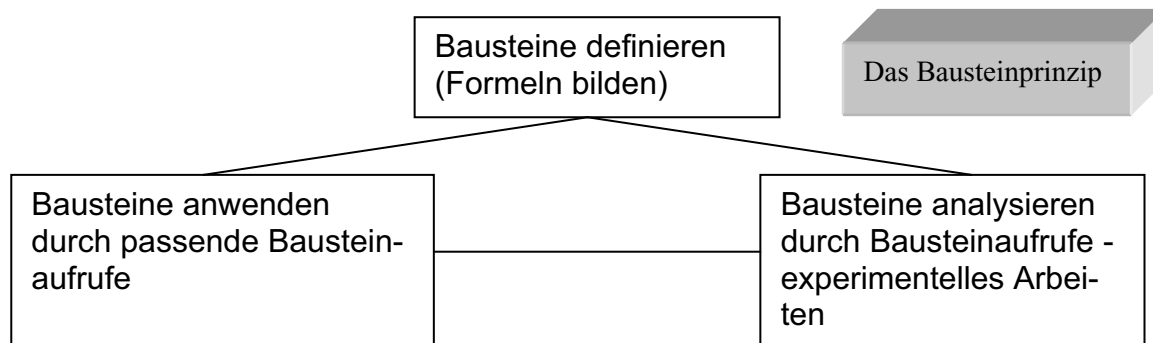
Dieser kann recht unterschiedlich sein. So kann man z.B. einige Zeilen der Abbildungen durch zusätzliche Heftskizzen oder weitere Anwendungen eines definierten Bausteins erläutern.

Vorgelegte Zeichnungen oder Rechnungen ergänzen oder nachvollziehen **Formulierung von Aufgaben zu gegebenen Bildern**

- 1) Ein Schüler hat mit der Abstandsformel folgendermaßen gearbeitet (gegebene Bildschirmausdrucke).
Erläutere seinen Weg mit Hilfe eines Textes und ggf. auch durch zusätzliche Skizzen.
 - 2) Formuliere Aufgaben zum Inhalte der beiden Bilder.
 - 3) Schreibe einen mathematischen Aufsatz zu den beiden Abbildungen.
 - 4) Ohne das Vorgeben der beiden Abbildungen: Veranschauliche das Problem „Abstand eines Punktes von einem Graphen“ mit Hilfe des CAS und erläutere dein Vorgehen.
- Die Anforderungen steigen von 1) nach 4).

Das Bausteindreieck

Der erfahrene CAS-Benutzer verfährt häufig nach dem „Bausteinprinzip“. Hierfür ergeben sich diverse Aufgabenstellungen und Ansätze, indem man das "**Bausteindreieck**" beachtet.

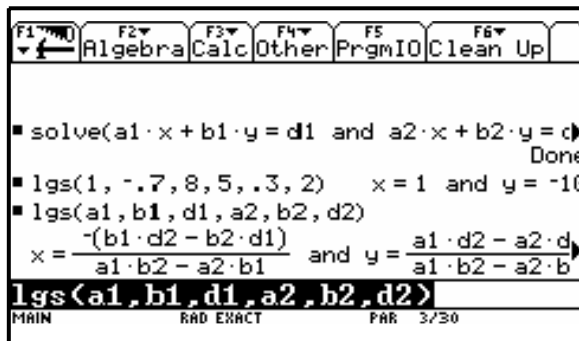


Für Aufgaben mit Geraden sind z. B. folgende Bausteine geeignet:

$m \cdot x + n$	\rightarrow <code>gera(x,m,n)</code>	unter zusätzlicher Benutzung von
$a \cdot x + b \cdot y = c$	\rightarrow <code>glei(a,b,c)</code>	<code>SOLVE</code>
$a \cdot x + b \cdot y = c$	\rightarrow <code>glei2(x,y,a,b,c)</code>	

Arbeitet man z. B. viel mit linearen Gleichungssystemen, so empfiehlt sich die Definition einer Bausteins:

- $\text{SOLVE}(a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1 \text{ and } a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2, \{x, y\}) \rightarrow \text{lgs}(a1, b1, c1, a2, b2, c2)$
- Der Aufruf $\text{lgs}(1, -0.7, 8, 5, 0.3, 2)$ liefert dann Lösungen zu einem speziellen LGS:
- Der Aufruf $\text{lgs}(a1, b1, c1, a2, b2, c2)$ liefert sogar die Formeln für x und y .



- Veränderte Aufgabenkultur → offene Aufgaben

Die veränderte Aufgabenkultur wird deutlich in

- einer Betonung des Findens von Ansätzen,
- den Aufträgen, vorgegebenes Material weiter zu verarbeiten,
- einer Vermischung händischen Rechnens mit CAS- und Grafikanteilen,
- Verständnisfragen zur verwendeten Mathematik,
- der Aufforderung zur Wahl eigener oder mehrerer Lösungswege.

CAS und Handrechnung

Grundlegende Algorithmen müssen im Unterricht auch von Hand beherrscht werden - allerdings nicht mehr in dem Umfang und der Tiefe, wie noch häufig praktiziert. Aufgabenskaden können entfallen. Wenn die Terme komplizierter werden, ist der Einsatz des CAS angesagt! Um dieses verständlich einzusetzen, muss auf das Verstehen des Algorithmus großen Wert gelegt werden:

Weniger rechnen - mehr verstehen!

Weiterhin muss bei den Entscheidungen zwischen Hand- und Computerrechnung immer beachtet werden, ob es sich um langfristig zu sichernde Algorithmen handelt. Kurzfristig kann von Schülern mehr Handrechnungen erwartet werden, als bei länger zurückliegenden Algorithmen. Diese Ansätze können auch in Klassenarbeits- und Klausuraufgaben berücksichtigt werden:

Einfache Rechnungen von Hand durchführen - Kontrolle von Handrechnungen mit dem CAS
 - Handrechnungen mit dem CAS simulieren - Nachrechnen von vorgelegten CAS-Rechnungen auf Bildschirmausdrucken durch Handarbeit - komplizierte und aufwändige Rechnungen an das CAS geben.

Ansätze finden lassen - Modellbildung

In verstärktem Umfang kann es nun auch in Klassenarbeiten / Klausuren um das Modellbilden aus einem Text heraus und das Bearbeiten der dann notwendigen Algorithmen mit einem CAS gehen. Anschließend erfolgt eine verständige Auswertung der vom CAS erzeugten Ergebnisse und ggf. eine Korrektur der Ansätze.

4.3 Eine Grundkursklausur zur Analytischen Geometrie

OSZ, Lutz Geist Wirtschaft und Sozialversicherung (gymnasiale Oberstufe) Klasse: Gk 114 Name:	1. KLASSENARBEIT	24.11.2004 Fach: M Blatt-Nr.: 1
--	-------------------------	---

1. Bei einer Expedition soll im Punkt S (0|0|1) eine Verbindung zum Basislager B(10|50|0) durch Richtfunk hergestellt werden. (Koordinateneinheit: 1 km) (15)
 - a) Berechnen Sie die Entfernung SB !
 - b) Im Punkt R₁ (0|10|1) wird eine Richtfunkstation eingerichtet.
Berechnen Sie den Winkel α zwischen den Strecken $\overline{R_1S}$ und $\overline{R_1B}$!
 - c) Zur Verbesserung der Empfangsqualität wird im Punkt R₂ (5|30|0,5) eine Richtfunkstation zwischengeschaltet.
Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g auf, die durch die Punkte R₁ und R₂ geht!
Weisen Sie nach, dass der Punkt B auf der Geraden g liegt!

2. Bei der Untersuchung von Molekülstrukturen werden Punktmodelle betrachtet. Das SiO₄-Molekül bildet einen Tetraeder mit den Eckpunkten A(1|0|0), B(-1|2|1), C(3|1|2) und D(0|1|-4). Die Sauerstoffatome befinden sich an den Eckpunkten des Tetraeders. Das Siliziumatom befindet sich mitten im Tetraeder. (44)
 - a) Stellen Sie das Schrägbild des Tetraeders dar!
 - b) Berechnen Sie die Kantenlängen des Tetraeders!
→ (Einsatz des CAS wegen des hohen Rechenaufwands, vielfache Wiederholungen)
 - c) Ermitteln Sie die Innenwinkel des Grunddreiecks BCD und des Seitendreiecks ABC.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Grunddreiecks BCD!
→ (Einsatz des CAS kann die Winkelberechnung zeitlich verkürzen, Routinen nutzen)
 - d) Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E an, die durch die Punkte B, C und D aufgespannt wird!
→ (Einsatz des CAS nicht unbedingt notwendig)
 - e) Längs der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ trifft ein schmaler Lichtstrahl im Punkt P auf die Seitenfläche BCD und tritt im Punkt Q der Seitenfläche CDA aus. Berechnen Sie die Länge des Weges, den der Lichtstrahl ungehindert innerhalb des Moleküls zurückgelegt!
→ (Einsatz des CAS wegen des hohen Rechenaufwands)
 - f) Ein zweiter paralleler Lichtstrahl verläuft durch den Punkt C des Moleküls. Ermitteln Sie den Spurpunkt S_{xz}!

4.4 Eine Grundkursklausur zur Analysis

(von Christiane Vogt, Fritz-Karsen-Gesamtschule)

Mathematik-Klausur, Kurs ma-2, Datum:	Name:
--	--------------

Hinweis: Kennzeichnen Sie in Ihren Aufzeichnungen deutlich, an welchen Stellen Sie den VOYAGE™ 200 eingesetzt haben und geben Sie die benutzten Befehle an (z.B. Tabelle).

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Eine Bakterienkolonie enthält 4000 Bakterien. Man findet heraus, dass sich die Anzahl der Bakterien nach jeweils 3 Stunden verachtfacht.

- Geben Sie das Wachstumsgesetz in der Form $f(x) = ca^x$ an und erläutern Sie kurz die Bedeutung der Parameter a und c und der Variablen x (wichtig ist die Einheit von x).
- Ändern Sie die Funktionsgleichung so, dass man für die Variable x die Einheit „Stunden“ benutzen kann und ergänzen Sie die Tabelle.

