CAS im Mathematikunterricht der Klasse 10

Wahlbereiche

Herausgeber: Dr. Hubert Langlotz

Freistaat Sachsen

Teachers Teaching with Technology™

T³ DEUTSCHLAND

Herausgeber:
Dr. Hubert Langlotz

Autoren:
Martin Bellstedt, Ralph Huste, Dr. Hubert Langlotz, Dr. Wilfried Zappe
Berater: Ines Petzschler, Frank Liebner

Dieses und weiteres Material steht Ihnen zum pdf-Download bereit:

www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Liebe Lehrerinnen[1],

In diesem Heft werden die Wahlbereiche aus dem Lehrplan Klasse 10 thematisiert.
Auch in der Klassenstufe 10 kann ein Lernbereich mit Wahlcharakter im Umfang von zwei Wochen bearbeitet werden (vgl. Lehrplan Seite IV).“
Es kann aber auch dort, wo sich in den verpflichtenden Lernbereichen Anknüpfungspunkte ergeben, die Möglichkeit genutzt werden, einzelne Arbeitsblätter zu integrieren.

Die Wahlbereiche bieten Möglichkeiten zur sinnvollen Differenzierung. Es ist auch möglich, den Schülerinnen das Material für Facharbeiten zur Verfügung zu stellen.

Der Herausgeber und die Autoren

[1] Wir verwenden im Heft die weibliche Form, die im Weiteren für alle Geschlechter gilt.

Inhaltsverzeichnis

Wahlbereich 1: Komplexe Zahlen

Wahlbereich 1: Komplexe Zahlen	
Einblick gewinnen in den Zahlbereich der komplexen Zahlen	Fundamentalsatz der Algebra
- arithmetische Darstellung komplexer Zahlen	
- Gaußsche Zahlenebene	Würdigung C. F. Gauß
- Addition und Subratktion komplexer Zahlen	geometrische Deutung
- trigonometrische und exponentielle Darstellung komplexer Zahlen	→ PH, Lk 12, LB 1

Hinweise für Lehrkräfte

Vorbemerkung: Wir geben hier ebenfalls (etwa ab Arbeitsblatt 6) Hinweise für Inhalte an, die etwas über diesen Lehrplan hinausgehen, aber Einblicke geben in weitere Rechenoperationen und Anwendungen mit komplexen Zahlen. Entscheiden Sie bitte selbst, ob Sie diese Erweiterungen verwenden können/wollen.
Inhaltliche Anregungen haben wir erhalten vor allem aus „Komplexe Zahlen – Ein Leitprogramm in Mathematik“, verfasst von Christina Diehl und Marcel Leupp, erschienen bei der ETH Zürich.

Einstiegsbeispiel:
Der Einstieg in den Zahlbereich der komplexen Zahlen erfolgt in der Regel durch Betrachtungen zu notwendigen Zahlbereichserweiterungen.
natürliche Zahlen → ganze Zahlen: Ausführbarkeit der Subtraktion
ganze Zahlen → rationale Zahlen: Ausführbarkeit der Division
rationale Zahlen → reelle Zahlen: Ausführbarkeit des Radizierens
($x^2 = 2$ hat keine rationale Lösung),
Einführung von $\sqrt{2}$ durch $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, aber auch von π und e
reelle Zahlen → komplexe Zahlen: Unlösbarkeit gewisser Gleichungen im Reellen
($x^2 = -1$ hat keine reelle Lösung)

Einführung der imaginären Einheit i durch $\boldsymbol{i \cdot i = i^2 = -1}$

Die imaginäre Einheit $\boldsymbol{i}$ findet man auf dem TI-Nspire unter der Taste $\boxed{\pi\blacktriangleright}$:

Für die imaginäre Einheit i nicht die Buchstabentaste $\boxed{\mathbf{I}}$ verwenden!

Definition:

> Es wird eine neue Zahl i definiert, welche die Gleichung $x^2 = -1$ löst, das heißt, für die $i^2 = -1$ gilt. Diese Zahl wird bezeichnet als die imaginäre Einheit i.

Die Festlegung $i = \sqrt{-1}$ wird nicht verwendet.

Begründung:
Wenn man $i = \sqrt{-1}$ schreibt, dann besteht die Versuchung, die üblichen Rechenregeln für Wurzeln aus dem Bereich der reellen Zahlen auf die komplexen Zahlen zu übertragen.
Dies führt aber zu einem Widerspruch:

$$-1 = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Die Gleichung –1 = 1 ist im Zahlbereich der reellen Zahlen ein Widerspruch.
Die Schreibweise $i = \sqrt{-1}$ ist somit irreführend und sollte nicht verwendet werden.
Die Rechenregel $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ kann nicht so einfach auf negative Zahlen a und b übertragen werden.

Komplexe Zahlen eingeben und speichern:

$z1\_ := 2+3\cdot \boldsymbol{i}$	$2+3\cdot \boldsymbol{i}$

Das Unterstrichzeichen kennzeichnet z als Variable, die eine komplexe Zahl enthält.
Es ist nicht obligatorisch, aber speziell bei Gleichungen sehr zu empfehlen.[2]

Das Unterstrichzeichen _ wird auf dem Handheld eingegeben mit [ctrl] [␣] .

[2] Siehe Beat Eicke „Mathematikrezepte für TI-Nspire™ CAS und TI-Nspire™ CX CAS, Pythagoras Lehrmittel 2011, S.42 - 44

Operationen für komplexe Zahlen:

Die Operationen +, -, *, / und ^ stehen auch für komplexe Zahlen zur Verfügung.

Neue und alte Befehle gegenüber gestellt:

$\text{solve}(x^2=-1,x)$	false
$\text{cSolve}(x^2=-1,x)$	$x=i$ or $x=-i$
$\text{factor}(x^2+1)$	x^2+1
$\text{cFactor}(x^2+1)$	$(x-i)\cdot(x+i)$
$\text{zeros}(x^2+2,x)$	$\{\}$
$\text{cZeros}(x\_^2+2,x\_)$	$\{-\sqrt{2}\cdot i,\sqrt{2}\cdot i\}$
$\text{factor}(x^2+1)$	x^2+1
$\text{cFactor}(x\_^2+1)$	$(x\_-i)\cdot(x\_+i)$
$\text{solve}(x^2=-1,x)$	false
$\text{cSolve}(x\_^2=-1,x\_)$	$x\_=i$ or $x\_=-i$
$\text{solve}\left(\begin{cases}x^2+y=0\\x+y^2=0\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=-1$ and $y=-1$ or $x=0$ and $y=0$
$\text{cSolve}\left(\begin{cases}x\_^2+y\_=0\\x\_+y\_^2=0\end{cases},\{x\_,y\_\}\right)$	
	$x\_=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$ and $y\_=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$ or $x\_=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$ and $y\_=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$ or $x\_=-1$ and $y\_=-1$ or $x\_=0$ and $y\_=0$

Funktionen für komplexe Zahlen:

Die auf reelle Zahlen anwendbaren Funktionen stehen auch für komplexe Zahlen zur Verfügung. Neu oder mit etwas anderer Bedeutung sind folgende Funktionen:

$\lvert 2+3\cdot i\rvert$	$\sqrt{13}$
$\text{real}(2+3\cdot i)$	2
$\text{imag}(2+3\cdot i)$	3
$\text{conj}(2+3\cdot i)$	$2-3\cdot i$
$\text{angle}(1+1\cdot i)$	$\frac{\pi}{4}$

Anzeigeformate für komplexe Zahlen:

Unter *Einstellungen – Dokumenteinstellungen* lassen sich drei Formate einstellen:

Reell: Komplexe Ergebnisse werden nur dann angezeigt, wenn in der gestellten Rechnung eine komplexe Zahl auftaucht oder wenn ein Befehl für komplexe Zahlen verwendet wird, z. B. csolve.

Kartesisch: Komplexe Zahlen werden in der Form $a + b\boldsymbol{i}$ angezeigt.

Polar: Komplexe Zahlen werden in der Form $r \cdot e^{\boldsymbol{i} \cdot \varphi}$ oder $(r\angle\varphi)$ angezeigt.

Umwandlung Normalform → Polarform:

$(2+3\cdot \boldsymbol{i})$ ▸Polar	$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)}\cdot\sqrt{13}$
$(2.+3\cdot \boldsymbol{i})$ ▸Polar	$\boldsymbol{e}^{0.983\cdot \boldsymbol{i}}\cdot 3.61$

Umwandlung Polarform →Normalform

$2\cdot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\cdot\pi}$	-2
$2\cdot \boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{i}\cdot\pi}{3}}$	$1+\sqrt{3}\cdot \boldsymbol{i}$
$\left(3\angle\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{3}{2}+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot \boldsymbol{i}$

Die Zeichen ▸ und ∠ befinden sich im Sonderzeichenkatalog ctrl 📖.

Arbeitsblatt 1: Die imaginäre Einheit

Weil die Gleichung $x^2 = 2$ keine rationale Lösung hat, wurde durch die Einführung der irrationalen Zahl $\sqrt{2}$ durch $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ der Zahlbereich der rationalen Zahlen zum Zahlbereich der reellen Zahlen erweitert. Auch die Zahl π und die Eulersche Zahl e sind Beispiele für irrationale Zahlen.
Weil die Gleichung $x^2 = -1$ keine reelle Lösung besitzt, wird der Zahlbereich der reellen Zahlen erweitert zum Zahlbereich der komplexen Zahlen.

Definition:

> Es wird eine neue Zahl i definiert, welche die Gleichung $x^2 = -1$ löst, das heißt, für die $i^2 = -1$ gilt. Diese Zahl wird bezeichnet als die imaginäre Einheit i.

Hinweis: Die Festlegung $i = \sqrt{-1}$ wird nicht verwendet.
Bei den bisherigen Zahlbereichserweiterungen wurde das **Permanenzprinzip** eingehalten:

1. Die „alten" Zahlen sind ein Teil der neuen Zahlen. So sind beispielsweise die rationalen Zahlen eine Teilmenge der reellen Zahlen.
2. Alle Rechenoperationen, die mit den „alten" Zahlen möglich sind, sind auch mit den „neuen" Zahlen möglich.
3. Für die neuen Zahlen gelten dieselben Rechenregeln wie für die alten.

Das Permanenzprinzip wird auch bei der Erweiterung der reellen zu den komplexen Zahlen beachtet.
Mit der imaginären Zahl i kann man nun rechnen. Nach dem Permanenzprinzip (siehe 3.) sollen die Rechenregeln für reelle Zahlen weiter gelten.

Beispiel: $i^3 = (i \cdot i) \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

Aufgabe 1
Berechnen Sie ohne Hilfsmittel.

a) i^4 b) i^5 c) $-i^2$ d) $(-i)^2$ e) i^{2n} mit $n \in \{5,6,7,8\}$

Aufgabe 2
Die imaginäre Einheit i findet man auf dem TI-Nspire CAS unter der Taste [π▸]:

Überprüfen Sie mit dem TI-Nspire CAS die Lösungen der Aufgabe 1.

Aufgabe 3
Begründen Sie ohne CAS mithilfe der Potenzgesetze, dass i^{2n} mit $n \in N$ immer genau einen der Werte 1 oder –1 annimmt.
Gibt man den Term i^{2n} in den CAS-Rechner ein und drückt [enter], erhält man ein erstaunliches Ergebnis.
Beschreiben Sie, was an diesem Ergebnis erstaunlich ist. Überprüfen Sie die Gleichheit beider Terme mit verschiedenen Werten von n.

WB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 1:

Aufgabe 1

Berechnung ohne Hilfsmittel.

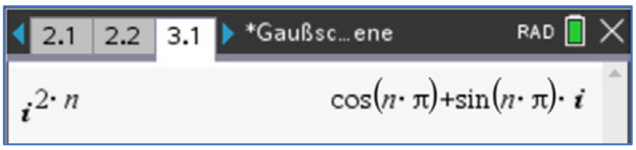
a) $i^4 = 1$
b) $i^5 = i$
c) $-i^2 = 1$
d) $(-i)^2 = -1$
e) i^{2n} mit $n \in \{5,6,7,8\}$ ergibt $\{-1, 1, -1, 1\}$

Aufgabe 2

Die imaginäre Einheit i findet man auf dem TI-Nspire CAS unter der Taste $\boxed{\pi\blacktriangleright}$:

Aufgabe 3

$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$ Für gerades n immer +1, für ungerades n ergibt sich –1.



Erstaunlich ist z. B., dass aus einer Potenz der imaginären Zahl eine Summe wird, in deren Summanden trigonometrische Funktionen vorkommen.

Beispiel:
n = 1 ergibt $i^{2\cdot 1} = -1$ und $\cos(1 \cdot \pi) + i \cdot \sin(1 \cdot \pi) = -1 + 0 \cdot \pi = -1$

Arbeitsblatt 2: Komplexe Zahlen

Definition: Eine Zahl z der Form **z = a + b i** wird bezeichnet als komplexe Zahl mit dem Realteil a und dem Imaginärteil b. Diese Form heißt **Normalform** von z. a und b sind dabei reelle Zahlen. i steht für die imaginäre Einheit.