Zeit in Stunden	0	1	2	3	4
Bakterienanzahl					

Aufgabe 2 (14 Punkte)

- Geben Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktionen an:

$$f(x) = \ln(x + 5.5),$$

$$g(x) = x^2,$$

$$h(x) = \ln(x) - 3.$$

- Entscheiden und begründen Sie, ob die Funktionen aus Aufgabe 2a) umkehrbar sind.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Umkehrfunktion von f mit $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$ und skizzieren Sie die Graphen von f und f^{-1} in einem geeigneten Koordinatensystem.
- Erläutern Sie, wie die Graphen von f und f^{-1} geometrisch zusammenhängen.

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Gegeben ist die Kurvenschar f_a mit $f_a(x) = x - ae^x$.

- Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_1 , $f_{0,5}$ und $f_{0,05}$ in einem geeigneten Koordinatensystem.
- Untersuchen Sie die Kurvenschar f_a auf Nullstellen und geben Sie eine Klassifizierung an.
- Untersuchen Sie die Kurvenschar f_a auf Extrema und Wendepunkte. Geben Sie jeweils die notwendigen und hinreichenden Bedingungen an.

- d) Geben Sie die Ortskurve der Extrema an und skizzieren Sie den Graph im Koordinatensystem von Aufgabe 3a).
- e) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die zugehörige Funktion f_a genau eine Nullstelle hat.
- f) Die x -Achse und der Graph der Funktion $f_{0,05}$ schließen eine Fläche ein. Bestimmen Sie deren Flächeninhalt (Rechnen Sie mit einer Genauigkeit von zwei Nachkommastellen).

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Für Forschungszwecke werden 10g radioaktives Material Cäsium 137 beschafft. Es hat eine Halbwertszeit von 30 Jahren.

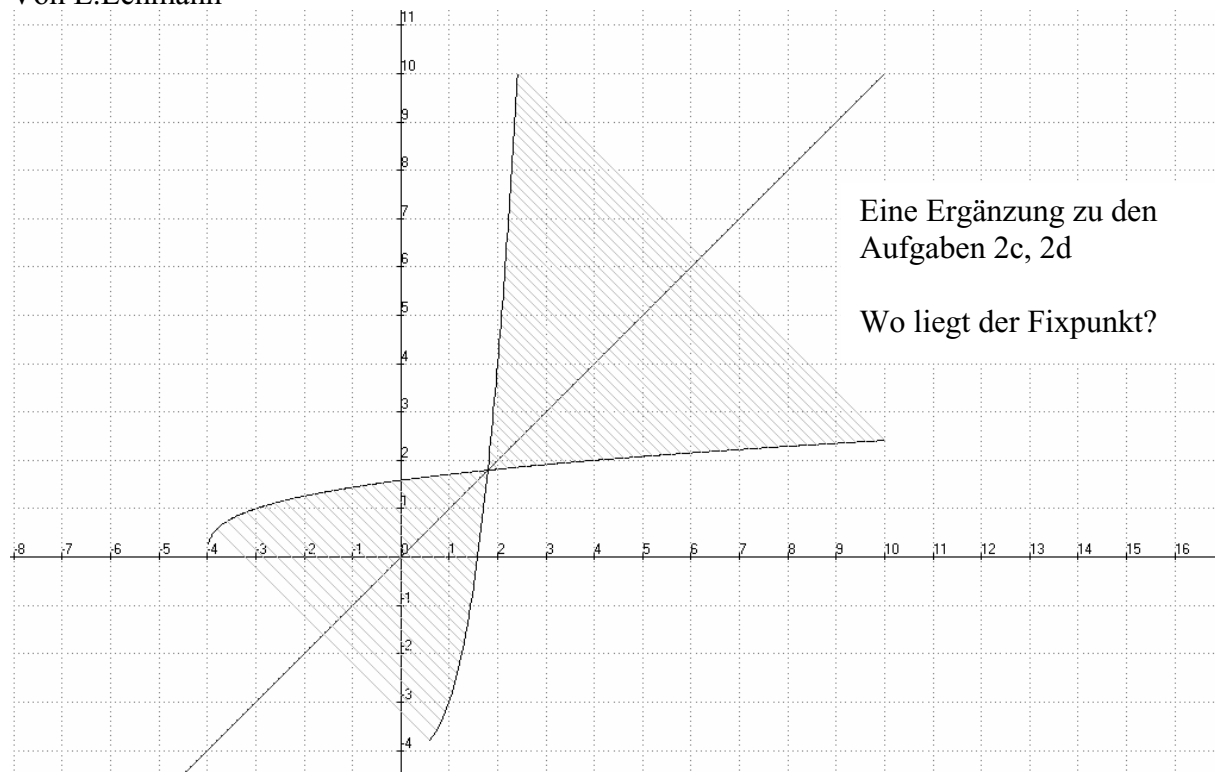
- a) Bestimmen Sie die Zerfallskonstante k und geben Sie das Zerfallsgesetz für Cäsium 137 in Form einer Gleichung zur Basis e an.
- b) Welcher Teil des Cäsium 137 ist nach 100 Jahren zerfallen (zur Kontrolle: $k = 0,0231$)?
- c) Nach welcher Zeit sind noch 30% der ursprünglichen Aktivität messbar?

Viel Erfolg!

Ende der Klausur

Blickpunkt 4 – Wo liegt der Fixpunkt der Abbildung?

Von E.Lehmann



4.5 Einige Leistungskurs-Aufgaben

4.5.1 Klausuraufgaben im Leistungskurs – 1. Semester - Analysis

(von Angelika Reiß, Wieland-Herzfelde-Schule)

Bitte arbeiten Sie sorgfältig. Denken Sie an erklärende Zwischentexte. Sie haben ausreichend Zeit dazu. Sie können den Taschencomputer, Ihre Unterlagen, das Buch und die Formelsammlung benutzen. Wenn keine Handrechnung gefordert ist und Sie den Rechner benutzen, denken Sie daran, dass Sie Zwischenschritte, Ergebnisse, Graphen etc. dokumentieren müssen.

Aufgabe 1 (ca. 20 Minuten)

Bilden Sie die erste Ableitung folgender Funktionen durch ausführliche Handrechnung. Geben Sie in Stichworten in der Rangfolge der Bearbeitung die verwendeten Ableitungsregeln an.

a) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ b) $g(x) = \sin \frac{x}{x+1}$ c) $h(x) = (x-5)^4 \cdot \cos^3(x)$

Aufgabe 2 (ca. 45 Minuten)

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = \frac{4}{a} \cdot \cos^2 x - a \cdot \cos x$; $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

- Untersuchen Sie die Funktionenschar f_a im Intervall $[-\pi; \pi]$ so, dass Sie eine Klassifizierung nach Art und Anzahl der Nullstellen vornehmen können. Skizzieren Sie jeweils typische Beispiele.
- Weisen Sie nach, dass $H_a(\pi / f_a(\pi))$ Hochpunkte der Funktionenschar sind.
- Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Ordinate des Hochpunktes minimal wird.

Aufgabe 3 (ca. 75 Minuten)

Für die Planung einer Schnellstraße haben die Vermessungsingenieure mehrere Punkte in der Landschaft als digitale Daten ermittelt. Als Bedingung wird gestellt, dass die Straße die Vermessungspunkte interpolieren und eine möglichst geringe Krümmung aufweisen soll. Bei der Übertragung der Messpunkte in ein geeignetes Koordinatensystem haben sich folgende Datenpunkte ergeben:

x-Koordinate	0	1	2	3	5
y-Koordinate	0	1	3	4	5

- Erläutern Sie, warum eine lineare Verbindung ungeeignet ist.
- Bestimmen Sie zu den Datenpunkten ein Polynom 4. Grades, das die Punkte interpoliert¹. Fertigen Sie eine Zeichnung an und dokumentieren Sie diese.
- Erklären Sie, was unter einer „Spline-Funktion“ verstanden wird und beschreiben Sie (in Worten), welche Bedingungen an einen Spline gestellt werden.
- Für die gegebenen Datenpunkte wurde folgender kubischer Spline bestimmt:

¹ Hinweis: Zur Interpolation einer Funktion 4. Grades gibt es den Befehl „quartreg“.

$$\text{spline}(x) = \begin{cases} \text{linear} & \text{für } x < 0 \\ \frac{57}{172}x^3 + \frac{115}{172}x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{113}{172}x^3 + \frac{255}{86}x^2 - \frac{395}{172}x + \frac{85}{86} & \text{für } 1 < x \leq 2 \\ \frac{51}{172}x^3 - \frac{237}{86}x^2 + \frac{1573}{172}x - \frac{571}{86} & \text{für } 2 < x \leq 3 \\ \frac{5}{344}x^3 - \frac{75}{344}x^2 + \frac{527}{344}x + \frac{335}{344} & \text{für } 3 < x \leq 5 \\ \text{linear} & \text{für } x > 5 \end{cases}$$

- d1) Erklären Sie die Herleitung dieses Splines.
Gehen Sie dabei auch auf Entstehung und Größe der Koeffizienten-Matrix ein; geben Sie zwei konkrete Zeilen dieser Matrix an und erläutern Sie diese.
- d2) Fertigen Sie auch hier eine Zeichnung an und dokumentieren Sie diese.
- e) Vergleichen Sie Lösungen und sprechen Sie eine Empfehlung aus.

Ende der Klausuraufgaben LK, 1. Semester

4.5.2 Klausuraufgaben im Leistungskurs – 3. Semester - Lineare Algebra / Analytische Geometrie (von Angelika Reiß, Wieland-Herzfelde-Schule)

Aufgabe 1 ca. 75 Minuten

In einem kartesischen Koordinatensystem sind eine einzelne Gerade

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 18 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathfrak{R},$$

eine Schar von Geraden $g_a: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad a, s \in \mathfrak{R}$

und eine Schar von Ebenen in Koordinatenform $E_b: (3 + b) \cdot x + 2 \cdot y + b \cdot z = 14, b \in \mathfrak{R}$ gegeben.

- a) Bestimmen Sie allgemein in Abhängigkeit von b die Schnittpunkte von E_b mit den drei Koordinatenachsen.
- b) Zeigen Sie, dass sich die Ebene E_0 und die Ebene E_1 in einer Geraden schneiden und geben Sie diese in Parameterform an. Zeigen Sie weiter, dass diese Schnittgerade in allen Ebenen der Schar E_b liegt.
- c) Überprüfen Sie, ob es ein a gibt, so dass die Gerade g_a die Gerade h schneidet. Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt und Schnittwinkel.