Beispiele:

komplexe Zahl	Realteil	Imaginärteil
$1 + 2i$	1	2
0,5 – 0,2 i	0,5	–0,2
–12	–12	0
$\frac{3}{5}i$	0	$\frac{3}{5}$

Aufgabe 1
Kreuzen Sie an, wenn die Zahl zum angegebenen Zahlbereich gehört.

Zahl	$\mathbb{N}\backslash\{0\}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
4					
$\sqrt{5}$					
$6 - i$					
0					
$-2i$					
0,25					

Aufgabe 2
Ergänzen Sie die Lücken.

komplexe Zahl	Realteil	Imaginärteil
$-0{,}3 + \pi \cdot i$		
	0	$\sqrt{2}$
	–1	0
$-\frac{6}{7}i$		

Aufgabe 3
Richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Meinung.

„Für alle komplexen Zahlen z gilt: Imaginärteil (Realteil(z)) = 0.“

WB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 2:

Aufgabe 1

Zahl	$\mathbb{N}\setminus\{0\}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
4	x	x	x	x	x
$\sqrt{5}$				x	x
$6-i$					x
0		x	x	x	x
$-2i$					x
0,25			x	x	x

Aufgabe 2

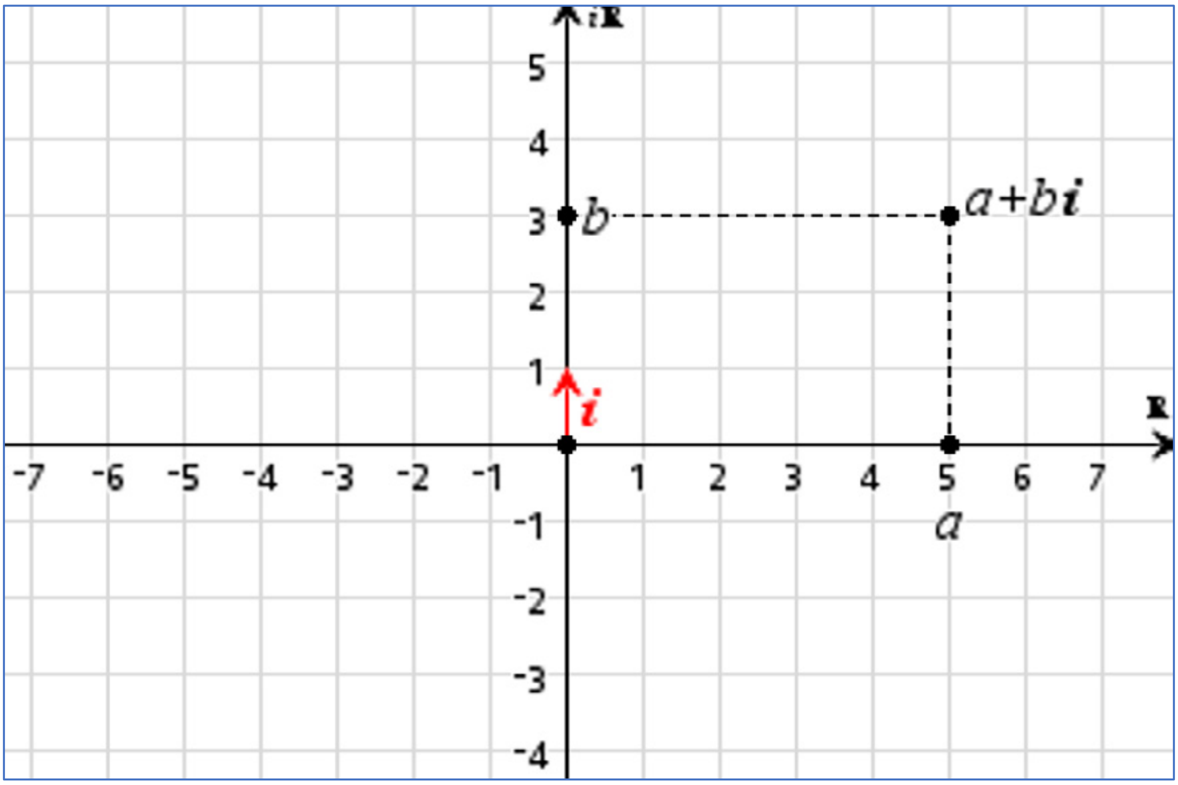
komplexe Zahl	Realteil	Imaginärteil
$-0{,}3+\pi\cdot i$	–0,3	π
$\sqrt{2}\cdot i$	0	$\sqrt{2}$
-1	–1	0
$-\frac{6}{7}i$	0	$-\frac{6}{7}$

Aufgabe 3

„Für alle komplexen Zahlen z gilt: Imaginärteil (Realteil(z)) = 0.“
Die Aussage ist wahr. Der Realteil einer imaginären Zahl z enthält keinen Imaginärteil.

Arbeitsblatt 3: Die Gaußsche Zahlenebene

Jeder komplexen Zahl z = a + b i wird der Punkt (a; b) in der Zahlenebene zugeordnet.
Waagerechte Achse: reelle Achse $\mathbb{R}$
Senkrechte Achse: imaginäre Achse $i\mathbb{R}$
Koordinatenursprung: Nullpunkt



Beispiel:
Der in der Abbildung bereits eingetragene Punkt gehört zur komplexen Zahl 5 + 3i.

Aufgabe 1
Zeichnen Sie die komplexen Zahlen in die oben dargestellte Gaußsche Zahlenebene ein.

a) i b) $2 + i$ c) -3 d) $5 - 3i$ e) $-5 - 3i$

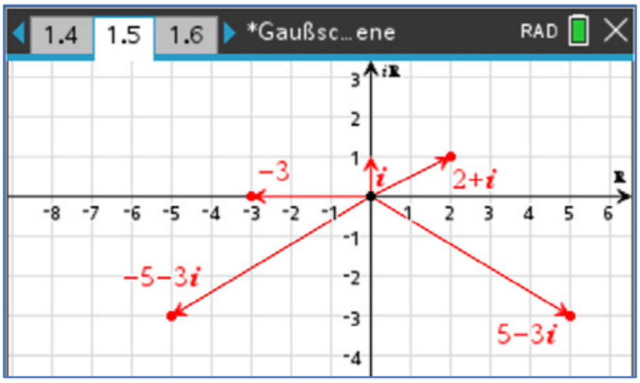
Aufgabe 2
Zeichnen Sie zu jeder Aufgabe eine Gaußsche Zahlenebene und markieren Sie farbig die Menge aller Punkte z, für die gilt:

a) Realteil(z) ≤ 4 und Imaginärteil(z) > 3
b) Imaginärteil(z) $\leq$ 3
c) |Imaginärteil(z)| $\leq$ 2

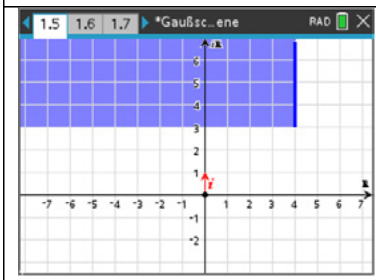
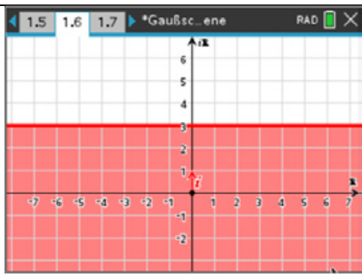
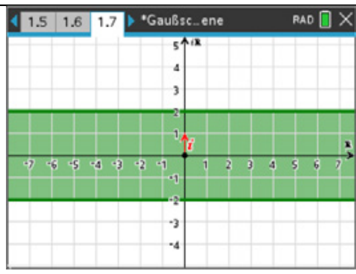
WB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 3:

1.

a) i b) $2+i$ c) -3 d) $5-3i$ e) $-5-3i$



2.

a)	b)	c)
		

Arbeitsblatt 4: Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Aufgabe 1

$z1:=5-3\cdot i$	$5-3\cdot i$
$z2:=4+2\cdot i$	$4+2\cdot i$
$z1+z2$	$9-i$
$z1-z2$	$1-5\cdot i$
$z2-z1$	$-1+5\cdot i$

Untersuchen Sie, wie der TI-Nspire CAS die Summe bzw. die Differenz der beiden komplexen Zahlen z1 und z2 gebildet hat.

Bilden Sie zunächst ohne den TI-Nspire CAS auf analogem Weg z3 + z4 sowie z3 – z4 und z4 – z3 für
z3 = –2 + 4 i und z4 = 6 + 5 i.
Überprüfen Sie Ihre handschriftliche Rechnung mit dem TI-Nspire CAS.

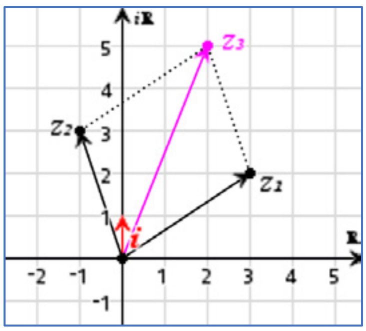
Aufgabe 2
Ergänzen Sie den folgenden Text zu einer sinnvollen Aussage.

Komplexe Zahlen werden addiert/subtrahiert, indem man

Aufgabe 3
Berechnen Sie folgende Ausdrücke zunächst handschriftlich. Überprüfen Sie dann mit dem TI-Nspire CAS (a)-c)).

a) $(7-2i)+(2-7i)-(9-9i)$
b) $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}i\right)+\frac{4}{15}\,i$
c) $\left(\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{2}i\right)+\left(2-\sqrt{2}i\right)+4\sqrt{2}\,i$
d) Schreiben Sie die imaginäre Zahl i als Summe zweier komplexer Zahlen.
e) Lässt sich die reelle Zahl 1 als Summe zweier rein imaginärer Zahlen schreiben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4
Lesen Sie die Koordinaten der komplexen Zahlen z1, z2 und z3 aus der grafischen Darstellung ab.



Zeigen Sie rechnerisch, dass z1 + z2 = z3 ist.

Interpretieren Sie das Addieren von z1 + z2 geometrisch. Verwenden Sie zur Beschreibung die Pfeile vom Nullpunkt zu den Punkten in der Gaußschen Zahlenebene.

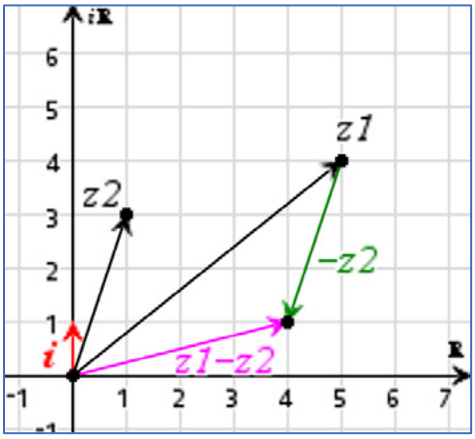
Aufgabe 5
Zeichnen Sie eine Gaußsche Zahlenebene und veranschaulichen Sie die Addition von $z_1=4-2i$ und $z_2=2+4i$ geometrisch.

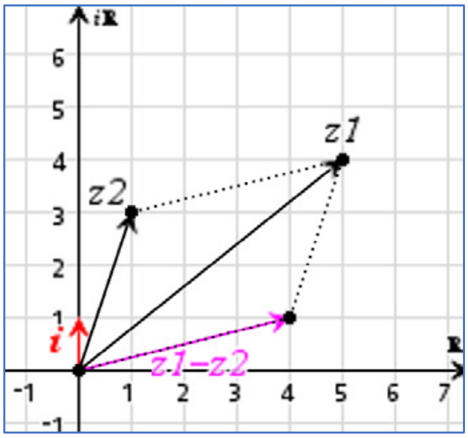
Aufgabe 6
Begründen Sie, dass beide Vorschriften zur geometrischen Addition zweier komplexer Zahlen z1 und z2 gerechtfertigt sind.

- Zeichnen Sie die Pfeile vom Nullpunkt zu den Punkten z1 und z2.
- Zeichnen Sie das Parallelogramm, das die beiden Pfeile aufspannen.
- Der Pfeil, der im Nullpunkt beginnt und die Diagonale des Parallelogramms repräsentiert, endet im Punkt
z3 = z1 + z2.

- Zeichnen Sie die Pfeile vom Nullpunkt zu den Punkten z1 und z2.
- Verschieben Sie den zu z2 gehörenden Pfeil parallel, sodass sein Anfangspunkt im Endpunkt des zu z1 gehörenden Pfeiles liegt.
- Der Pfeil, der im Nullpunkt beginnt und im Endpunkt des verschobenen Pfeiles von z2 endet, gehört zu z3 = z1 + z2.

Aufgabe 7
Die Subtraktion zweier komplexer Zahlen wird wegen $z1 - z2 = z1 + (-z2)$ auf die Addition zurückgeführt:





Formulieren Sie zu jedem Bild eine Vorschrift zur geometrischen Subtraktion zweier komplexer Zahlen z1 und z2.

Aufgabe 8
Ermitteln Sie die Ergebnisse auf rechnerischem und geometrischem Weg.

a) $(3 - i) + (1 - 3i)$

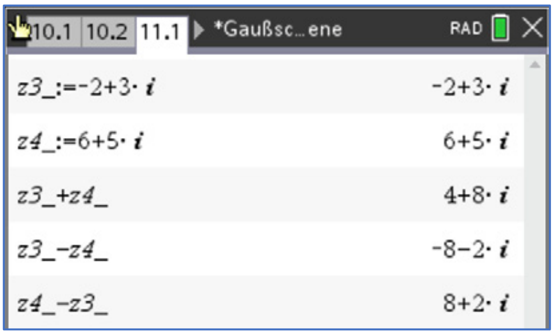
b) $(5 + 2i) + (1 - 7i)$

c) $(7 - 2i) - (2 - 7i)$

d) $(2 + 2i) + (3 - 4i) - (-2 + i)$

WB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 4:

Aufgabe 1



Aufgabe 2
Komplexe Zahlen werden addiert/subtrahiert, indem man die Realteile addiert/subtrahiert und die Imaginärteile addiert/subtrahiert.

Aufgabe 3
a) $(7-2i)+(2-7i)-(9-9i)=0$

b) $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}i\right)+\frac{4}{15}\,i=-\frac{1}{4}$

c) $\left(\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{2}i\right)+\left(2-\sqrt{2}i\right)+4\sqrt{2}\,i=2+\sqrt{5}$

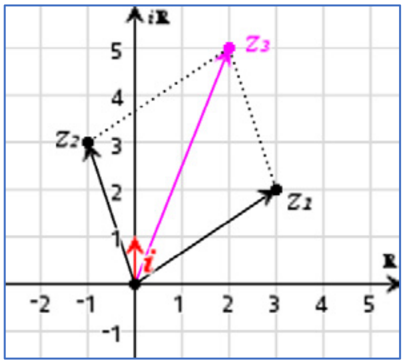
d) z. B. $(7-2i)+(-7+3i)=i$

e) Nein, das geht nicht, denn die Summe aus zwei rein imaginären Zahlen ist wieder imaginär oder null, aber niemals reell und ungleich null, also auch nicht 1.

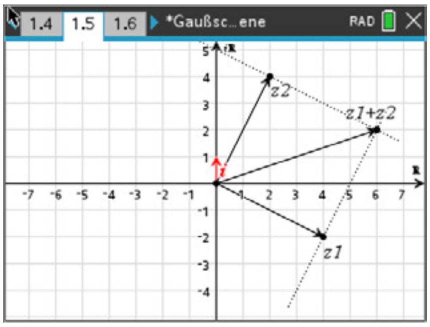
Aufgabe 4
$z1=(3+2i);\ z2=(-1+3i);\ z3=(2+5i)$

$(3+2i)+(-1+3i)=(3-1)+(2+3)i=2+5i$

Interpretation: z3 ist die Diagonale in dem von z1 und z2 aufgespannten Parallelogramm.

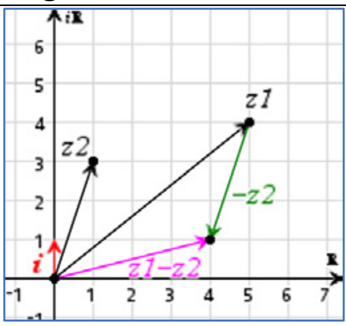
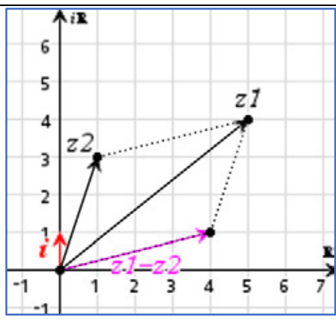


Aufgabe 5
Zeichnung und Veranschaulichung der Addition von $z_1 = 4 - 2i$ und $z_2 = 2 + 4i$.



Aufgabe 6
Beide Konstruktionsvorschriften sind gleichwertig. Auch die rechts abgedruckte Vorschrift führt zu dem Parallelogramm und der Diagonalen, die in der linken Vorschrift gegeben sind.

Aufgabe 7

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Zeichnen Sie die Pfeile vom Nullpunkt zu den Punkten z1 und z2.
Tragen Sie im Endpunkt vom Pfeil z1 den zum Pfeil z2 entgegengesetzt gerichteten Pfeil – z2 an.
Der Pfeil, der vom Nullpunkt zum Endpunkt von – z2 gerichtet ist, repräsentiert z3 = z1 – z2.

</td>
<td>

Zeichnen Sie die Pfeile vom Nullpunkt zu den Punkten z1 und z2.
Zeichnen Sie den Pfeil, der vom Endpunkt von z2 zum Endpunkt des zu z1 gehörenden Pfeiles gehört.
Verschieben Sie diesen Pfeil parallel mit seinem Anfangspunkt in den Nullpunkt. Sein Endpunkt gehört zu z3 = z1 – z2.

</td>
</tr>
</table>

Aufgabe 8
a) $(3 - i) + (1 - 3i) = 4 - 4i$

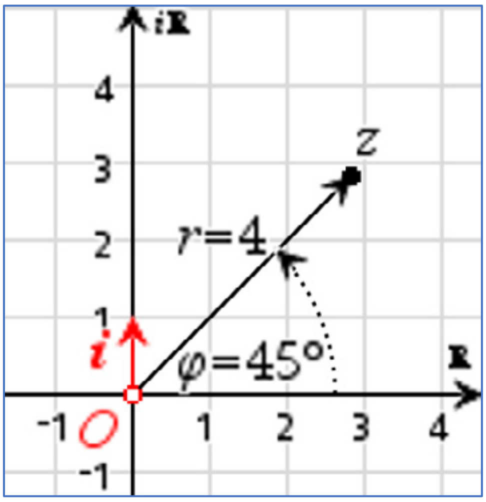
b) $(5 + 2i) + (1 - 7i) = 4 - 5i$

c) $(7 - 2i) - (2 - 7i) = 5 + 5i$

d) $(2 + 2i) + (3 - 4i) - (-2 + i) = 7 - 3i$

Arbeitsblatt 5: Komplexe Zahlen in Polarform

Zu jedem Punkt $z = a + bi$ in der Gaußschen Zahlenebene lässt sich ein Zeiger (Pfeil) angeben, der im Nullpunkt beginnt und bei z endet. Jeder dieser Zeiger ist eindeutig festgelegt durch seine Zeigerlänge r und den Winkel φ mit $0 \le \varphi \le 2\pi$, den der Zeiger mit der positiven reellen Achse bildet. Man schreibt $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ (sprich: „r-mal Einheitszeiger mit Winkel φ") und bezeichnet dies als **Polarform** der komplexen Zahl z.
Winkel φ: **Argument von z**; arg(z)



Hinweis: Im Augenblick steht die Variable e in $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ nur für eine Schreibweise für den Einheitszeiger mit Winkel φ. Wie man zeigen kann, steht e hier insbesondere für die Eulersche Zahl. Der Nachweis ist im Rahmen dieses Kurzlehrganges nicht möglich. Interessant ist noch, dass sich aus dieser Schreibweise wohl eine der schönsten Formeln der Mathematik ($e^{i \cdot \pi}$+1 = 0) ergibt, die hier nur mitgeteilt wird.

Beispiel:

Im Bild oben rechts gilt $z = 3 + 3i = 4 \cdot e^{i \cdot 45°} = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$

Aufgabe 1
Zeichnen Sie in eine Gaußsche Zahlenebene den entsprechenden Zeiger und bestimmen Sie die komplexe Zahl in der Normalform $z = a + bi$.

$$z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot \pi} \qquad z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{3}{2}\pi} \qquad z_3 = 2 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)} \qquad z_4 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$$

Aufgabe 2
Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarform an.

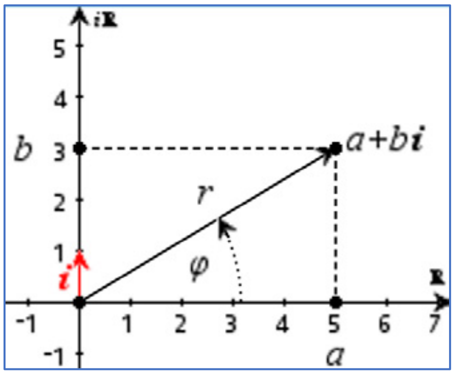
$z_1 = 2i \qquad z_2 = 2$
$z_3 = -2i \qquad z_4 = -2$

Aufgabe 3

Zeichnen Sie die komplexen Zahlen $z_n = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot n}$ für n = {0, 1, 2, …, 5} in eine Gaußsche Zahlenebene ein. Beschreiben Sie die Form der entstandenen Figur.

Aufgabe 4
Umrechnung von Polarform und Normalform

Begründen Sie die Zusammenhänge:



$a = r \cdot cos(\varphi)$
$b = r \cdot sin(\varphi)$
$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
$e^{i \cdot \varphi} = cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi)$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi} = r \cdot cos(\varphi) + i \cdot r \cdot sin(\varphi) = a + bi$

Beispiele:

$6 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}} = 6 \cdot \left[cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 6 \cdot \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -3 \cdot \sqrt{2} + i \cdot 3 \cdot \sqrt{2}$

$z = 1 + i \cdot \sqrt{3}\,;\ \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3};\ r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \Rightarrow z = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$

Aufgabe 5
Berechnen Sie die Normalform. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen der Aufgabe 1.

$z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot \pi}$ $z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{3}{2}\pi}$ $z_3 = 2 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ $z_4 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$

Aufgabe 6
Berechnen Sie die Polarform. Beschreiben Sie, wie man die Schwierigkeiten bei der Winkelberechnung überwinden kann. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen der Aufgabe 2.

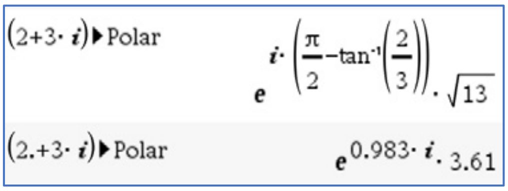
$z_1 = 2i$ $z_2 = 2$ $z_3 = -2i$ $z_4 = -2$

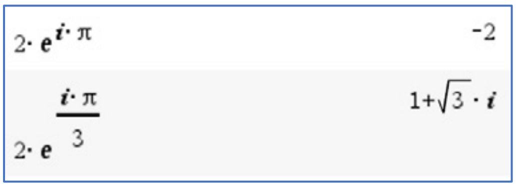
Aufgabe 7
Wandeln Sie $z = -\sqrt{3} - i$ auf grafischem und rechnerischem Weg in die Polarform um. Beachten Sie dabei die Quadrantenbeziehungen der Tangensfunktion.

Aufgabe 8
Berechnen Sie die Polarform der komplexen Zahlen.

$z_1 = 1 + i$ $z_2 = -5 + 3i$ $z_3 = -1 - i \cdot \sqrt{3}$ $z_4 = \sqrt{7} - \frac{1}{2}i$

Aufgabe 9
Probieren Sie das Umwandeln Normalform ⟺ Polarform mit dem TI-Nspire CAS aus.
Orientieren Sie sich an den beiden Screenshots.



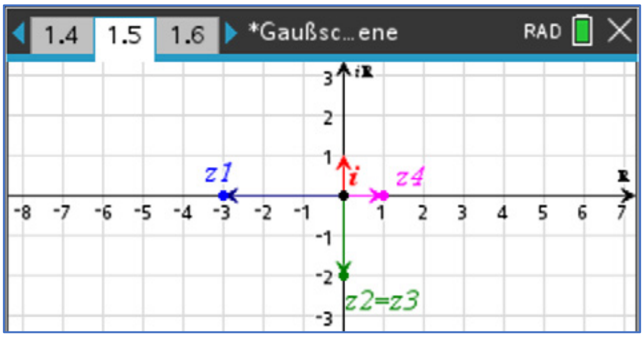


Das Zeichen ▸ befindet sich im Sonderzeichenkatalog ctrl 📖.
Das Wort „Polar“ wird mit den Buchstabentasten eingegeben.
Für die Eingabe der Polarform muss die Taste e^x genutzt werden.

WB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 5:

Aufgabe 1

$z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot \pi}$ $z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{3}{2}\pi}$ $z_3 = 2 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ $z_4 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$



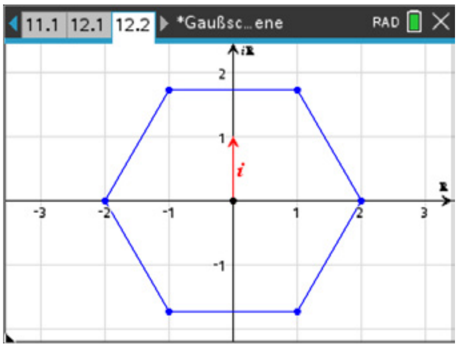
Aufgabe 2

$z_1 = 2i = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{1}{2}\pi}$ $z_2 = 2 = 2 \cdot e^0$

$z_3 = -2i = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{3}{2}\pi}$ $z_4 = -2 = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}$

Aufgabe 3

Es handelt sich um ein regelmäßiges Sechseck.