- d) Zeigen Sie, dass die Geraden g_a alle in einer Ebene liegen.
Bestimmen Sie diese Ebene und geben Sie sie in Parameter- und Koordinatenform an.
- e) Treffen Sie Aussagen zur Lagebeziehung der Ebenen E_b zu h .

Aufgabe 3**ca. 45 Minuten**Ein magisches Quadrat $M(3,15)$ ist in allgemeiner Form gegeben:

$$\begin{pmatrix} 10-i & 10-h & h+i-5 \\ h+2i-10 & 5 & -h-2i+20 \\ -h-i+15 & h & i \end{pmatrix}$$

- a) Erzeugen Sie dazu einen Baustein und dokumentieren Sie ihn.
- b) Erzeugen Sie mit Hilfe des Bausteins zwei konkrete magische Quadrate der Form $M(3,15)$. Dokumentieren Sie die Bausteinaufrufe und die entstehenden magischen Quadrate.
- c) Überprüfen Sie, ob die magischen Quadrate der Form $M(3,15)$ einen Vektorraum bilden.
- d) Ein magisches Quadrat $M(3,15)$ soll nur aus den Ziffern 1; 2; ...; 9 bestehen. Untersuchen Sie, welche Bedingungen i erfüllen muss, wenn $h = 8$ gewählt wird. - Geben Sie zwei solcher magischen Quadrate an.
- e) Geben Sie in allgemeiner Form ein magisches Quadrat $M(3, 45)$ an.

Ende der Klausuraufgaben LK, 3.Semester

Blickpunkt 5

$$\begin{pmatrix} 10-i & 10-h & h+i-5 \\ h+2i-10 & 5 & -h-2i+20 \\ -h-i+15 & h & i \end{pmatrix}$$

Wie kann man diese Formel für magische (3,3)-Quadrate herleiten?

4.5.3 Zwei Leistungskurs-Klausuraufgaben zur Analysis (von Ulrich Döring, Willi-Graf-Schule)

Anleitung: Aufgaben, die „per Hand“ bearbeitet werden müssen, sind durch den Buchstaben **H** gekennzeichnet; Aufgaben, die mit dem Buchstaben **D** versehen sind, sind vollständig mithilfe von Derive zu bearbeiten. Wenn beide Buchstaben angegeben sind, kann der Bearbeiter wählen, wie er die Aufgabe bearbeitet.

Während der Arbeit mit DERIVE sind *im Abstand von 15 min Sicherheitskopien* auf der Festplatte zu erstellen. Jede einzelne Aufgabe soll mit der Kopfzeile „1. Klausur Mathematik, Name, Aufgabennummer“ beginnen. Nachdem Sie eine Aufgabe bearbeitet haben, speichern Sie die Bearbeitung unter einem Dateinamen auf der Festplatte ab (z. B. Vorname1, Vorname2, usw. ...). Danach starten Sie DERIVE neu (Herstellereinstellung!), damit es keine Probleme mit bereits vergebenen Variablenbezeichnungen gibt. Am Ende der Klausur wird die Bearbeitung jeder Aufgabe auf einer Diskette abgespeichert, die mit ihrem Namen zu bezeichnen ist.

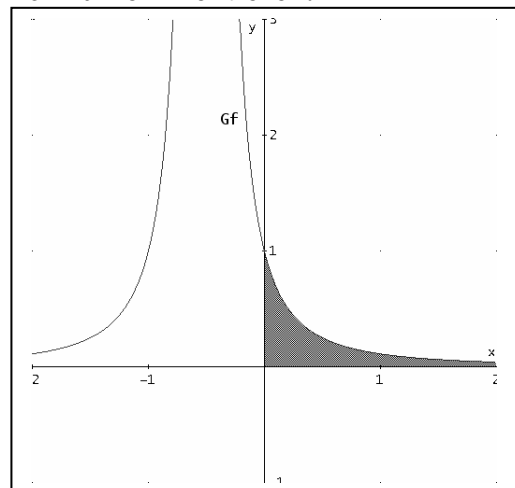
Bei der Dokumentation sind die DERIVE-Befehle und –Ergebnisse sinnvoll zusammenzufassen (wie im Unterricht). **Die Lösungswege sind ausführlich zu kommentieren.**

H 1. Aufgabe: Drehkörper

Die Fläche zwischen dem Schaubild von f und der x -Achse über dem Intervall $[0; \infty[$ rotiert um die x -Achse (s. Abb. rechts). Untersuchen Sie, ob der „ins Unendliche reichende“ Drehkörper einen endlichen Rauminhalt hat!

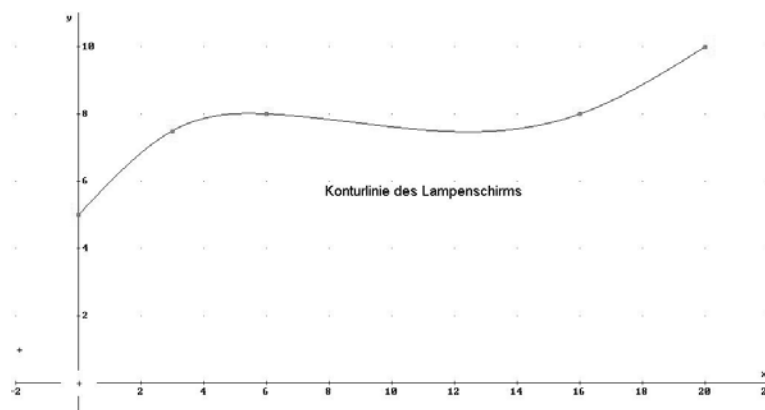
Geben Sie ihn gegebenenfalls an!

$$f(x) = \frac{1}{(1+2x)^2} \quad 10$$



D 2. Modellierung eines Lampenschirms

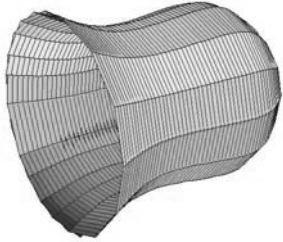
Ein Lampenschirm wird waagrecht gelegt und im Querschnitt gezeichnet. Dabei wird nur die obere Hälfte dargestellt. Die Konturlinie soll durch folgende Punkte verlaufen: $P_1(0/5)$, $P_2(3/7,5)$, $P_3(6/8)$, $P_4(16/8)$ und $P_5(20/10)$ (s. Abb.). Alle Zahlenangaben beziehen sich auf die Einheit cm.



- 2.1 Approximieren Sie die Konturlinie des Lampenschirms durch einen kubischen Spline. Stellen Sie diese Spline-Interpolationskurve anschließend im Intervall $[0;20]$ zeichnerisch dar! - Hinweis: Überprüfen Sie rechnerisch, dass die Punkte P_1 bis P_5 auf dem Graphen der ganzrationalen Funktion liegen und zeichnen Sie die Punkte ein!

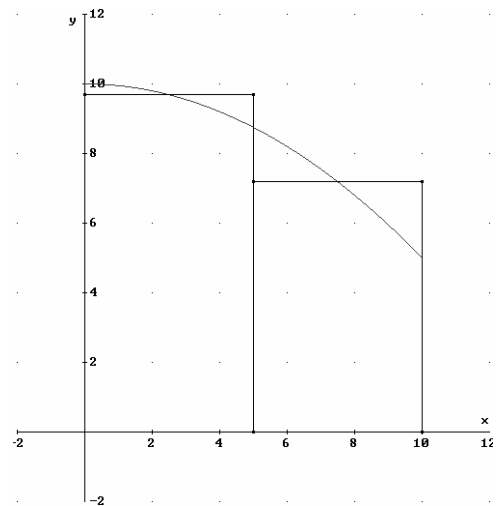
16

Zur Kontrolle:

	$p1(x) = -\frac{1169 \cdot x^3}{65556} + \frac{2413 \cdot x}{2428} + 5$
	$p2(x) = \frac{989 \cdot x^3}{65556} - \frac{1079 \cdot x^2}{3642} + \frac{4571 \cdot x}{2428} + \frac{4991}{1214}$
	$p3(x) = \frac{141 \cdot x^3}{48560} - \frac{1869 \cdot x^2}{24280} + \frac{3441 \cdot x}{6070} + \frac{20464}{3035}$
	$p4(x) = -\frac{101 \cdot x^3}{19424} + \frac{1515 \cdot x^2}{4856} - \frac{6867 \cdot x}{1214} + \frac{24240}{607}$

- 2.2 Zur Abschätzung der Wärmeabfuhr ist es wichtig, dass man die vom Lampenschirm umschlossene Luftmenge kennt. Berechnen Sie diese (Angabe in l auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet). - Stellen Sie anschließend den Mantel des Lampenschirms als Drehkörper zeichnerisch dar! Dabei ist auf sinnvolle Fenstereinstellungen zu achten! 7

- 2.3 Das vom Lampenschirm umschlossene Luftvolumen kann näherungsweise berechnet werden, indem man das Volumen eines Treppenkörpers aus Zylinderscheiben ermittelt. Dieser Treppenkörper entsteht, indem man Rechtecke gleicher Breite, die die Konturlinie in der Intervallmitte schneiden, um die x-Achse rotieren lässt. Die nebenstehende Abb. zeigt eine Zerlegung in 2 Rechtecke. Berechnen Sie näherungsweise das vom Lampenschirm umschlossene Luftvolumen, indem Sie das Volumen des entsprechenden Treppenkörpers aus 10 Zylinderscheiben berechnen (unter Verwendung des SUM-Befehls)! Die Entwicklung des SUM-Befehls muss erläutert werden!



- 2.4 Der Lampenschirm soll glasiert werden. Dazu muss der Oberflächeninhalt bekannt sein. Berechnen Sie diesen (Angabe in cm^2 auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet)! 5

- 2.5 Ein andere Lampenschirm hat die Form einer Halbkugel. Beweisen Sie mit Hilfe der Integralrechnung die Formel für den Oberflächeninhalt einer Halbkugel ($A_{\text{Halbkugel}} = 2\pi \cdot r^2$). Die Vorgehensweise muss genau erläutert werden. 7

5. CAS im Abitur

5.1 Computer und offene Aufgaben in Klausuren und im schriftlichen Abitur (Diskussionsbeitrag von Eberhard Lehmann)

A Offene Aufgaben

Die Berücksichtigung der heutigen Forderungen von offenen Unterrichtsformen, offenen Aufgabenstellungen und Medieneinsatz, insbesondere Computereinsatz, führt zwangsläufig zu einem veränderten Unterricht, neuen Aufgabenformen, neuen Prüfungsformen und neuen Bewertungsformen.