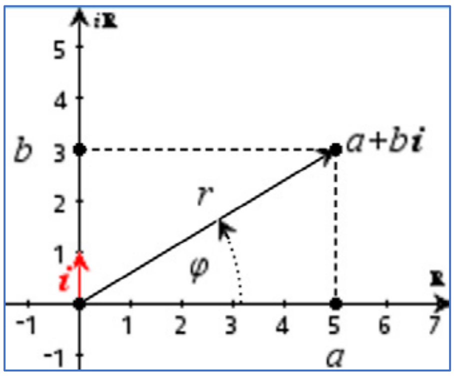


Umrechnung von Polarform und Normalform

Aufgabe 4

Begründung der Zusammenhänge:

$a = r \cdot cos(\varphi)$ Definition der Winkelfunktionen
$b = r \cdot sin(\varphi)$
$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ Satz des Pythagoras
$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi} = r \cdot cos(\varphi) + i \cdot r \cdot sin(\varphi) = a + bi$
$e^{i \cdot \varphi} = cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi)$



Aufgabe 5

$z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot \pi} = -3 \qquad z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{3}{2}\pi} = -2i \quad z_3 = 2 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -2i \quad z_4 = 1 \cdot e^{i \cdot 0} = 1$

Umkehrung der Aufgabenstellung gegenüber Aufgabe 1.

Aufgabe 6

$z_1 = 2i = 2 \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)} \qquad z_2 = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$

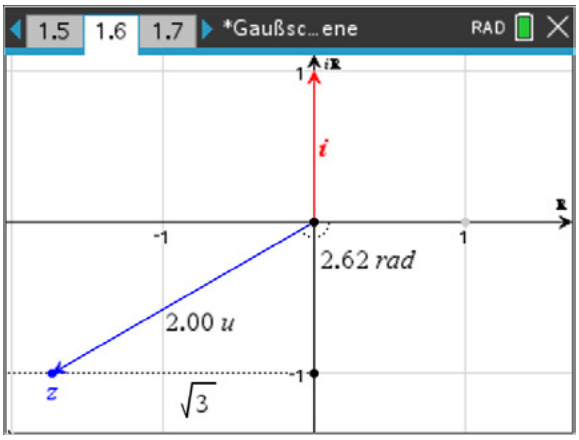
$z_3 = -2i = 2 \cdot e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 2 \cdot e^{i \cdot \left(\frac{3\pi}{2}\right)} \qquad z_4 = -2 = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}$
Quadrantenbeziehungen der Winkelfunktionen anwenden, wenn nötig.

Aufgabe 7

$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2; \varphi = \arctan\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right) = arctan\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

Den Koordinaten ist zu entnehmen, dass $z = -\sqrt{3} - i$ im 3. Quadranten liegt.
Der Drehwinkel ist deshalb $\varphi = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi (= -\frac{5}{6}\pi \approx -2{,}62)$.

Polarform: $z = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{7}{6}\pi}$



Aufgabe 8

$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}} \qquad z_2 = -5 + 3i \approx 5{,}83 \cdot e^{2{,}6i}$

$z_3 = -1 - i \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{4}} \qquad z_4 = \sqrt{7} - \frac{1}{2}i \approx 2{,}69 \cdot e^{2-0{,}19i}$

Aufgabe 9
individuell

Arbeitsblatt 6: Rechenoperationen und Befehle für den TI-Nspire CAS - Komplexe Zahlen eingeben und speichern

z1_:=2+3·i	2+3·i

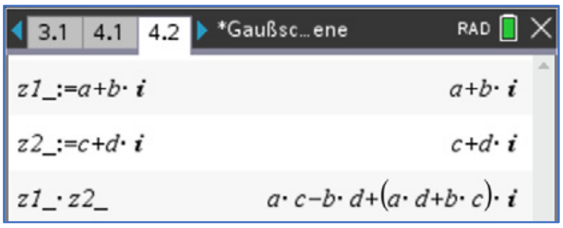
Das Unterstrichzeichen kennzeichnet z als Variable, die eine komplexe Zahl enthält. Es ist nicht obligatorisch, aber speziell bei Gleichungen sehr zu empfehlen.[3]

Das Unterstrichzeichen _ wird auf dem Handheld eingegeben mit ctrl ␣ .

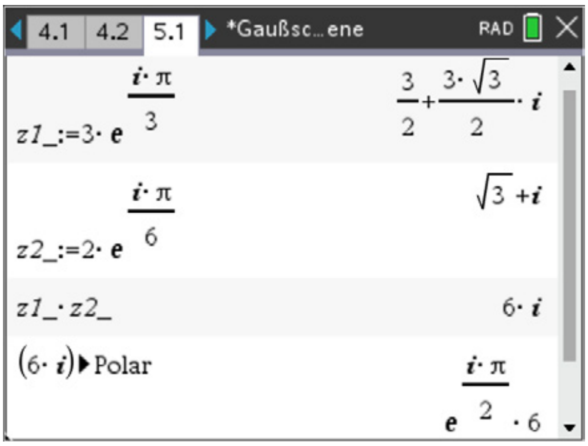
Weitere Operationen für komplexe Zahlen:

Die Operationen Multiplikation, Division, Potenzieren und Radizieren stehen auch für komplexe Zahlen zur Verfügung. Für das Verständnis kann das Permanenzprinzip herangezogen werden: Bisherige Rechengesetze sollen weiter gelten.

Aufgabe 1
Erklären Sie mithilfe des Distributivgesetzes die Multiplikation in Normalform.

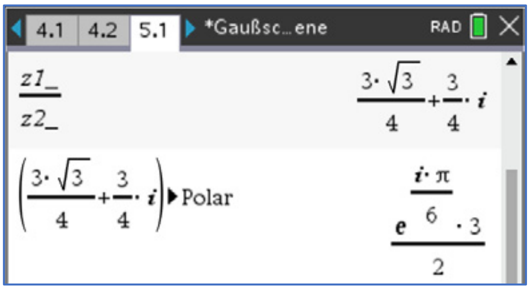


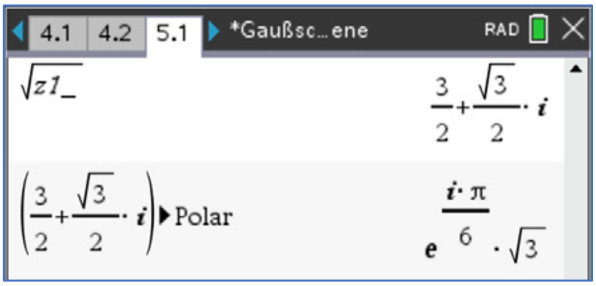
Aufgabe 2
Erklären Sie mithilfe der Potenzgesetze die Multiplikation in Polarform.



[3] Siehe Beat Eicke „Mathematikrezepte für TI-Nspire™ CAS und TI-Nspire™ CX CAS, Pythagoras Lehrmittel 2011, S.42 - 44

Aufgabe 3
Erklären Sie mithilfe der Potenzgesetze die Division und das Wurzelziehen am Beispiel von $z1\_ = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$ und $z2\_ = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$.





Aufgabe 4
Führen Sie die angegebenen Rechnungen aus, notieren Sie das Ergebnis und beschreiben Sie, was die Befehle leisten.

TI-Nspire CAS Eingabe	Ergebnis
cSolve($x\_^2 = -1, x$)	
cFactor($x\_^2 + 1$)	
cZeros($x\_^2 + 2, x$)	
cSolve$\left(\begin{cases} x_^2+y_=0 \\ x_+y_^2=0 \end{cases}, \{x_,y_\}\right)$	

Aufgabe 5
Die auf reelle Zahlen anwendbaren Funktionen stehen auch für komplexe Zahlen zur Verfügung. Beschreiben Sie die Bedeutung der folgenden Funktionen:

$\|2+3\cdot i\|$	$\sqrt{13}$
real$(2+3\cdot i)$	2
imag$(2+3\cdot i)$	3
conj$(2+3\cdot i)$	$2-3\cdot i$
angle$(1+1\cdot i)$	$\frac{\pi}{4}$

WB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 6:

Aufgabe 1

$(a + b\,i) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$

Aufgabe 2

$a \cdot e^{i \cdot \varphi} \cdot b \cdot e^{i \cdot \omega} = a \cdot b \cdot e^{i \cdot (\varphi + \omega)}$

Aufgabe 3

$z1\_ = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$ und $z2\_ = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$.

$$\frac{3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}}{2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}} = \frac{3}{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3} - i \cdot \frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}} \qquad \sqrt{3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3} \frac{1}{2}} = \sqrt{3} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$$

Aufgabe 4

TI-Nspire CAS Eingabe	Ergebnis
cSolve($x\_^2 = -1, x$)	$\text{cSolve}(x^2=-1,x)$ $\quad x=\boldsymbol{i}$ or $x=-\boldsymbol{i}$ Gleichung in $\mathbb{C}$ lösen
cFactor($x\_^2 + 1$)	$\text{cFactor}(x^2+1)$ $\quad (x-\boldsymbol{i})\cdot(x+\boldsymbol{i})$ Term in $\mathbb{C}$ faktorisieren
cZeros($x\_^2 + 2, x$)	$\text{cZeros}(x\_^2+2,x\_)$ $\quad \{-\sqrt{2}\cdot \boldsymbol{i}, \sqrt{2}\cdot \boldsymbol{i}\}$ Nullstellen eines Terms in $\mathbb{C}$ bestimmen
$\text{cSolve}\left(\begin{cases} x\_^2+y\_=0 \\ x\_+y\_^2=0 \end{cases}, \{x\_,y\_\}\right)$	Gleichungssystem in $\mathbb{C}$ lösen

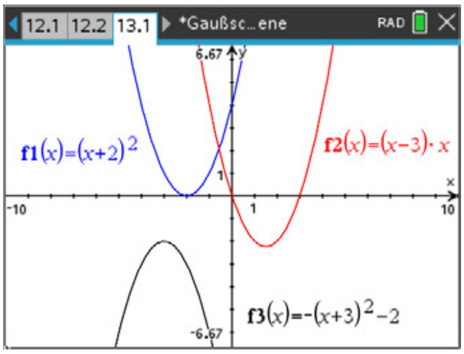
$\text{cSolve}\left(\begin{cases} x\_^2+y\_=0 \\ x\_+y\_^2=0 \end{cases}, \{x\_,y\_\}\right)$

$x\_=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \boldsymbol{i}$ and $y\_=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \boldsymbol{i}$ or $x\_=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \boldsymbol{i}$ and $y\_=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \boldsymbol{i}$ or $x\_=-1$ and $y\_=-1$ or $x\_=0$ and $y\_=0$

Aufgabe 5

$\lvert 2+3\cdot i \rvert$	$\sqrt{13}$	Betrag der komplexen Zahl
$\mathrm{real}(2+3\cdot i)$	2	Realteil
$\mathrm{imag}(2+3\cdot i)$	3	Imaginärteil
$\mathrm{conj}(2+3\cdot i)$	$2-3\cdot i$	Konjugiert komplexe Zahl
$\mathrm{angle}(1+1\cdot i)$	$\frac{\pi}{4}$	Winkel für Polarform

Arbeitsblatt 7: Fundamentalsatz der Algebra



Bereits aus Klasse 9 ist bekannt: Quadratische Gleichungen können im Bereich der reellen Zahlen zwei, genau eine oder keine reellen Lösungen besitzen. Dies ist gleichbedeutend damit, dass quadratische Funktionen zwei, eine oder keine reellen Nullstellen haben.
Wie ist das nun im Bereich der komplexen Zahlen?

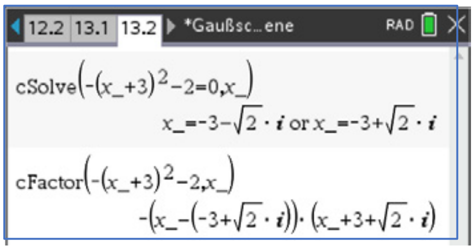
Aufgabe 1

Vollziehen Sie die Rechnung ohne CAS nach:
$f(x) = -(x+3)^2 - 2$ hat keine reellen Nullstellen (siehe Abbildung oben rechts).

$-(x+3)^2 - 2 = 0 \Longrightarrow (x+3)^2 = -2 \ \Longrightarrow$ Substitution: $t = x + 3 \ \Longrightarrow t^2 = -2$
Nach Definition der komplexen Zahlen hat diese Gleichung zwei Lösungen:
$t_1 = i \cdot \sqrt{2}$ und $t_2 = -i \cdot \sqrt{2}$
Rücksubstitution: $x_1 + 3 = i \cdot \sqrt{2} \Longrightarrow x_1 = -3 + i \cdot \sqrt{2}$ und $x_2 = -3 - i \cdot \sqrt{2}$

Aufgabe 2

Erläutern Sie die Rechnungen mit dem TI-Nspire CAS, die auf dem Screenshot abgebildet sind.



Die beiden quadratischen Funktionen $f_1 = (x+2)^2$ und $f_2 = (x-3) \cdot x$ sind bereits als Produkte zweier Linearfaktoren gegeben, wobei bei f_1 der Linearfaktor doppelt gezählt wird (siehe Abbildung oben rechts).
Nach den Ergebnissen von Aufgabe 1 und 2 kann auch die Funktion $f_3 = -(x+3)^2 - 2$ als Produkt zweier Linearfaktoren geschrieben werden. Allerdings sind diese beiden Linearfaktoren komplexe Zahlen:
$f_3(x) = \left(-x - 3 + i \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(x + 3 + i \cdot \sqrt{2}\right)$

Aufgabe 3

Schreiben Sie die in der Tabelle gegebenen Funktionen als Produkte von Linearfaktoren im Bereich der komplexen Zahlen. Nutzen Sie den TI-Nspire CAS, orientieren Sie sich an der Abbildung zur Aufgabe 2. Beobachten Sie die Anzahl der Linearfaktoren in Abhängigkeit vom höchsten Exponenten im Funktionsterm sowie die Anzahl und die Form komplexer Linearfaktoren.

Funktion	Produkt von Linearfaktoren
$f(x) = x^2 - 2x - 1$	
$f(x) = x^2 - 2x + 1$	
$f(x) = x^2 - 2x + 4$	
$f(x) = x^3 - 2x + 4$	
$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$	

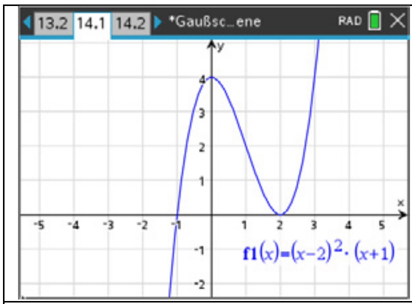
Beobachtungsergebnisse:
Anzahl der Linearfaktoren in Abhängigkeit vom höchsten Exponenten im Funktionsterm:

Anzahl und Form komplexer Linearfaktoren:

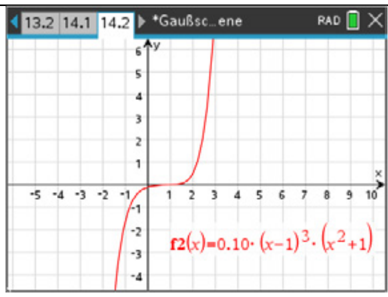
Beispiele:

Fundamentalsatz der Algebra (Carl Friedrich Gauß 1799)
Im Bereich der komplexen Zahlen besitzt jede ganzrationale Gleichung der Form $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot x^1 + a_0 = 0$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \neq 0$ und $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \{0; 1; 2; \ldots; n\}$ genau n Lösungen.

- Gehört eine komplexe Zahl $z = a + bi$ zur Lösungsmenge einer solchen Gleichung, dann gehört auch ihre konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = a - bi$ zur Lösungsmenge.
- Jede Lösung x_0 einer ganzrationalen Gleichung kommt in einem Linearfaktor $(x - x_0)$ bei einer Faktorisierung des Gleichungsterms mindestens einmal vor. Kommt ein Linearfaktor mehrfach vor, spricht man von einer mehrfachen Lösung bzw. mehrfachen Nullstelle der zugehörigen Funktion.



Die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ lässt sich in Linearfaktorschreibweise angeben als $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x+1)$. Sie hat die doppelte Nullstelle $x_{01} = 2$ und die einfache Nullstelle $x_{02} = -1$. Bei $x_{01} = 2$ berührt der Graph die x-Achse.

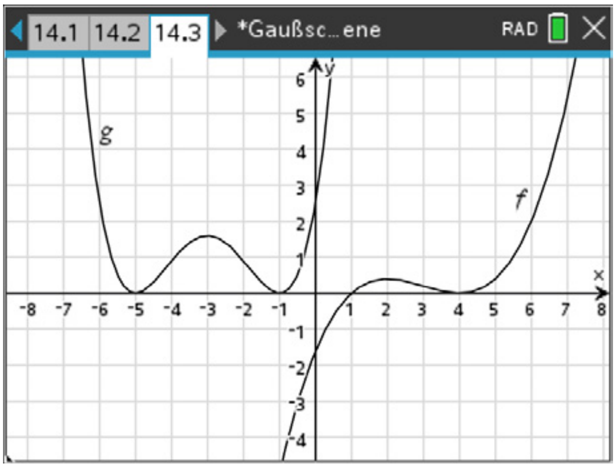


Die reelle Nullstelle $x_{01} = 1$ der Funktion $f(x) = 0{,}1 \cdot (x-1)^3 \cdot (x^2+1)$ ist eine dreifache Nullstelle. Daneben hat f zwei komplexe Nullstellen $x_{02} = i$ und $x_3 = -i$. Bei $x_{01} = 1$ schneidet der Graph die x-Achse.

Aufgabe 4
Überprüfen Sie die Aussage des Fundamentalsatzes sowie die Eigenschaften komplexer Lösungen an den Beispielen in der Tabelle. Stellen Sie die zugehörigen Funktionen grafisch dar. In welchen Fällen berührt der Graph die x-Achse an der Nullstelle? Verwenden Sie den TI-Nspire CAS.

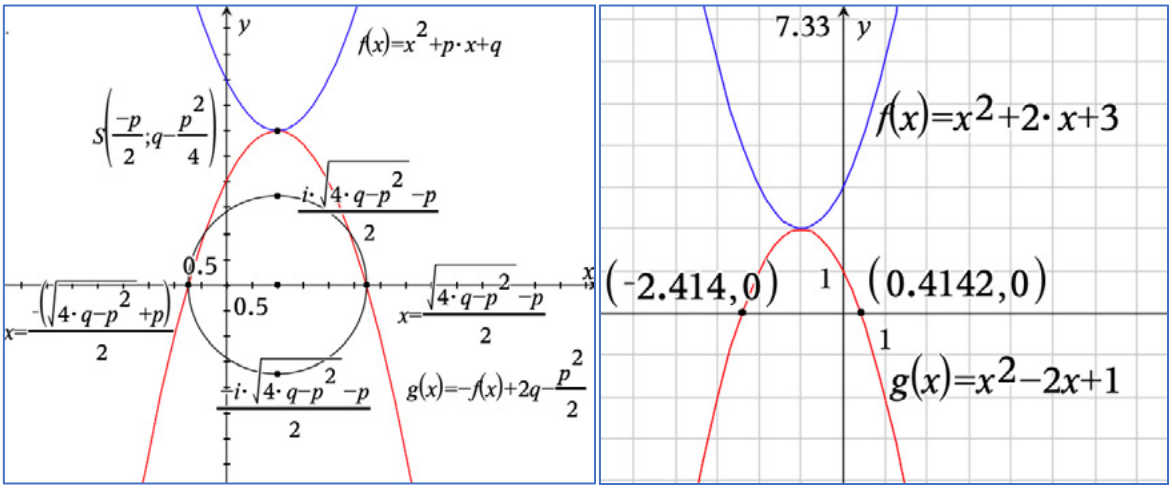
Gleichung	Grad n	Komplexe Lösungen	Mehrfach-lösungen
$x^2 - 2x + 3 = 0$			
$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 12x + 18 = 0$			
$(x+2)^3 \cdot (x^2 - 4) = 0$			
$x^4 + 1 = 0$			
$x^5 - x^2 = 0$			

Aufgabe 5
Von den beiden abgebildeten Graphen ganzrationaler Funktionen vom Typ
$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x^1 + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \neq 0$ und $a_k \in \mathbb{R}$
ist eine vom Grad 3 und die andere vom Grad 4. Die Schnittpunkte der Graphen mit der y-Achse liegen bei y = 2,5 bzw. y = –1,6. Beschreiben Sie, wie man die Gleichungen der Funktionen ermitteln kann und geben Sie diese Gleichungen an.



Aufgabe 6

Bereiten Sie anhand der Abbildung einen Schülervortrag zur Visualisierung von komplexen Nullstellen der quadratischen Funktion f vor. Überprüfen Sie das Verfahren am Beispiel der Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

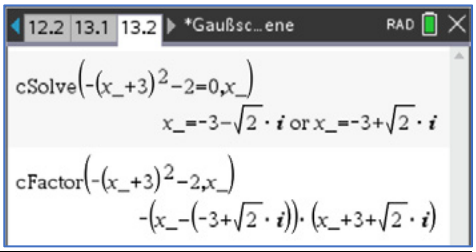


WB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 7:

Aufgabe 1
Individuell

Aufgabe 2
Erläuterungen:

cSolve ermittelt die komplexen Lösungen.
cFactor zerlegt den Term in komplexe Linearfaktoren.



Aufgabe 3

Funktion	Produkt von Linearfaktoren
$f(x) = x^2 - 2x - 1$	$f(x) = \left(x + \sqrt{2} - 1\right) \cdot \left(x - \sqrt{2} - 1\right)$
$f(x) = x^2 - 2x + 1$	$f(x) = (x - 1)^2$
$f(x) = x^2 - 2x + 4$	$f(x) = \left(x - 1 + i \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \left(x - 1 - i \cdot \sqrt{3}\right)$
$f(x) = x^3 - 2x + 4$	$f(x) = (x + 2) \cdot (x - 1 + i) \cdot (x - 1 - i)$
$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$	$f(x) = (x - 1)^2 \cdot (x - i) \cdot (x + i)$

Beobachtungsergebnisse: Anzahl der Linearfaktoren in Abhängigkeit vom höchsten Exponenten im Funktionsterm: Anzahl stimmt überein.
Anzahl und Form komplexer Linearfaktoren: Anzahl ist immer geradzahlig und zu einer komplexen Zahl taucht immer die konjugiert komplexe Zahl auf.

Aufgabe 4

Gleichung	Grad n	Komplexe Lösungen	Mehrfach-lösungen
$x^2 - 2x + 3 = 0$	$n = 2$	$z_1 = 1 - \sqrt{2}i$; $z_2 = 1 + \sqrt{2}i$	keine
$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 12x + 18 = 0$	$n = 4$	$z_1 = -\sqrt{2}i$; $z_2 = \sqrt{2}i$	Doppellösung x = 3
$(x + 2)^3 \cdot (x^2 - 4) = 0$	$n = 5$	keine	Dreifache Lösung x = –3
$x^4 + 1 = 0$	$n = 4$	$z_1 \approx 0{,}7 + 0{,}7i$; $z_2 \approx 0{,}7 - 0{,}7i$ $z_3 \approx -0{,}7 + 0{,}7i$; $z_4 \approx -0{,}9 - 0{,}7i$	keine
$x^5 - x^2 = 0$	$n = 5$	$z_1 \approx -0{,}5 - 0{,}9i$; $z_2 \approx 0{,}5 + 0{,}9i$	Doppellösung x = 0

Aufgabe 5

Der Graph berührt die x-Achse in der Nullstelle, wenn diese eine doppelte Nullstelle ist. Der Graph von g hat zwei doppelte Nullstellen bei x = –5 und x = –1, also gilt:

$g(x) = a \cdot (x+5)^2 \cdot (x+1)^2$. Der Graph von g schneidet die y-Achse bei y = 2,5, also gilt: $2{,}5 = a \cdot (0+5)^2 \cdot (0+1)^2 \Longrightarrow a = 0{,}1$.

$g(x) = 0{,}1 \cdot (x+5)^2 \cdot (x+1)^2$

Der Graph von f hat eine doppelte Nullstelle bei x = 4 und eine einfache Nullstelle bei x = 1, also gilt $f(x) = a \cdot (x-4)^2 \cdot (x-1)$. Der Graph von f schneidet die y-Achse bei y = –1,6, also gilt:

$-1{,}6 = a \cdot (0-4)^2 \cdot (0-1) \Longrightarrow a = 0{,}1$.

$f(x) = 0{,}1 \cdot (x-4)^2 \cdot (x-1)$

Aufgabe 6

Möglicher Lösungsweg:

1. Zeichnen Sie f(x).
2. Geben Sie f in der Scheitelpunktsform an und bestimmen Sie den Scheitelpunkt S des Graphen von f.
3. Spiegeln Sie f am Scheitelpunkt S (Hinweise: Dies geht mit dem TI-Nspire CAS nicht geometrisch, daher muss man die Gleichung der gespiegelten Funktion g bestimmen. Es gilt: f(x) = $(x – d)^2$ + e, dann erhält man g(x) = –f(x) + 2e.
4. Bestimmen Sie die Nullstellen von g und den Mittelpunkt dieser Nullstellen. Der x-Wert des Mittelpunktes entspricht dem Realteil der Lösung und der Abstand des Mittelpunktes zu den Nullstellen ergibt den Imaginärteil 5. Zur grafischen Darstellung der Lösung in der komplexen Zahlenebene müssen die Schnittpunkte mit der x-Achse um 90° gedreht werden.
6. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der rechnerischen Lösung.