Was sind offene Aufgaben (ggf. mit Computereinsatz)?

Aufgaben, bei denen

- experimentiert und dokumentiert werden muss,
- vorgegebenes Material (Abbildungen / Textpassagen) zu erläutern ist,
- eine aufsatzartige Bearbeitung verlangt wird,
- Inhalte bewertet werden müssen.

Im Aufgabentext spiegeln sich diese und andere Kennzeichen wider in Satzteilen, wie äußern sie sich zu ..., erläutern sie ..., beschreiben sie ..., nehmen sie Stellung zu ..., werten sie aus ..., *In jedem Fall nimmt der Text eine größere Rolle ein und bedarf nun eigener Überlegungen zu den erwarteten Anforderungen und zur Bewertung.*

B Bewertungsaspekte bei offenen Aufgabenstellungen

(1) Eine sinnvolle Bewertung offener Aufgaben ist nur über einen Zeitfaktor möglich.

z.B. bei normaler Aufgabe: 8 BE → 20 Minuten
 bei offener Aufgabe: 30 Minuten → 12 BE

(2) Der Zeitanatz bei den normal bewertbaren Aufgaben und den offenen Aufgaben muss zueinander passen (siehe (1)).

(3) Lehrer und Fachberater müssen bei offenen Aufgaben damit leben, dass sich einige Leistungen fixieren lassen, andere (unterwartete) jedoch nicht.

Offene Aufgaben bedingen daher auch eine gewisse Offenheit bei der Bewertung!

B1 Bewertungsaspekte bei Computereinsatz

Bei Computereinsatz (Taschencomputer, PC) treten weitere Probleme hinzu, die aus dem folgenden Statement deutlich werden.

Mein Motto für den Mathematik-Unterricht, für Klassenarbeiten und Klausuren:

Weniger (stumpfsinnig) rechnen, weniger (stumpfsinnig) zeichnen, mehr verstehen!

Folgt man dieser vielerorts anerkannten Aussage, so ergeben sich wesentliche Änderungen gegenüber bisherigem Unterricht und Klausurentwürfen.

- Welche Anforderungen werden jetzt weniger vertreten sein?
- Welche neuen Anforderungen treten hinzu?
- Welche Folgerungen erwachsen aus diesen beiden Fragen und den Antworten?

C) Welche Anforderungen werden jetzt weniger vertreten sein?

C1) Das händische Rechnen wird stark in den Hintergrund treten - und das insbesondere bei Standardalgorithmen des Mathematikunterrichts:

Algorithmus	Lösung mit dem Computer, insbesondere CAS (Beispiele für VOYAGE™ 200)	Anmerkungen, neue Anforderungen
Lösung lineare Gleichungssysteme (LGS) und anderer Gleichungen	F2 solve oder mit Matrizenkalkül	LGS als Modell im Rahmen einer Problemstellung erkennen und aufstellen, Computerlösungen interpretieren und überprüfen können, das Verfahren und Lösungsschritte verstehen, Teilschritte auch von Hand bestätigen können.
Berechnung von Ableitungen	F3, 1: d(differentiate), z.B. $d(\sin(a*\sin(x)+x),x)$	Entsprechend, siehe oben
Berechnung von bestimmten und unbestimmten Integralen	F3, 2: integrate, z. B.	Entsprechend, siehe oben
Summenformeln	F3, 4: \sum (sum)	Entsprechend, siehe oben
Grenzwerte	F3, 3: limit(Entsprechend, siehe oben
Taylor	F3, 9: taylor(Entsprechend, siehe oben
usw.		Entsprechend, siehe oben

Einige Standardalgorithmen in der Sek.2

Das bedeutet nicht, dass nun kein Standardalgorithmus von Hand gerechnet werden kann / soll – vielmehr wird es bei Aufgabenstellungen in diesem Zusammenhang u. a. gehen um:

- Erläuterung einer vorgegebenen oder erzeugten (Computer-) Rechnung
- Händische Durchführung eines Teilschrittes
- Beschreibung eines Verfahrens

usw.

Eine ausführliche Handübung solcher Algorithmen mit vielen Beispielen entfällt damit auch im Unterricht. Der Schüler kann den Algorithmus an einfachen Beispielen durchführen, und **er versteht den Algorithmus**. In schwierigen Fällen bräuchte er jetzt viel Zeit und solche Handrechnungen sollten daher beim schriftlichen Abitur auch nicht mehr auftreten. Beispielsweise ist das Berechnen schwieriger Integrale von Hand i. a. nicht mehr relevant.

C2) Auch das langwierige händische Anfertigen von Zeichnungen ist i. a. nicht mehr relevant. Gerade in einer schnellen Visualisierung mit dem Rechner liegt eine seiner Stärken.

Das bedeutet nicht, dass nun gar keine Zeichnungen von Hand angefertigt werden sollen – vielmehr wird es in diesem Zusammenhang u.a. gehen um:

- Erläuterung einer vorgegebenen oder erzeugten (Computer-) Zeichnung
- Vervollständigung einer vorgegebenen oder erzeugten (Computer-) Zeichnung von Hand
- Händische Skizzierung eines Computerbildes mit dessen wesentlichen Kennzeichen

usw.

Zeichnung	Lösung mit dem Computer, insbesondere CAS (Beispiele für VOYAGE™ 200)	Anmerkungen
Beispiel: Fertige eine saubere Zeichnung des Funktionsgraphen zur Funktion $f(x, h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ für $h=1$ an.	Ins Zeichenfenster gehen, den Term eingeben und zeichnen lassen, Fenster geeignet wählen.	Der Computer bringt eine erhebliche Zeiteinsparung gegenüber der langweiligen Handzeichnung.
usw.		

D) Welche neuen Anforderungen treten hinzu?

Die oben genannten Fakten zu den Themen „Rechenfertigkeiten“ und „Zeichenfertigkeiten“ bei Einsatz eines Computers führen zu erheblichem Zeitgewinn im Unterricht.

Dieser kann nun genutzt werden zu wichtigeren mathematischen Lernzielen.

- Modellbilden
- Visualisieren
- Erarbeiten und Verstehen mathematischer Hintergründe
- Stellungnahme zu vorgegebenen mathematischen Aussagen
- Präsentieren von Untersuchungsergebnissen
- Erläuterung mathematischer Sachverhalte, wie (Computer)- Zeichnungen, Herleitungen, usw. in Textform (mathematischer Aufsatz)
- Auswahl der für die Lösung von Aufgabenstellungen geeigneten Befehle und Einstellungen der verwendeten Software, z. B. eines CAS.
- Übernahme und Auswertung der vom CAS gelieferten Ergebnisse, Formulierung von Untersuchungsergebnissen (Dokumentationskompetenz)

E) Welche Folgerungen erwachsen aus C und D?

- Viele der genannten Aspekte (und sicher noch weitere) werden jetzt bei Klausuraufgaben eine große Rolle spielen.
- Die einzelnen Anforderungen müssen vom Lehrer bzw. Gutachter passend eingeschätzt werden: Zeitbedarf, Schwierigkeitsgrad / Anforderungsbereich, Erwartungshorizont, Bewertung. Dabei sind teilweise bisher nicht gewohnte Überlegungen anzustellen.
- Unerlässlich ist hierzu u. a. eine Beschreibung des vorangegangenen Unterrichts (Unterrichtsvoraussetzungen), die auf die genannten Aspekte eingeht – am besten in einem den Aufgabenvorschlag einleitenden Beitrag.

Literatur

W.Herget, H.Heugl, B.Kutzler, E.Lehmann: Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar? In MNU 2001, Heft 8

5.2 Vorschlag für eine Abituraufgabe

(von Günter Dreesen-Meyer, Carl-von-Ossietzki-Gesamtschule)

Marktforschungsinstitute untersuchen für die Hersteller von Produkten das Kaufverhalten der Marktteilnehmer durch Befragungen und durch Auswertungen des realen Kaufverhaltens in regelmäßigen Abständen.

In dieser Aufgabe haben wir es mit den zwei Produkten ATA und BETA zu tun. Beide haben heute einen jeweiligen Marktanteil von 25%. Das Ergebnis einer Befragung wurde in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

von nach	ATA	BETA	sonstige
ATA	60%	20%	10%
BETA	20%	55%	20%
Sonstige	20%	25%	70%

- Interpretieren sie die einzelnen Daten in der Tabelle und berechnen Sie **händisch** den Marktanteil der Produkte **nach** einer weiteren Zeitperiode.
- Um die Tendenz der Veränderung der Marktanteile überblicken zu können, berechnen Sie bitte noch die Marktanteile **vor** eine Zeitperiode.
- Machen Sie eine Aussage über die Entwicklung der Marktanteile.
- Was besagt das folgende Gleichungssystem? Bestimmen Sie auch seine Lösungen.

$$a + b + c = 100$$

$$0,6a + 0,2b + 0,1c = a$$

$$0,2a + 0,55b + 0,2c = b$$

- Wie entwickeln sich eigentlich die Marktanteile bei einer anderen als der oben genannten Startverteilung?

Bemerkungen zur Aufgabe

Die Aufgabe kann mit Hilfe von Matrizen, aber auch ohne diese gelöst werden.

a) Lösung ohne Matrizen

Der erste Aufgabenteil soll die Vertrautheit mit dem Thema zeigen. Die Lösung ist mit einfachen Termberechnung zu bestimmen.

$$0,60 \cdot 25 + 0,20 \cdot 25 + 0,10 \cdot 50 = 25$$

$$0,20 \cdot 25 + 0,55 \cdot 25 + 0,20 \cdot 50 = 28,75$$

$$0,10 \cdot 25 + 0,25 \cdot 25 + 0,70 \cdot 50 = 43,75$$

Der zweite Aufgabenteil erfordert eine Umorientierung. Das Ergebnis einer Rechnung soll die heutige Verteilung (25% / 25% / 50%) sein. Gesucht ist die Verteilung vor einer Periode.

$$0,60 \cdot a + 0,20 \cdot b + 0,10 \cdot c = 25$$

$$0,20 \cdot a + 0,55 \cdot b + 0,20 \cdot c = 25$$

$$0,10 \cdot a + 0,25 \cdot b + 0,70 \cdot c = 50$$

Im dritten Aufgabenteil kann aus den drei aufeinanderfolgenden Daten eine Tendenz erkannt werden, die es zu formulieren gilt.

Im vierten Aufgabenteil muss erst einmal interpretiert werden. Was besagen die einzelnen Gleichungen. Gesucht ist die Verteilung (a,b,c) die wieder zur Verteilung (a,b,c) führt. Die Lösung dieses Gleichungssystem muss also der Fixpunkt der Entwicklung der Verteilungen sein.

Der fünfte Aufgabenteil kann eigentlich nur mit Hilfe von Matrizen bearbeitet werden. Außer die Schüler erkennen, dass zur Lösung des vierten Aufgabenteils eigentlich keine Startverteilung benutzt wird. Daher muss der Fixpunkt unabhängig von einer jeweiligen Startverteilung gleich sein.

Zusatz:

Wie die Schüler die sich ergebenden Gleichungssysteme lösen, könne sie selbst entscheiden. Es ist natürlich auch möglich von den Schülern ein Gauss-Verfahren händisch zu verlangen. Z.B. im zweiten Aufgabenteil.

b) Lösung mit Matrizen

Der erste Aufgabenteil dient zur Orientierung in der Aufgabe.. Wie ist die Übergangsmatrix zu wählen? Kann ich die Zahlenwerte aus der Tabelle so übernehmen oder muss ich die transponierte Matrix wählen? Rechne ich mit der Anfangsverteilung als Vektor oder als Spalte?

Den zweiten Aufgabenteil löst sich jetzt elegant mit der Matrix M^{-1} .

Die Beschreibung der Tendenz im Teil 3 der Verteilung lässt sich mit Hilfe der Potenzierung der Matrix M schön untermalen.

Im vierten Teil muss natürlich auch interpretiert werden. Das Gleichungssystem selbst kann dann auf selbstgewähltem Weg gelöst werden.

Teil 5: Da mit Hilfe der Potenzierung der Übergangsmatrix recht schnell eine Tendenz verfolgt werden kann, können die Schüler die Veränderung hin zum Fixpunkt unabhängig von der konkreten Anfangsverteilung untermalen. Sie erkennen die Unabhängigkeit wie oben im Teil 4.

Zusatz:

Es ist natürlich auch möglich bei dem einen oder den anderen Aufgabenteil eine Handrechnung zu verlangen. Zum Beispiel kann man den Schüler den zweiten Teil mit Hilfe einer Matrix lösen lassen. Man fordert ihn dann aber zusätzlich auf, die Lösung auch mit Hilfe eines Gleichungssystems und dann auch noch per Hand zu bestätigen.

5.3 Eine ausführlich kommentierte Grundkurs-Abitur-Klausur - mit oder ohne Computereinsatz (von Eberhard Lehmann)

Der Einsatz von CAS im Abitur wurde in verschiedenen Workshops immer wieder aufgegriffen. Fast alle Projektteilnehmerinnen konnten so erstmals im Januar 2005 den Computereinsatz praktizieren. Zu dieser Zeit gab es in Berlin noch kein Zentralabitur, so dass die Aufgaben vom jeweils zuständigen Fachberater begutachtet und genehmigt wurden.

Eine erste Diskussionsgrundlage für die Aufgabenstellung mit CAS kann die folgende Klausur sein.

Grundkurs-Klausur

Aufgabe 1 M-Grundkurs (Entwurf: E.Lehmann)	Differential- und Integral-Rechnung e-Funktionen	Klausuraufgabe (auch für das Abitur geeig- net)	Formulierung für mit und ohne CAS- Einsatz
--	--	---	--

Beispiel einer Analysis-Aufgabe mit und ohne Computereinsatz bei weitgehend gleicher fachlicher Problematik (bei gleichem "Kern")

Hinweis: Der gemeinsame "Kern" ist grau unterlegt. In der linken Spalte stehen die Handrechnungsaufgaben, in der rechten Spalte (Arial) wird der Computer eingesetzt.

a) Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{x}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = \frac{e^x}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) In der Anlage 1 finden Sie die zugehörigen Grafen. Welche Grafen stellen f bzw. g dar? Begründen Sie Ihre Entscheidung mit Hilfe des asymptotischen Verhaltens der Grafen.	a) CE Lassen Sie die Grafen zeichnen. Begründen Sie das asymptotische Verhalten mit entsprechenden Rechnungen.
---	---

b) Zeigen Sie, dass f und g die gleichen Extremstellen (x -Werte) haben.

b) Nachweise mit der 2. Ableitung können entfallen.	b) CE Führen Sie auch die Rechnungen für die Bestätigung der Extremwerte m.H. der 2. Ableitung durch.
---	--

c) Berechnen sie den Abstand der beiden Extrempunkte.

d) Zu $f(x)$ wird jetzt der Term $u \cdot x$ addiert, mit u aus dem Intervall $[0, 2]$. Dadurch entstehen die Funktionen $F(x, u) = u \cdot x + \frac{x}{e^x}$.

d) Die Grafen $F(x, u)$ finden sie in Anlage 2, für die Schrittweite wurde $u=0.2$ gewählt. Wie entstehen die Grafen aus dem Grafen zu f ? Vergleichen sie an Hand der Zeichnung die Eigenschaften der Grafen von F und f . Möglicher Zusatz: d2) Für welches u wird $F(x, u)$ überall gleich 0?	d) CE Lassen Sie die Grafen zu $F(x, u)$ zeichnen (Schrittweite für u sei 0.2). Wie entstehen die Grafen aus dem Grafen zu f ? Vergleichen Sie an Hand der Zeichnung die Eigenschaften der Grafen von F und f .
---	--

e) Einer der Grafen von F berührt augenscheinlich den Grafen von g. Für welches u ist das der Fall? Schildern sie einen Weg zur Beantwortung der Frage. Welche Schwierigkeiten treten auf?

e) Hinweis: Rechnungen sind nicht erforderlich, die entscheidenden Rechenansätze sind jedoch in mathematischer Schreibweise zu dokumentieren.

e) CE
Ermitteln und dokumentieren sie dann eine Näherungslösung über ein Verfahren ihrer Wahl.

f) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen $x_a = 0$ und $x_b = 1$ für den Grafen von f.

f1) Was ergibt sich für den Flächeninhalt, wenn $x_a = 0$ und $x_b \rightarrow \infty$?
f2) Mit dem Taschencomputer wurden die Bilder 1 und 2 erzeugt. Interpretieren sie die Eingaben und die Ausgaben. - Welche Vermutung ergibt sich bei Bild 1?
f3) Überprüfen sie das unterstrichene Ergebnis von Bild 2 durch eine Kontrollrechnung.

f1) CE
Berechnen sie die Flächeninhalte für die Funktionen $h(x, v) = \frac{x^v}{e^x}$ für $x_a = 0$ und $x_b \rightarrow \infty$ und für v-Werte aus der Menge {1,2,3,4}. Vermutlich wird ihnen etwas auffallen! Dokumentieren Sie ihre Eingaben, die Ausgaben und ihre Vermutung.

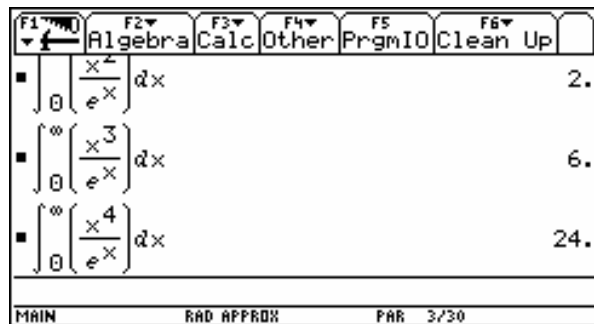


Bild 1

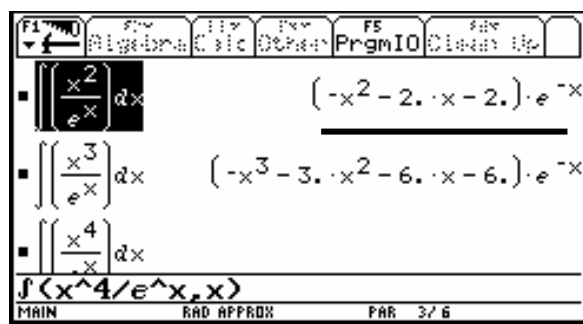
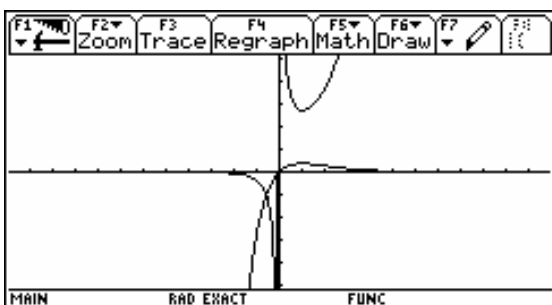


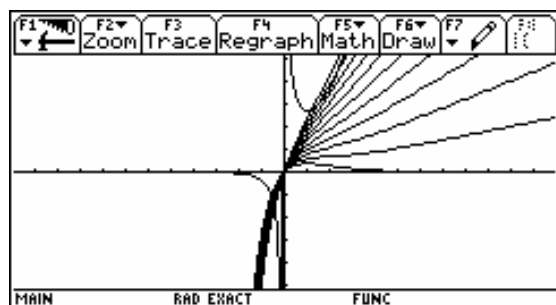
Bild 2

----- Ende des Aufgabentextes

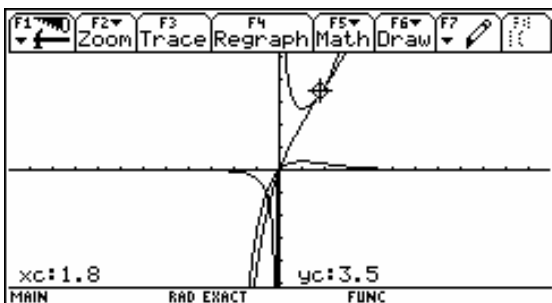
Anlagen zur Aufgabebearbeitung mit dem Taschencomputer