$\mathbf{f}(x) \blacktriangleright x^2+2\cdot x+3$

$\mathbf{g}(x) \blacktriangleright -x^2-2\cdot x+1$

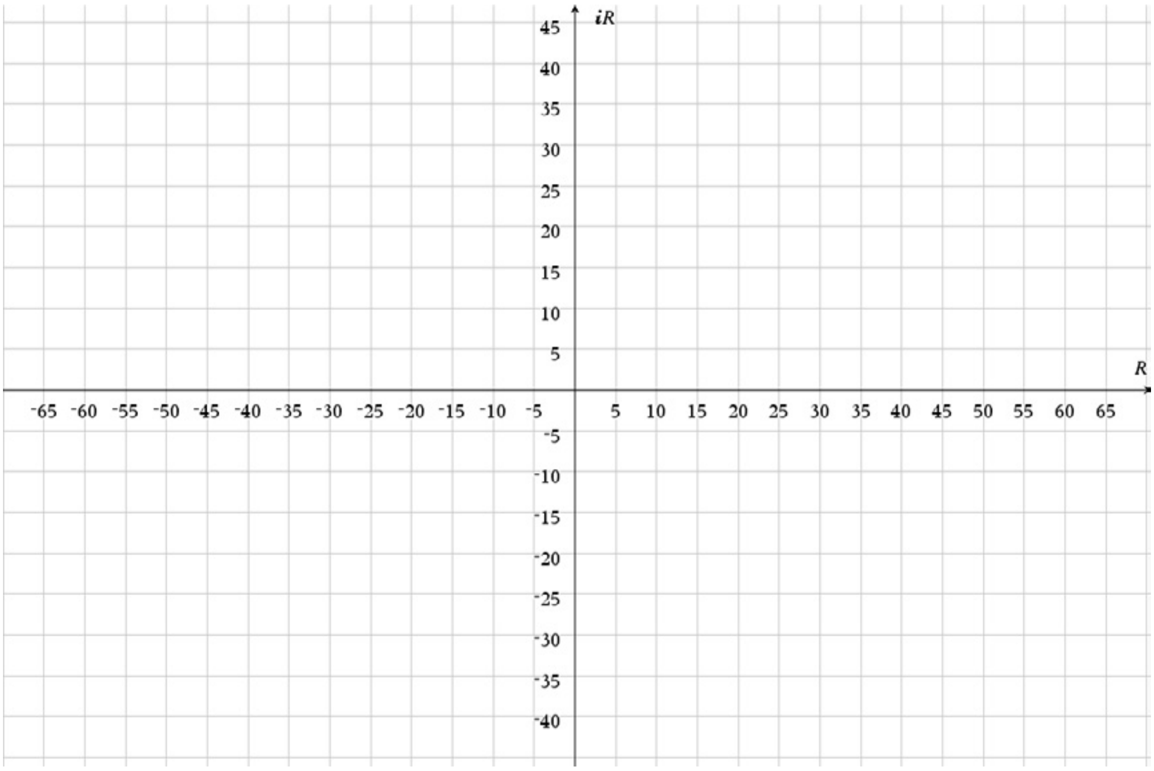
$\text{solve}(\mathbf{g}(x)=0,x) \blacktriangleright x=-(\sqrt{2}+1) \text{ or } x=\sqrt{2}-1$

$\text{cSolve}(\mathbf{f}(x)=0,x) \blacktriangleright x=-1-\sqrt{2}\cdot i \text{ or } x=-1+\sqrt{2}\cdot i$

Arbeitsblatt 8: Die logarithmische Spirale

In der Natur und im Alltag kommen viele Spiralformen vor.
Eine besondere Spiralform ist die logarithmische Spirale, wie sie z. B. auf diesem Ammoniten[4] zu sehen ist.
Logarithmische Spiralen lassen sich auch durch komplexe Zahlen erzeugen. Diesem Phänomen werden wir hier nachgehen.

Aufgabe 1
Gegeben ist die komplexe Zahl z = 1 + i. Berechnen Sie z^n für $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq n \leq 8$. Stellen Sie diese komplexen Zahlen als Punkte in der Gaußschen Zahlenebene dar. Verbinden Sie die Punkte durch Strecken.



Das erhaltene Bild ist eine Annäherung an eine logarithmische Spirale.
Eine vollständige logarithmische Spirale erhält man, wenn man von diskreten Exponenten 1, 2, 3, …, n zu kontinuierlichen Exponenten t übergeht, also statt
z^1, z^2,… Potenzen z^t mit $t \in \mathbb{R}$ betrachtet.

Aufgabe 2
Verwenden Sie nun den TI-Nspire CAS, um Näherungen für logarithmische Spiralen zu erhalten.

Öffnen Sie die Anwendung *List&Spreadsheet* und bereiten Sie die Tabellenkalkulation vor, wie im Folgenden angegeben.

---

[4] Foto: Autor

		re	im
	A	B	C
1	$= 1 - i$	$= real(A1)$	$= imag(A1)$
2	$= A1 \cdot \$A\$1$	$= real(A2)$	$= imag(A2)$
3			

Die Anweisungen aus der Zeile 2 werden durch *Menü-Daten-Füllen* als relative Zellbezüge nach unten kopiert.
Speichern Sie die Spalte B unter dem Namen ***re*** und die Spalte C unter dem Namen ***im***.
Stellen Sie diese beiden Listen als Streudiagramm dar und verbinden Sie die Punkte über die Anwendung *Attribute* durch Strecken.

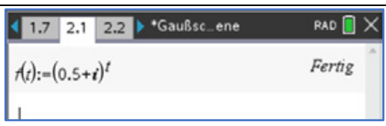
Aufgabe 3
Um die Schrittweite zu verfeinern, kann man folgendermaßen vorgehen.

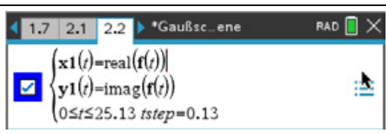
Öffnen Sie ein neues *Problem*.

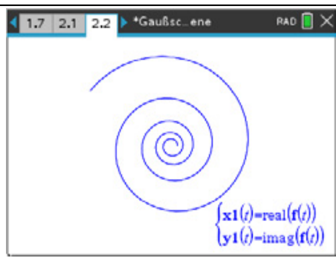
			re	im
	A	B	C	D
1	0.1	$= (1 - i)^{A1}$	$= real(B1)$	$= imag(B1)$
2	$= A1 \cdot \$A\$1$	$= (1 - i)^{A2}$	$= real(B2)$	$= imag(B2)$
3				

Die Anweisungen aus der Zeile 2 werden durch *Menü-Daten-Füllen* als relative Zellbezüge nach unten kopiert.
Speichern Sie die Spalte C unter dem Namen ***re*** und die Spalte D unter dem Namen ***im***.
Stellen Sie diese beiden Listen als Streudiagramm dar und verbinden Sie die Punkte über die Anwendung *Attribute* durch Strecken.

Aufgabe 4
Eine kontinuierliche Darstellung einer logarithmischen Spirale gelingt am einfachsten über eine Parameterdarstellung. Orientieren Sie sich an den Screenshots und vollziehen Sie die Darstellung nach.







Aufgabe 5
Probieren Sie mit anderen komplexen Zahlen und anderen Schrittweiten die Vorgehensweise aus Aufgabe 4.

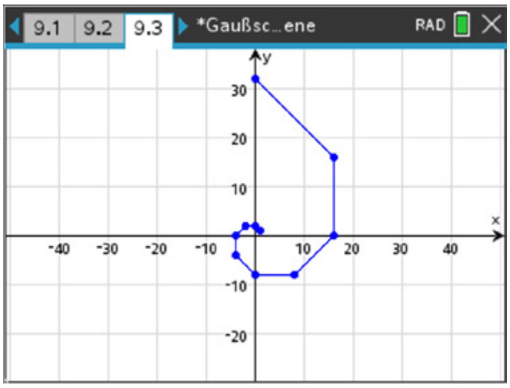
Aufgabe 6

Definition: Es sei z eine komplexe Zahl mit $|z| \neq 1$. Die durch die Gleichung $w(t) = z^t$ mit $t \in \mathbb{R}$ erzeugte Kurve heißt **logarithmische Spirale**.

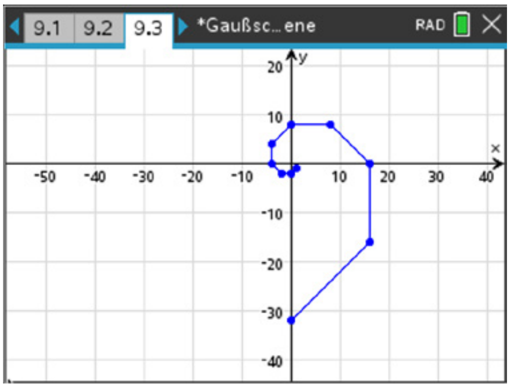
Schreiben Sie ein Programm, mit welchem sich die diskreten Werte einer logarithmischen Spirale darstellen lassen.

WB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 8:

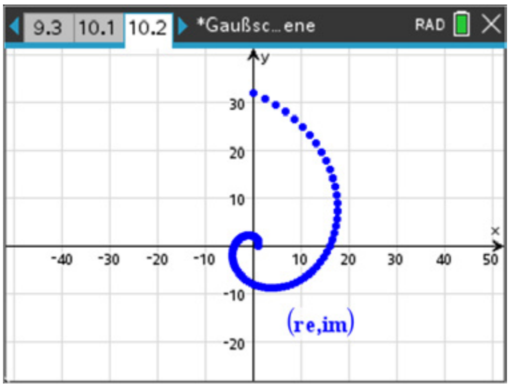
Aufgabe 1



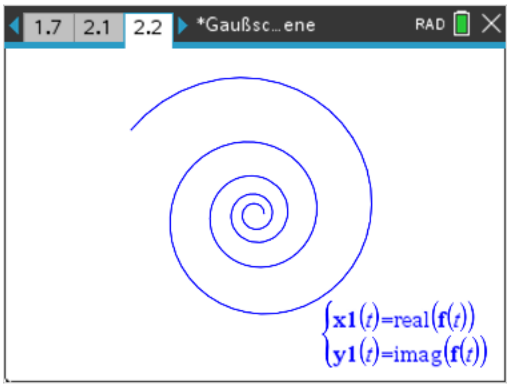
Aufgabe 2



Aufgabe 3



Aufgabe 4



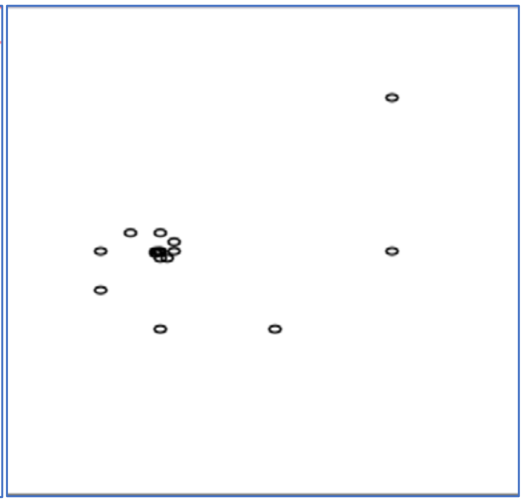
Aufgabe 5

Individuelle Lösungen

Aufgabe 6

Ein möglicher Quellcode könnte so aussehen:

```
loga
Define loga(xmin,xmax,ymin,ymax)=
Prgm
z:=1+i
zneu:=1
k:=0
SetWindow xmin,xmax,ymin,ymax
While k<20
  k:=k+1
  zneu:=zneu· z
  DrawCircle 0.05· real(zneu),0.05· imag(zneu),0.3
EndWhile
EndPrgm
```



Hinweise: Das Programm läuft nur auf dem Handheld bzw. im Handheldmodus.
Ein möglicher Programmaufruf ist *loga(-20,20,-20,20)*.
Zum Zeichnen der einzelnen Punkte verwendet man z. B. den Befehl *DrawCircle(x, y, r)*, der an die Bildschirmposition (x, y) einen Kreis mit dem Radius r zeichnet.

Wahlbereich 2: Logistisches Wachstum

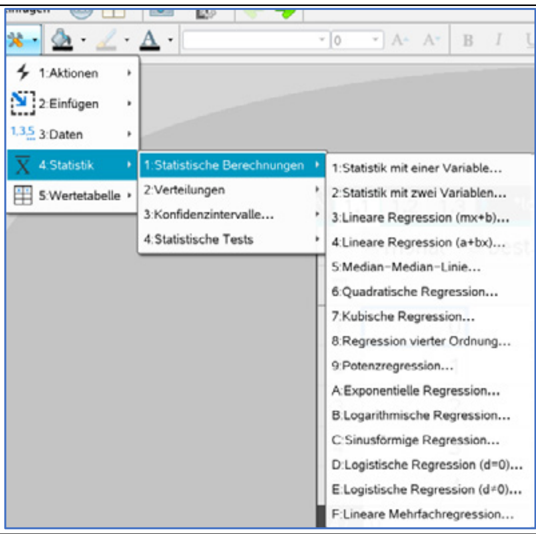
Wahlbereich 2: Logistisches Wachstum	
Kennen des Modells des logistischen Wachstums - grafische Veranschaulichung von Messdaten - analytische Beschreibung des Modells in expliziter oder rekursiver Form	Ausbreitung eines Gerüchtes, Wachstum von Pflanzen → LB 1
Kennen von Grenzen und Einsatzmöglichkeiten des Modells	Abweichungen bei Modellierungen biologischer Prozesse von der Realität

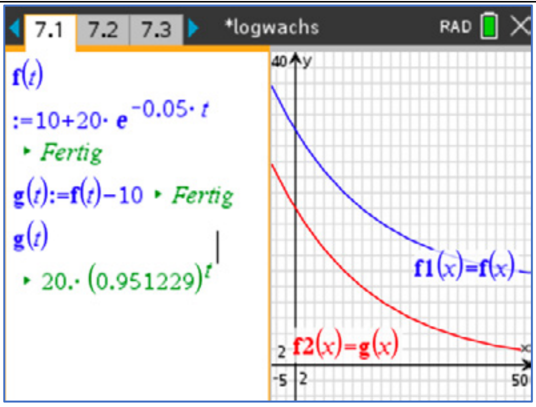
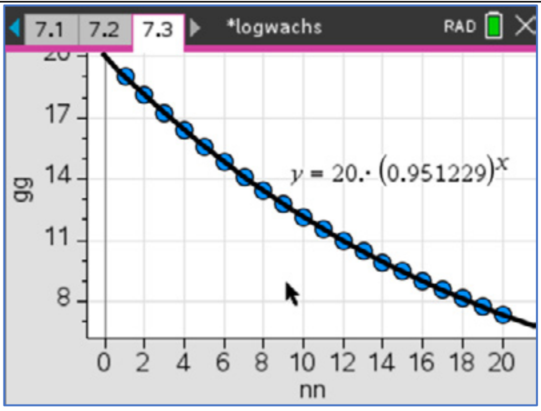
Hinweise für Lehrkräfte:

Neben den bereits behandelten Wachstumsmodellen (lineares, exponentielles und begrenztes Wachstum) existieren weitere Modelle, die auf viele Wachstumsvorgänge, die wir in der Natur treffen, besser anwendbar sind. Der belgische Mathematiker Verhulst entwickelte das Modell des logistischen Wachstums aus den Bevölkerungsdaten der USA in den Jahren 1790 bis 1840. Charakteristisch für dieses Modell ist, dass zwar ähnlich wie bei begrenztem Wachstum eine Grenze des Wachstums existiert, aber im Gegensatz zum begrenzten Wachstum mit oberer Grenze die Wachstumsgeschwindigkeit nicht stetig abnimmt, sondern zunächst bis zu einem Wendepunkt zunimmt und dann erst sinkt. Da in Klassenstufe 10 noch nicht mit Differenzialgleichungen gearbeitet werden kann, muss man sich bei der Beschreibung des logistischen Wachstums entweder auf rekursive Modelle (Differenzengleichungen) bzw. Regression beschränken (Arbeitsblatt 2) oder die explizite Formel wird mitgeteilt und danach untersucht bzw. verwendet (Arbeitsblatt 3). Zunächst werden noch einmal im Arbeitsblatt 1 die behandelten Wachstumsmodelle kurz betrachtet und auch dort rekursive Modelle genutzt.