Anlage 1: Grafen von f und g



Anlage 2: Grafen von F (0 ≤ u ≤ 2, Schrittw. 0.2) und g



Anlage 3: Graf von F mit u=1.7

Erwartungshorizont				
Erwartete Teilleistungen, Erläuterungen	Anforderungsbereiche mit Bewertungseinheiten, ungefähre Bearbeitungszeit			
	AB 1	AB 2	AB 3	Zeit, etwa
a) Graphen identifizieren mit Begründung	0	4	0	10'
CE Zeichnen lassen, übernehmen, Grenzwerte berechnen lassen, dokumentieren	3	3	0	15'
b) $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, $x \in I = 1$	4	0	0	10'
$g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, $x \in I = 1$	4	0	0	10'
CE CAS rechnen lassen, Ergebnisse, dokumentieren	6	0	0	15'
c) $f(1)$, $g(1)$ berechnen, $g(1)-f(1) = e-1/e$	2	0	0	5'
CAS rechnen lassen, Ergebnisse, dokumentieren	2	0	0	5'
d) Anlage 2 auswerten ($F(u=0)=f$, keine Asy.mehr...)	0	2	0	5'
d) CE, zeichnen lassen, übernehmen, auswerten	0	4	0	10'
e) $g(x)=f(x)$ setzen, genau eine Lösung suchen, etwas umformen, erkennen, dass keine exakte Lösung möglich, da Gleichung in e^x und x^2 , außerdem 2 Gl-Variable x und u , $g'=f'$ liefert 2. Gleichung	0	0	4	10'
CE Ansätze wie bei Bearbeitung ohne Computer, Lösungsversuche mit CAS, durch Zoomen der Grafen	0	0	4	
Näherungswert finden, x etwa 1.86, u etwa 1.7, y etwa 3.47 (für den Lehrer: siehe Anlage 3 - vergrößerte Zeichnung)	0	3	0	20'
f) $\int \frac{x}{e^x} dx = \frac{-x-1}{e^x} + c$, $\int_0^1 \frac{x}{e^x} dx = 1 - \frac{2}{e} = 0.2642$	0	6	0	15'
partielle Integration				
$\int_0^\infty \frac{x}{e^x} dx = 1$, Grenzwertüberlegung, ggf. große x -Werte	0	4	0	10'
CE $\int_0^1 \frac{x}{e^x} dx = 1 - \frac{2}{e} = 0.2642$	2	0	0	5'
f1) Wenn $x_a = 0$ und $x_b \rightarrow \infty$? Grenzwert notieren, Überlegungen, z.B. große Werte einsetzen	0	2	0	5'
f2) Interpretieren: Flächenberechnungen, unbestimmte Integrale, Vermutung $v!$ als Ergebnisse.	0	4	0	10'
f3) Überprüfen sie das unterstrichene Ergebnis von Bild 2 durch eine Kontrollrechnung. Ableitung bilden.	4	0	0	10'
f1) CE Siehe die f-Teile bei Handrechnung, Dokumentation der Rechnerarbeit, Vermutung, ggf. weitere Überprüfungen. Es wird eigenes Material erstellt.	0	8	0	20'
-----Summen, CO	13, 37%	18, 52%	4, 11%	Zeit 90'
Ende Erwartungshorizont non CO	14, 37%	16, 53%	4, 10%	Zeit 90'

5.4 Mündliches Abitur mit dem Taschencomputer

Die Verwendung eines CAS im Unterricht zieht nicht nur seine Verwendung in Klausuren nach sich. Auch in mündlichen Prüfungen, speziell im Abitur, kann nun das CAS benutzt werden. Dieser Aspekt wurde in dem hier geschilderten Projekt nicht speziell verfolgt. Dennoch sollen hierzu einige mögliche Ansätze dargestellt werden.

Zunächst einige Anmerkungen zu den Zielen einer mündlichen Abiturprüfung und deren Ablauf. In den Einheitlichen Prüfungsanforderungen EPA in der Abiturprüfung für das Fach Mathematik (Fassung vom 24.5.2002, S. 16) heißt es zur mündlichen Prüfung u.a.

„Dabei sollen die Prüflinge zeigen, dass sie über mathematische Sachverhalte in freiem Vortrag berichten und im Gespräch zu mathematischen Fragen Stellung nehmen können. Sie sollen insbesondere nachweisen, in welchem Umfang sie

- *einen Überblick über grundlegende Sätze, Begriffe und Verfahren der Mathematik besitzen,*
- *Verständnis für mathematische Denk- und Arbeitsweisen haben,*
- *Einblick in mathematische Problemstellungen und Ergebnisse gewonnen haben.*

Um in der zur Verfügung stehenden Zeit diese Kompetenzen überprüfen zu können, muss sich die Aufgabenstellung für die mündliche Prüfung grundsätzlich von der für die schriftliche Prüfung unterscheiden. Im Vordergrund soll die Darstellung und Begründung von Sachverhalten stehen. In der Prüfung ist der Nachweis verschiedener fachlicher und methodischer Kompetenzen zu fordern. Umfangreiche Rechnungen und zeitaufwändige Konstruktionen sind zu vermeiden.

Einerseits bieten sich dazu an:

- *die Nutzung geeigneter Werkzeuge zur Erarbeitung der Lösungen (z.B. Taschenrechner, Software, Fachliteratur),*
- *der Einsatz von Hilfsmitteln zur Präsentation der Lösungswege und Ergebnisse (z.B. Folien, Displays, Modelle).*

Andererseits sind Aufgabenstellungen besonders geeignet, die

- *Teilaufgaben enthalten, die sich auf eine Erläuterung des Lösungsweges beschränken, ohne dass die zugehörigen Rechnungen im Einzelnen auszuführen sind,*
- *Ergebnisse, Skizzen, Lösungswege usw. vorgeben, an denen wesentliche Gedankengänge zu erläutern sind.“*

Diese Ausführungen lassen für den Einsatz von CAS und anderer Mathematik-Software sowie passender Präsentationsmittel breiten Raum, so dass sich für die Aufgabenstellungen im mündlichen Abitur zahlreiche Möglichkeiten ergeben. Im Folgenden sollen einige unterschiedliche Beispiele für mögliche Aufgabenstellungen mit CAS-Verwendung genannt werden. Hierzu wird auch auf die Zusammenstellung in Kapitel 4.2 verwiesen.

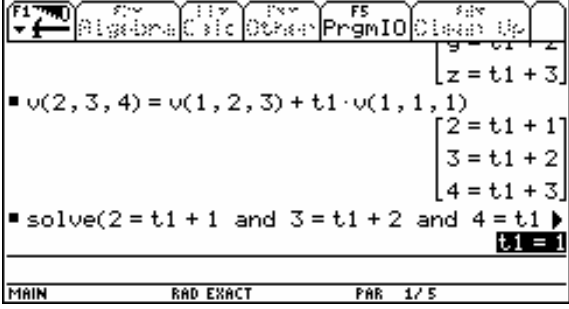
→ Tipps für Klassenarbeiten mit CAS – auch nützlich für den Unterricht S. 38

Die Vorbereitungszeit für jede Aufgabe wird mit etwa 10 Minuten geplant. Für die drei Beispiele wird eine Vortragszeit von ebenfalls etwa 10 Minuten angesetzt. Darin enthalten sind auch eventuelle anschließende Fragestellungen der Prüfungskommission. Die gewählten Aufgaben sind nicht besonders schwierig. Es geht hier insbesondere um das Aufzeigen einiger Einsatzmöglichkeiten eines CAS.

Beispiel 1: Grundkurs-Aufgabe aus der Analytischen Geometrie

Hier wird von einem fertigen CAS-Bild des Taschencomputers VOYAGE™ 200 ausgegangen.

Die Aufgabenstellung:

 <p>The screenshot shows the VOYAGE 200 CAS interface. At the top, there are menu options: F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8, F9, F10. Below the menu, the display shows the following text:</p> <pre> v(2,3,4) = v(1,2,3) + t1 * v(1,1,1) [z = t1 + 3] [2 = t1 + 1] [3 = t1 + 2] [4 = t1 + 3] solve(2 = t1 + 1 and 3 = t1 + 2 and 4 = t1 + 3) t1 = 1 </pre> <p>At the bottom of the screen, it says "MAIN RAD EXACT PAR 1/5".</p>	<p>a) Erläutern Sie mathematischen Hintergründe, die zu den vorliegenden Ein- und Ausgaben führten (u.a. Skizze anfertigen).</p> <p>b) Welche Änderungen würden sich ergeben, wenn die entsprechende Aufgabestellung für eine Ebene gestellt würde?</p> <p>c) Welche Definition im CAS liegt den Termen $v(2,3,4)$ usw. zu Grunde?</p>
<p>Prüfungszeit: 10 Minuten</p>	

Erwartungen:

- Der Prüfling erkennt in $v(1,2,3)+t_1(v(1,1,1))$ die rechte Seite einer Geradengleichung. Auf der linken Seite steht ein weiterer Ortsvektor, für den offenbar geprüft werden soll, ob der Punkt $P(2,3,4)$ auf der Geraden liegt, siehe letzte Zeile. Das ist der Fall wegen $t_1=1$ (Überprüfung durch Kopfrechnung). Dazu wurde die Vektorgleichung in drei Gleichungen zerlegt. Der Prüfling fertigt eine passende Skizze an.
- Die Ebenengleichung enthält zwei Richtungsvektoren. Damit entsteht ein LGS mit 2 Variablen und 3 Gleichungen. Nennen der möglichen Lösungsfälle.
- Um die Eingabe von Vektoren zu erleichtern, wurde beim VOYAGE™ 200 für Vektorspalten definiert:

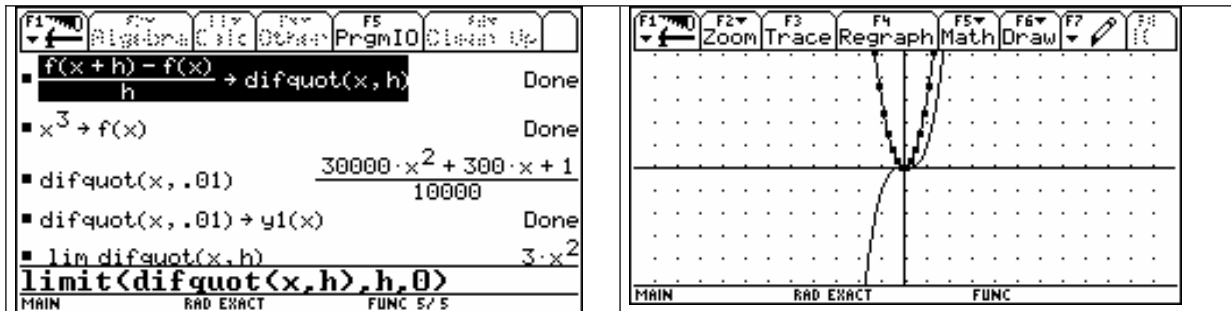
$[ax; ay; az] \rightarrow v(ax, ay, az)$. Dann führt z.B. die Eingabe $v(2,3,4)$ zur Ausgabe $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Beispiel 2: Grundkurs-Aufgabe aus der Analysis

- Definieren Sie beim VOYAGE™ 200 den Differenzenquotienten einer Funktion $y = f(x)$ in der h-Schreibweise als Baustein $\text{difquot}(x,h)$ zweier Variablen.
- Anschließend soll die Funktion $y = x^3$ für $h = 0.01$ betrachtet werden. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen dem zugehörigen Differenzenquotienten und der Ableitung $y' = 3x^2$? Beachten Sie rechnerische und zeichnerische Aspekte. Benutzen Sie dazu den Taschencomputer.

Erwartungen:

Der Prüfling könnte z.B. die folgenden Bilder erstellen, mit dem View-Screen zeigen und erläutern.



Man sieht die Definition des Bausteins und die Zuweisung der Funktion. Danach wird der Baustein mit dem Parameterwerten x und $h=0.01$ aufgerufen. Es ergibt sich eine Parabel zweiten Grades. Die Funktion wird zum Zeichnen in $y1(x)$ gespeichert. Schließlich könnte man noch den Grenzwert, also die Ableitung $f'(x)$ ausrechnen.

Nun kann man die Ausgangsfunktion $f(x)$ und $y1(x)$ zeichnen lassen. Da angesichts der Bildschirmauflösung $y1(x)$ und $f'(x)$ in der Zeichnung aufeinanderfallen, könnte man den Sachverhalt animieren, indem man auf den Graphen zu $y1(x)$ den Ableitungsgraphen in einem anderen Zeichenstil, z. B. „square“, darüberzeichnet lässt.

Beispiel 3: Leistungskurs-Aufgabe aus der Analysis (Parameterdarstellung)

Die folgende Abbildung sehen Sie einige geometrische Objekte an der Vorderfront einer Kirche.

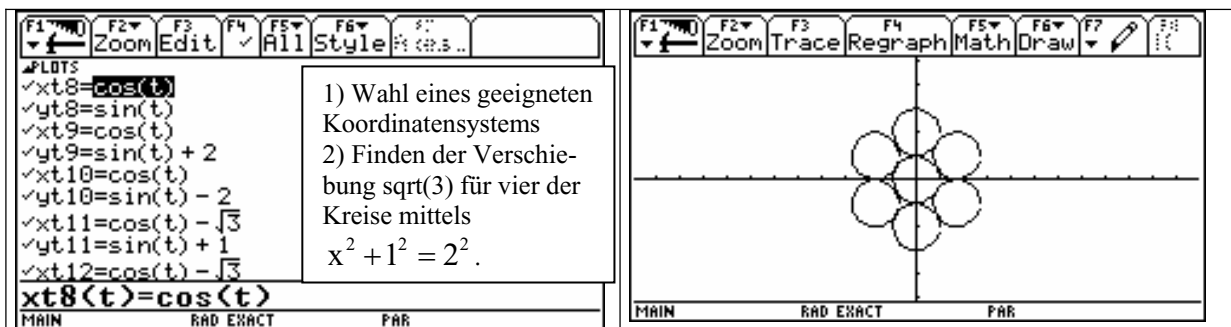


- a) Rekonstruieren Sie die 7 Kreise mit Ihrem Taschencomputer und demonstrieren Sie Ihre Lösung am View Screen. Hinweis: Benutzen Sie Parameterdarstellungen.
- b) Beschreiben Sie einen Weg zur mathematischen Modellierung des markierten Bogens.

Erwartungen

Zu a) siehe die folgenden Abbildungen

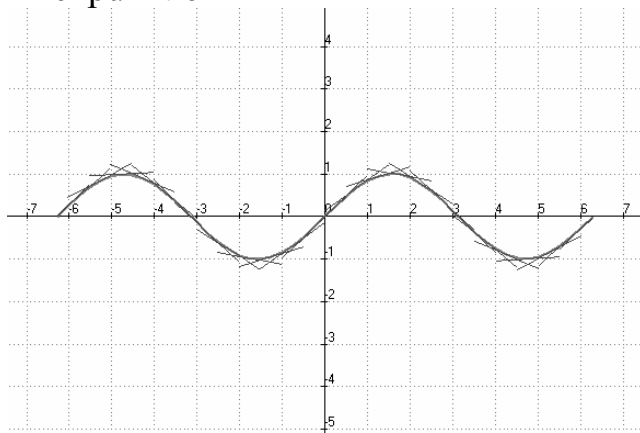
Zu b) Z.B. Punkte suchen, Parabelgleichung ansetzen



Beispiel 4: Offenes Material als Ausgangspunkt für Aufgabenstellungen

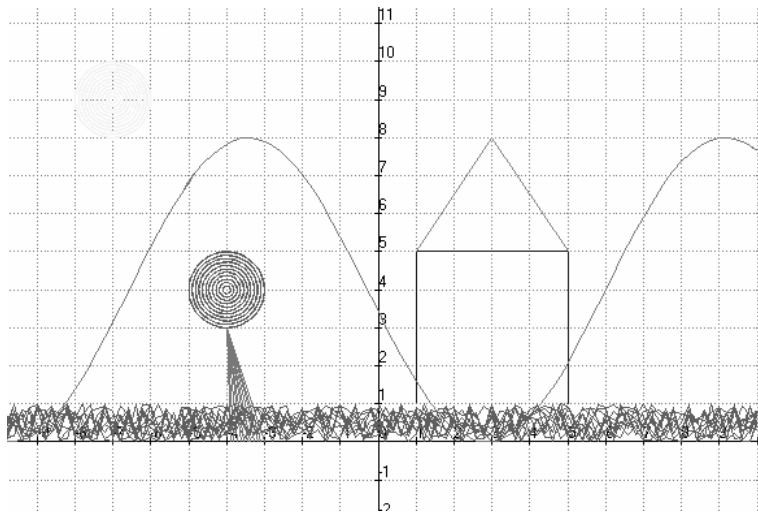
Etwas andersartige Aufgaben für mündliche Prüfungen lassen sich auch aus den im vorliegenden Heft dokumentierten Blickpunkten formulieren. Die Grundidee liegt hier in der Auswertung vorliegenden Materials, das wegen seines offenen Erscheinungsbilds für vielfältige Untersuchungen geeignet ist. Andererseits lassen sich daraus aber auch engere, konkrete Fragestellungen finden. – Zu diesem Ansatz noch zwei weitere Beispiele:

Blickpunkt 6



Hüllkurven zeichnen, ein ergiebiges Thema für den Analysisunterricht

Blickpunkt 7 – Mathematik in der Landschaft



Sonne, Gras, Berge, ein Baum, ein Haus – wie ist das entstanden?
Schreiben Sie eine Geschichte dazu!

Unterrichtsideen – Aufgabenideen

Blickpunkte:

- 1, S.18 Differenzenquotienten-Grafen
- 2, S.20 Ellipsenspirale, Drehungen
- 3, S.28 Parabel als Hüllkurve
- 4, S.41 Wo liegt der Fixpunkt
- 5, S.44 Magische Quadrate-Matrix
- 6, S.58 Hüllkurve für die Sinuskurve
- 7, S.58 Mathematik in der Landschaft

6. Schülermeinungen

Grundkurs von Lutz Geist (OSZ WiSo): Meine Erfahrungen zum CAS-Einsatz in Klausuren

Sabrina:

- „Anfangs hatte ich große Probleme mit dem Rechner, wenn man sich mit ihm auseinandersetzt, begreift man schnell, wie er funktioniert.“
 - Er macht Dinge für die man in der 11. Klasse ewig gebraucht hat, wie z.B. Ableitungen bilden oder Funktionen diskutieren.
 - Im Grafikfenster konnte man gut und übersichtlich sehen, wie der Graph aussieht.
 - Andererseits konnte dieser Rechner einen zur Weißglut bringen, denn nur bei einer Klammer zu wenig oder einem Komma zu viel zeigt er ERROR an und man wusste nicht, was der Fehler war und wie man ihn beheben konnte. Doch dies bekam man früher oder später in den Griff.
 - Alles in allen fand ich den Taschenrechner sehr gut und wüsste nicht, welche Noten ich ohne ihn gehabt hätte.“
-

Grundkurs ma-4 von Frau Vogt, Fritz-Karsen-Schule (Gesamtschule)

SchülerIn 1

„Im Allgemeinen sind meine Erfahrungen hinsichtlich Klausuren mit dem VOYAGE™ 200 gut. In Klausuren kommt dem Rechner eine wichtigere Funktion zu als im Unterricht. Gerade bezüglich Standardrechnungen (Lösen von Gleichungen bzw. Gleichungssysteme), die man mit einer gewissen Routine durchführen würde, wird eine Fehlerquelle eliminiert – sofern man richtige Eingaben macht. Durch die relativ simple Syntax lassen sich mit geringen Vorkenntnissen Programmroutinen entwickeln, z.B. Zur Berechnung von Binomialkoeffizienten. Es ist jedoch wichtig, dass Unklarheiten bezüglich der Syntax im Voraus geklärt werden, um das Misslingen ganzer Aufgabenkomplexe zu vermeiden.“

Interessante Erfahrungen der (anderen) SchülerInnen

- Er ist ganz praktisch zum Nachrechnen simpler Aufgaben.
- Für's "Handrechnen" wird keine Zeit verschwendet.
- Positiv ist, dass der Rechner die Stelle des Fehlers anzeigt (z.B. Klammer).
- Er erleichtert das Zeichnen von Graphen.
- Ich konnte Flüchtigkeitsfehler vermeiden.
- Störend empfinde ich, dass wir den Einsatz des Rechners in der Klausur festhalten / markieren müssen, weil damit Zeit verloren geht.
- Durch den Rechnereinsatz wird Zeit gespart.
- Man kann sich auf das Wesentliche, den Rechenweg, konzentrieren. Die ganze Aufgabe wird so klarer strukturiert und der Rechenweg ist leichter nachzuvollziehen und zu verstehen.
- Er passt generell auch besser in unsere Zeit der Computerberechnungen, in welcher sowieso niemand mehr mit dem Kopf oder mit einem Hand-Taschenrechner Daten berechnet.