Für die Arbeit mit Differenzengleichungen wird die Tabellenkalkulation eingesetzt und bei Verwendung der Regression werden die vorhandenen Regressionsmodelle des TI-Nspire CAS genutzt.

Die statistischen Berechnungen sind in ***Lists & Spreadsheet*** und in ***Data & Statistics*** sowie im ***Calculator*** und in ***Notes*** verfügbar.
Es stehen Berechnungsmöglichkeiten für lineares, exponentielles und logistisches Wachstum zur Verfügung.



<table>
<tr>
<td>Bei begrenztem Wachstum muss man die gegebene Funktion (die gegebenen Daten) so verschieben, dass eine „reine“ Exponentialfunktion entsteht. Im dargestellten Fall ist 10 die untere Grenze von f. Um diesen Wert muss f somit nach unten verschoben werden.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Verschiebt man also die gegebenen Daten entlang der y-Achse um 10 Einheiten nach unten, kann man auf diese neuen Daten die exponentielle Regression anwenden. Diese Verschiebung erfolgt z. B. in der Tabellenkalkulation.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Die Schülerinnen sollten erkennen, dass es sich in allen Fällen um Modelle handelt, die ggf. nur in bestimmten Grenzen dem gegebenen Sachverhalt entsprechen. Ein mögliches Vorgehen beim Modellieren gegebener Daten könnte sein:

1. Daten grafisch darstellen, um einen ersten Überblick zu bekommen.
2. Sachargumente finden, welches Wachstumsmodell zutreffen könnte.
3. Mittels Differenzengleichungen, Regression oder bekannter Funktionsgleichungen eine Modellfunktion ermitteln.
4. Bewertung des Modells anhand der Ausgangsdaten und der Zielstellung der Modellierung, z. B. Prognose über den weiteren Verlauf.

Arbeitsblatt 1: Wiederholung zu bekannten Wachstumsmodellen

Sonnenblumen, Fichten und viele andere Pflanzen wachsen zunächst mit zunehmender, dann fast konstanter und schließlich mit abnehmender Wachstumsgeschwindigkeit. Das Wachstum lässt sich oft näherungsweise mit einer Formel beschreiben, die sich logistisches Wachstum nennt.
In den folgenden Aufgaben erinnern wir zunächst an andere bereits bekannte Wachstumsmodelle und kommen dann zum logistischen Wachstum, das gewissermaßen als Zusammensetzung dieser einfacheren Wachstumsmodelle aufgefasst werden kann.

Aufgabe 1 Lineares Wachstum:

Die Änderungsrate $\frac{\Delta y}{\Delta t} = k$ ist konstant.
Rekursive Darstellung: Neuer Bestand = alter Bestand + konstanter Zuwachs
b(t+1) = b(t) + k und b(0) = a
Explizite Darstellung: $f(t) = k \cdot t + a$

Diese Wachstumsart lässt sich z. B. so charakterisieren:

In einem Waldstück stehen schon 100 Douglasien. Jeden Monat werden 25 neue gepflanzt.

a) Geben Sie die Änderungsrate $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ an mit
Δy: Anzahl der in der Zeiteinheit Δt neu hinzukommenden Bäume,
Δt: Zeiteinheit in Monaten.

Erstellen Sie dazu die rekursive Darstellung b(t+1) = ..., die für den Zeitpunkt t + 1 in Abhängigkeit vom Bestand zum Zeitpunkt t den neuen Bestand angibt. Beachten Sie, dass man den Bestand b(0) zu Beginn berücksichtigen muss.

b) Ermitteln Sie mit einer Tabellenkalkulation, wie viele Douglasien nach 12 Monaten vorhanden sind.
c) Stellen Sie die Funktion b(t) auch in expliziter Form dar.
d) Überprüfen Sie mit der Regressionsfunktion des CAS die Lösung aus c).

Aufgabe 2 Exponentielles Wachstum:
Diese Wachstumsart lässt sich z. B. so charakterisieren:

Die Änderungsrate $\frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y$ ist proportional zum aktuellen Bestand.
In Worten: Neuer Bestand = alter Bestand + Zuwachs. Der Zuwachs ist proportional zum alten Bestand.
Rekursive Darstellung: b(t+1) = b(t) + k(b(t)), b(0) = a
Explizite Darstellung: $f(t) = b \cdot a^x$ bzw. $f(t) = b \cdot e^{c \cdot x}$

Eine Glasscheibe vom Typ A absorbiert 10 % des einfallenden Lichtes.
a) Geben Sie sowohl die rekursive als auch die explizite Funktionsgleichung i(n) an, die beschreibt, welche Lichtintensität man noch hat, wenn n Scheiben vorhanden sind.
b) Ermitteln Sie rechnerisch und mit einer Tabelle, wie viele Scheiben vom Typ A benötigt werden, um nur noch höchstens 50 % Lichteinfall zu haben.
c) Überprüfen Sie mittels Regression, ob die in a) ermittelte explizite Funktionsgleichung richtig ist.
d) Zwölf Glasscheiben vom Typ B absorbieren 60 % des einfallenden Lichtes. Ermitteln Sie, wie viel Licht eine Glasplatte vom Typ B absorbiert.

Aufgabe 3 Beschränktes Wachstum:
Diese Wachstumsart lässt sich z. B. so charakterisieren:

Die Änderungsrate $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ = k(G – y) ist proportional (k: Proportionalitätsfaktor) zur Differenz aus Grenze (G) und dem aktuellen Bestand.
Rekursive Darstellung b(t + 1) = b(t) + k•(G - b(t)) und b(0) = A
Explizite Darstellung: $f(t) = (A - G) \cdot e^{-c \cdot x} + G$
(A: Anfangswert, G: Grenze, k, c: Proportionalitätsfaktoren, e: Eulersche Zahl)

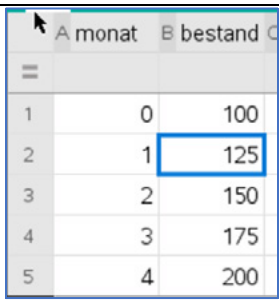
In einen Raum mit der Temperatur von 20 °C wird eine Tasse mit kochendem Wasser gestellt. Der Proportionalitätsfaktor k = 0,1 gilt für einen Zeittakt von einer Minute.
a) Nutzen Sie die Tabellenkalkulation, um den Temperaturverlauf zu ermitteln. Geben Sie zunächst die rekursive Funktionsgleichung an.
b) Stellen Sie den Temperaturverlauf grafisch dar.
c) Zeigen Sie, dass die explizite Darstellung für beschränktes Wachstum den Temperaturverlauf entsprechend beschreibt.
d) Versuchen Sie mittels Regression eine ähnliche Gleichung zu finden.

WB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 1:

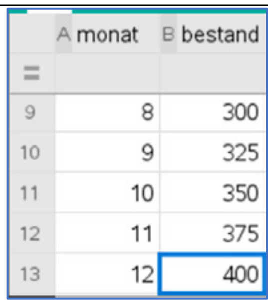
Aufgabe 1

a) $\frac{\Delta y}{\Delta t} = 25$, b(t+1) = b(t) + 25 mit b(0) = 100

b) Nach 12 Monaten sind 136 Douglasien vorhanden. Man benötigt zur Lösung nur den relativen Zellbezug b(t + 1) = b(t) + 25.



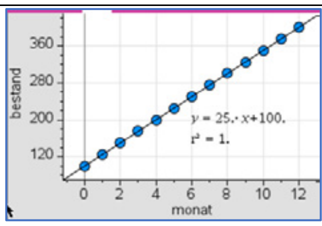
	A monat	B bestand
=		
1	0	100
2	1	125
3	2	150
4	3	175
5	4	200



	A monat	B bestand
=		
9	8	300
10	9	325
11	10	350
12	11	375
13	12	400

c) Explizite Form
b(t) = 25t +100

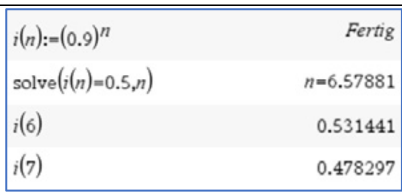
d) Regression



Aufgabe 2

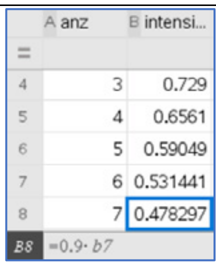
a) Explizit: i(n) =1 · $0{,}9^n$ rekursiv: $i(n+1) = 0{,}9 \cdot i(n)$ und i(0) = 1

b) Ansatz $0{,}9^n$ =0.5
Die Rechnung liefert n = 7, damit man noch höchstens 50 % Lichteinfall hat.



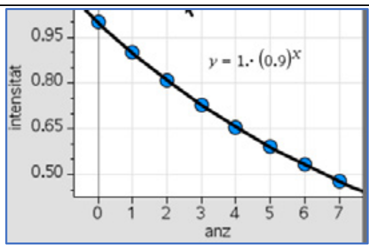
$i(n):=(0.9)^n$	*Fertig*
solve$(i(n)=0.5,n)$	$n=6.57881$
$i(6)$	0.531441
$i(7)$	0.478297

Tabellarische Lösung



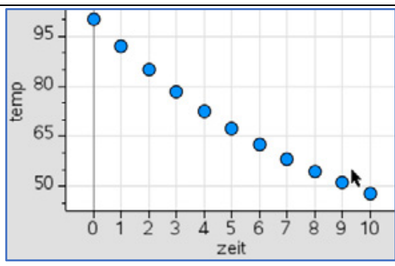
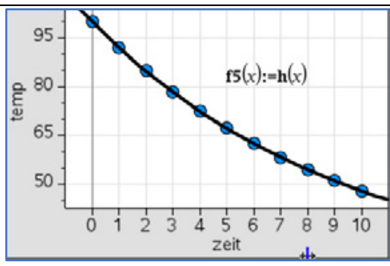
	A anz	B intensi...
=		
4	3	0.729
5	4	0.6561
6	5	0.59049
7	6	0.531441
8	7	0.478297
B8	=0.9· b7	

c) Die Regression liefert das gleiche Resultat wie in a).