Leistungskurs von Dr. U. Döring (Gast im Projekt, Willi-Graf-Oberschule)

Schüler: Meine persönlichen Erfahrungen mit CAS

„Die Verwendung von CAS-Programmen kenne ich ausschließlich aus dem Mathematikunterricht, in dem wir häufig mit DERIVE 6 arbeiten. Wir benutzen Derive dabei hauptsächlich

als Hilfe zur Lösung komplexer Aufgaben und zur graphischen Veranschaulichung, nachdem wir die elementaren Gleichungen/Funktionen per Hand im Unterricht selbst hergeleitet haben. Auch in Mathematik Klausuren zu speziellen Themen wie Kurvendiskussionen schreiben wir teilweise mithilfe von DERIVE. - Ich kann allgemein sagen, dass ich die Verwendung von DERIVE (oder anderen CAS-Programmen) im Unterricht befürworte. DERIVE bietet den Schülern und Lehrern die Möglichkeit, sehr komplexe Aufgaben zu behandeln, die mit Handrechnen wohl annähernd unlösbar wären. Als Beispiel könnte man hier Aufgaben aus dem Feld der Naturwissenschaften nennen. Besonders hilfreich ist hier die Zeichenfunktion von DERIVE, die auch als Hilfestellung dienen kann, etwa um den Lösungsbereich einzuschränken. - Das gravierendste Problem bei der Arbeit mit CAS-Programmen ist und bleibt wohl aber die teilweise auftretende Unzurechenbarkeit der Computer. So kann es vorkommen, dass falsche Eingaben zum Absturz des Programmes und somit zum Datenverlust führen. Vor allem in Klausuren ist der dadurch entstehende Zeitverlust meist kaum aufholbar, auch Sicherheitskopien helfen nur bedingt (es sei denn, man fertigt alle 2 Minuten eine Sicherheitskopie an). - Insgesamt verlangt die Verwendung von DERIVE vor allem eine Verlagerung in der Art, wie Aufgaben bewältigt werden. Wenn der Computer zuverlässig und schnell alle Aufgaben löst, verschiebt sich das Problem in die Richtung, dem Computer auch die richtigen Aufgaben zu stellen. Dafür sind allerdings auch entsprechende Vorüberlegungen notwendig. Bei der Arbeit mit CAS-Programmen sollte deshalb besonders Wert auf die hinter den Rechnungen stehenden Überlegungen gelegt werden. Dies ist im Falle von Klausuren, die mit Hilfe von Derive bearbeitet werden, insofern der Fall, als dass die Dokumentierung der Arbeitsschritte einen größeren Stellenwert einnimmt. - Ich persönlich finde diese Neuorientierung in Richtung ausführlicher Dokumentation und Überlegungen als richtig, da sie meiner Meinung nach eher den Anforderungen entspricht, die in einem modernen Mathematikunterricht behandelt werden sollten.“

Grundkurs von Anne Rinklake (Leonardo-da-Vinci-Oberschule)

Meine Einschätzungen zum Mathematikunterricht mit dem VOYAGE™ 200

LdV, Rk, 7.6.2004

Jungen	Mädchen	Jungen	Mädchen
Negativ		Positiv	
Aufgaben			
Komplexere Aufgaben I	<i>Die römischen Zahlen geben jeweils in Anzahl der Nennungen an!</i> ↑	Beeindrucken von LK-Schülern I	Kompliziertere Aufgaben können bewältigt werden V
		Rechenwege leichter zu verstehen III	
		Rechnungen leichter zu bewältigen V	Erleichterung bei den Rechnungen V
	Eigentliche mathematische Vorgänge sind im normalen Unterricht klarer III	Besseres Verstehen des Zusammenhanges II	Besseres Verstehen des Zusammenhanges I
	Es ist einfacher, Verknüpfungen herzustellen im normalen Unterricht I	Schnelle Veranschaulichung durch graphische Darstellung II	Schnelle Veranschaulichung durch graphische Darstellung I
	Verlust des Blicks für einfache Rechnungen I	Zusammenhang unterschiedlicher Rechenbereiche wird deutlich I	Schnelle Fehlererkennung II
		Matrixrechnung I	Schneller mit den HA fertig II
			Probleme bei Hausaufgaben können im Plenum

			schnell geklärt werden I
		Aufgabenbesprechung durch Projektion einfach III	Aufgabenbesprechung durch Projektion einfach V
			Anschaulicher III
			Tabelle übersichtlicher I
Buch leider nicht auf CAS abgestimmt I			

Technische Aspekte			
Problem bei Störungen wie „Hängenbleiben“ o. ä., zeitliche Verzögerung durch Reset II	Problem bei Störungen wie „Hängenbleiben“ o. ä., zeitliche Verzögerung durch Reset V	Initialisieren des Rechners beugt Betrugsversuchen vor I	Leichte Bedienbarkeit II , auch für andere Sachen einzusetzen II
Vertippen I	Zeitfaktor beim Tippen I		
Merken aller Befehle, Liste muss vorhanden sein III	Merken aller Befehle, Liste muss vorhanden sein I		
Zu komplexes System zu Beginn I			
Gefühle			
		Spaß II	Mehr Spaß V II
	Verlust von viel Freude am Mathematikunterricht I		Mehr Abwechslung III Mehr Aktivität I Mehr Erfolgserlebnisse II
Rechnungen manchmal langweilig I	Verlust von Eigenarbeit und Selbständigkeit durch reines Eintippen I		Mehr Sicherheit II Verlust der Angst I
	Schnelleres Vorgehen I	Kreativer, moderner Unterricht V, Gruppenarbeit I	Moderner Unterricht II
Zukunftsaspekte			
Verlust der Fähigkeit, mit der „Hand“ zu rechnen II	Verlust der Fähigkeit, mit der „Hand“ zu rechnen II		Weiterhin auch Rechnungen mit der Hand möglich I
Kein Lernen des Umgangs mir dem „normalen Taschenrechner“ II	Kein Lernen des Umgangs mir dem „normalen Taschenrechner“ III		
Was tun an der Uni/ Berufsleben ohne Rechner? II	Verlust des Rechners nach dem Abi I	Vorbereitung auf Computernutzung in der Uni I	

Zusammenfassung: Die oft sehr verständigen Schüleräußerungen weisen neben den vielen positiven Aspekten auch auf einige Probleme des Computereinsatzes im Mathematikunterricht hin. Man sollte dabei berücksichtigen, dass manche Einwände durch einen geschickten Unterricht vermieden werden können. Es muss dem Unterricht gelingen, Handarbeit ohne Verlust von Grundfertigkeiten einzuschränken und Computereinsatz so zu gestalten, dass ein besseres Verständnis von Mathematik erreicht wird. Außerdem ist dem Schüler immer wieder zu verdeutlichen, was durch den Computereinsatz gewonnen wird. Dazu ist dieser gemeinsam zu reflektieren.

Für Ihre Notizen

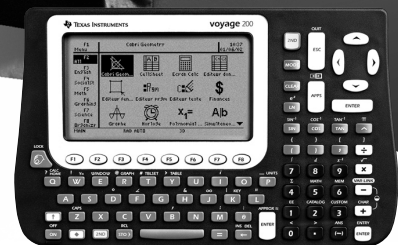
Meine Schüler
machen mit



Mathematik besser verstehen.

Unser Ziel ist es, Sie im Unterricht mit modernster Technologie und individuellen Serviceangeboten zu unterstützen. Dafür arbeiten wir bereits in der Produktentwicklung weltweit mit erfahrenen Lehrerinnen und Lehrern zusammen. Motivieren und begeistern auch Sie Ihre Schüler mit Graphikrechnern und Computer-Algebra-Systemen von Texas Instruments. Mathematische Fragestellungen lassen sich damit visualisieren, die Aufgaben werden so anschaulicher und interessanter – für ein tieferes und besseres Verständnis von Mathematik.

Eine Fülle von Materialien für Ihren Unterricht finden Sie in der Materialdatenbank von TI unter www.t3deutschland.de sowie auf den Internetseiten von Texas Instruments: education.ti.com



 **TEXAS
INSTRUMENTS**

TI Technology - Beyond Numbers



Mathematik mit CAS im Grundkurs Unterricht – Strategien - Klausuren - Abitur

Das Berliner CAS-Projekt Sekundarstufe 2

Eberhard Lehmann

Haben Sie Fragen zu den Produkten von Texas Instruments?

Oder sind Sie an weiteren Unterrichtsmaterialien, der Ausleihe von Rechnern oder einer Lehrerfortbildung interessiert? Gerne steht Ihnen unser Customer Service Center mit Rat und Tat zur Seite. Nehmen Sie mit uns Kontakt auf:

E-Mail: ti-cares@ti.com

Telefonisch von Montag bis Freitag 9.00 - 17.00 Uhr

Deutschland

Telefon: 06196-97 50 15

Telefax: 06196-97 50 44

education.ti.com/deutschland

Österreich

Telefon: 01-50 29 10 007

Telefax: 01-50 29 10 034

education.ti.com/oesterreich

Schweiz:

Telefon: 0 44-27 30 688

Telefax: 022-71 00 036

education.ti.com/schweiz

Texas Instruments 

c/o Sitel

Woluwelaan 158

1831 Diegem

Belgien

Umweltfreundlich gedruckt auf chlorfreiem Papier