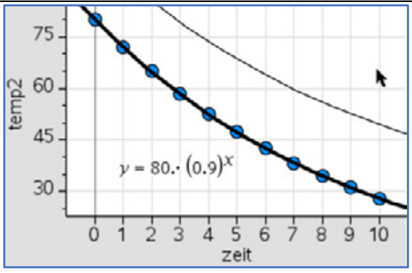
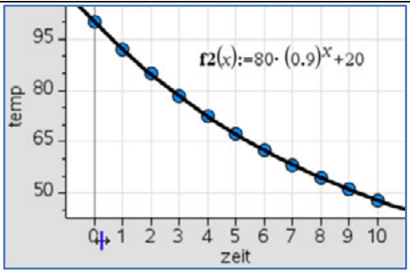
<table>
<tr>
<td>d) Der Wachstumsfaktor x ist unbekannt. Mit dem rechtsstehenden Ansatz findet man als Lösung x≈ $0{,}926$, also gilt für die Scheibe B:
$b(n) = 1 \cdot 0{,}926^n$ bzw.
b(n+1) = 0,926·b(n) und b(0) = 1.
Eine Glasplatte vom Typ B absorbiert ca. 7,4 % des einfallenden Lichtes.</td>
<td>$b(n):=x^n$ — Fertig
solve$(b(12)=0.4,x)|x>0$ — $x=0.926485$</td>
</tr>
</table>

Aufgabe 3

<table>
<tr>
<td>a) b(t+1) = b(t) +0.1 (20 – b(t) und
b(0) = 100</td>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>A zeit</th><th>B temp</th></tr>
<tr><td>=</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>100</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>92.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>84.8</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>78.32</td></tr>
<tr><td>5</td><td>4</td><td>72.488</td></tr>
</table>
B2 $=b1+0.1\cdot(20-b1)$
</td>
</tr>
<tr>
<td>b)</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>c) Überprüfung, ob die allgemeine Gleichung mit dem rekursiven Modell übereinstimmt. Hierzu muss zunächst der neue Proportionalitätsfaktor k für die Funktion f bestimmt werden. Dazu verwendet man z. B. den mit der rekursiven Berechnung gefundenen Temperaturwert nach einer Minute.</td>
<td>solve$(92=20+80\cdot e^{-k},k)$ — $k=\ln\left(\frac{10}{9}\right)$
solve$(92=20+80\cdot e^{-k},k)$ — $k=0.105361$
$h(x):=20+80\cdot e^{-\ln\left(\frac{10}{9}\right)\cdot x}$ — Fertig</td>
</tr>
<tr>
<td>Die grafische Darstellung der Funktion h liefert die Übereinstimmung mit dem rekursiven Modell.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>d) Da der TI-Nspire CAS keine Möglichkeit bietet, begrenztes Wachstum durch Regression zu bestimmen, muss man sich hier folgendermaßen helfen:</td><td></td></tr>
<tr><td>1. Der Temperaturverlauf wird so verschoben, dass er sich asymptotisch dem Wert 0 nähert, also um 20° nach unten.</td><td>

	A zeit	B temp	C temp2
=			=temp−20
1	0	100	80
2	1	92.	72.
3	2	84.8	64.8
4	3	78.32	58.32
5	4	72.488	52.488
C			

</td></tr>
<tr><td>2. Für diesen neuen Verlauf ermittelt man eine exponentielle Regression, welche nicht mit der Basis „e“ angegeben wird, sondern mit $y = 80 \cdot 0.9^x$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3. Verschiebt man nun diese gefundene Gleichung wieder um 20° nach oben, dann sieht man die Übereinstimmung.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Vergleicht man nun die beiden expliziten Darstellungen, so erkennt man die Übereinstimmung (indem man h umformt).</td><td>

$h(x):=20+80\cdot e^{-\ln\left(\frac{10}{9}\right)\cdot x}$ *Fertig*

$h(x)$ $\quad 80\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^x+20$

</td></tr>
</table>

Arbeitsblatt 2 Rekursive Beschreibung für logistisches Wachstum

Diese Wachstumsart lässt sich z. B. so charakterisieren:

Die Änderungsrate $\frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y \cdot (G - y)$ ist proportional zum Bestand und zur Differenz aus Grenze G und dem Bestand y.
Rekursive Darstellung: $b(n+1) = b(n) + k \cdot b(n) \cdot \left(G - b(n)\right)$ und b(0).
Eine mögliche Darstellung in expliziter Form ist $f(x) = \frac{G}{1+a \cdot e^{k \cdot x}}$.

Aufgabe 1
In einem Feriendorf, in dem sich 250 Kinder aufhalten, bricht eine Grippewelle aus. Die Zahl der Kranken nimmt von anfangs 10 pro Tag um den Proportionalitätsfaktor k = 0,002 zu.

a) Entwickeln Sie ein begründetes mathematisches Modell für die Ausbreitung der Grippewelle.
b) Nutzen Sie die Tabellenkalkulation, um den Vorgang grafisch darzustellen und geben Sie die rekursive Bildungsvorschrift an.
c) Ermitteln Sie, zwischen welchen Tagen der Anstieg der Krankenzahlen am größten ist.
d) Für den Proportionalitätsfaktor k muss gelten: k<1/G. Untersuchen Sie, was passiert, wenn diese Bedingung verletzt wird.

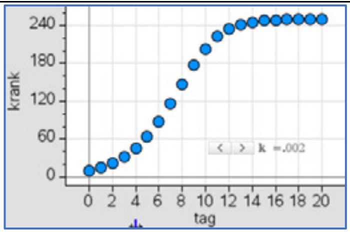
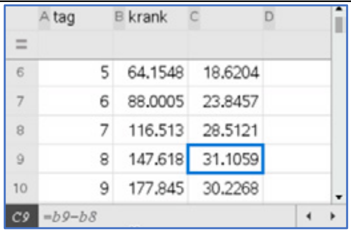
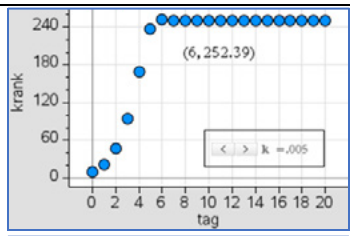
Aufgabe 2
Oma und Opa Blümel lieben ihren Garten und ganz besonders ihre Sonnenblumen. Jedes Jahr beteiligen sie sich an der Aktion „Rekorde im Garten" der lokalen Volkszeitung. Schon zweimal gab es den Preis für die längste Sonnenblume im Garten. Sehr genau vermisst und notiert Opa Blümel das Wachstum einer Sonnenblume auch in diesem Jahr.

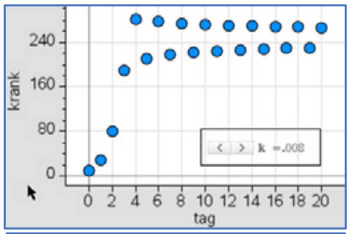
Zeit t (in Wochen)	0	2	4	6	8	10	12	16
Höhe h (in Metern)	0,1	0,2	0,5	0,9	2,1	3,3	4,2	4,3

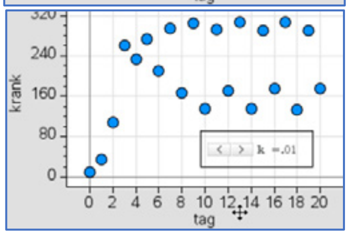
a) Übertragen Sie das Datenmaterial in die Tabellenkalkulation. Zeigen Sie, dass für die ersten 8 Wochen der Wachstumsprozess mit Hilfe des exponentiellen Wachstums annähernd beschrieben werden kann. Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung f(t) an.
Wie lang müsste die Pflanze nach 12 Wochen sein, wenn exponentielles Wachstum vorausgesetzt wird? Kommentieren Sie Ihr Ergebnis.
b) Nutzen Sie für den gesamten Wachstumsprozess nun die logistische Regression. Ermitteln Sie, wie hoch die Sonnenblume maximal werden kann. Beurteilen Sie die Wahl des neuen Modells.

WB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 2:

Aufgabe 1

<table>
<tr><td>a) Logistisches Wachstum stellt ein realistisches Modell für diesen Vorgang dar, weil zu Beginn der Anstieg der Krankenzahlen steigt und gegen Ende des Vorgangs nur noch wenig Gesunde da sind, die sich infizieren können.</td><td></td></tr>
<tr><td>b) Rekursive Bildungsvorschrift:
$b(n+1) = b(n) + k \cdot b(n) \cdot (250 - b(n))$
und b(0) = 10 und k = 0,002</td><td>
</td></tr>
<tr><td>c) Schon aus der Grafik kann man näherungsweise abschätzen, dass der stärkste Zuwachs zwischen dem 6. und dem 10. Tag erfolgen muss. Die Berechnung in der Tabelle in Spalte C zeigt, dass der Zuwachs vom 7. zum 8. Tag am größten ist.</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>A tag</th><th>B krank</th><th>C</th><th>D</th></tr>
<tr><td>6</td><td>5</td><td>64.1548</td><td>18.6204</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>6</td><td>88.0005</td><td>23.8457</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>7</td><td>116.513</td><td>28.5121</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>8</td><td>147.618</td><td>31.1059</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>9</td><td>177.845</td><td>30.2268</td><td></td></tr>
</table>
C9 =b9−b8</td></tr>
<tr><td>d) Es muss $k < \frac{1}{250}$ gelten, also
k < 0,004. Schon für k = 0,005 ist das Modell nicht mehr realistisch, da für den 6. Tag eine Krankenzahl von 252 angegeben wird.
Für größere k entwickelt sich ein chaotischer Zustand, so dass dieses Modell nicht mehr angewendet werden kann.</td><td>



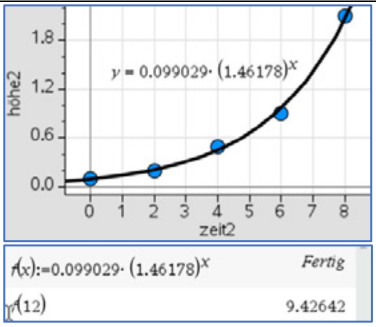

</td></tr>
</table>

Aufgabe 2

<table>
<tr>
<td>

a) Für die ersten 8 Wochen ergibt sich als Exponentialfunktion
$y = 0.099029 \cdot (1.46178)^x$
Nach diesem Modell würde die Sonnenblume nach 12 Wochen ca. 9,43 m hoch sein, was mit den Messwerten nicht übereinstimmt.

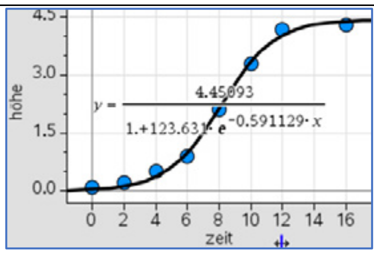
</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

b) Eine mögliche Regressionsgleichung (mit d = 0) ist rechts dargestellt.

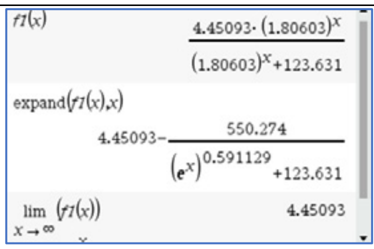
</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

Es ergibt sich eine maximale Höhe von ca. 4,45 m. Dieses Resultat scheint die Wahl des Modells zu bestätigen.
Hinweis: Es gibt mehrere Möglichkeiten der Darstellung der expliziten Form für die logistische Wachstumsgleichung.

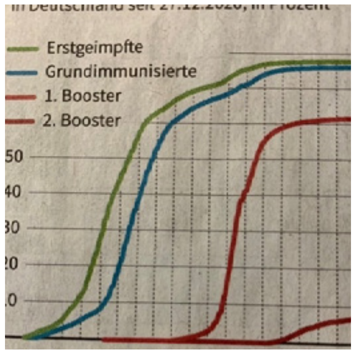
</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

Arbeitsblatt 3: Logistisches Wachstum

Das nebenstehende Bild[5] zeigt Graphen, die die Entwicklung von Coronaimpfungen in Deutschland seit dem 27.12.2020 bis August 2022 in Prozent wiedergeben. Es handelt sich um Wachstumsformen, die durch ein zunächst langsames Anwachsen des Bestandes über einen dann relativ starken, fast linearen Anstieg bis zu einem Auslaufen des Wachstums gegen eine Schranke S mit einer immer kleiner werdenden Wachstumsgeschwindigkeit gekennzeichnet sind. Solche Wachstumsformen werden in idealisierter Form dem logistischen Wachstum zugerechnet.



In einem vorhergehenden Arbeitsblatt wurde eine **rekursive Darstellung** für logistische Wachstumsformen betrachtet: $\boldsymbol{b(n+1) = b(n) + k \cdot b(n) \cdot \big(S - b(n)\big)}$ mit dem Startwert **b(0).**

Beispiel[6]: Eine Population von 1200 Grönlandwalen lebt in einem abgegrenzten Lebensraum im Nordpolarmeer. Da die Wale keine natürlichen Feinde haben und in ihrem Lebensraum ein reichhaltiges Nahrungsangebot vorfinden, werden sie sich zunächst annähernd exponentiell vermehren. Durch die Zunahme der Anzahl der Wale sinkt aber das Nahrungsangebot. Der Lebensraum bietet maximal Platz für 20 000 Tiere. Im ersten Jahr wird eine Zunahme um 8 % auf 1296 Tiere beobachtet.

$1296 = 1200 + k \cdot (20\,000 - 1200) \cdot 1200$ liefert $k = \frac{1}{235\,000} \approx 0{,}000004255$

Ein mathematisches Modell für eine **explizite Beschreibung** enthält der folgende Kasten. (Eine Herleitung ist in Klasse 10 nicht möglich. Wir begnügen uns deshalb mit einem Vergleich anhand des Walbeispiels.)

> Die Gleichung $f(t) = \frac{S}{1+c\cdot e^{-k\cdot S\cdot t}}$ mit $c = \frac{S}{f(0)} - 1$ und S > 0, c > 0, k > 0, $k < \frac{1}{S}$ beschreibt einen logistischen Wachstumsprozess eines Bestandes mit der Schranke S. Die Variable e in der Gleichung steht für die Eulersche Zahl.

Berechnet man nach dieser Festlegung das Wachstum der Anzahl der Wale, so ergibt sich:

$c = \frac{20000}{1200} - 1 = \frac{47}{3}$ und damit $1296 = \frac{20000}{1+\frac{47}{3}\cdot e^{-k\cdot 20000\cdot 1}} \Longrightarrow k \approx 4{,}1 \cdot 10^{-6}$

Wir vergleichen die rekursive Darstellung

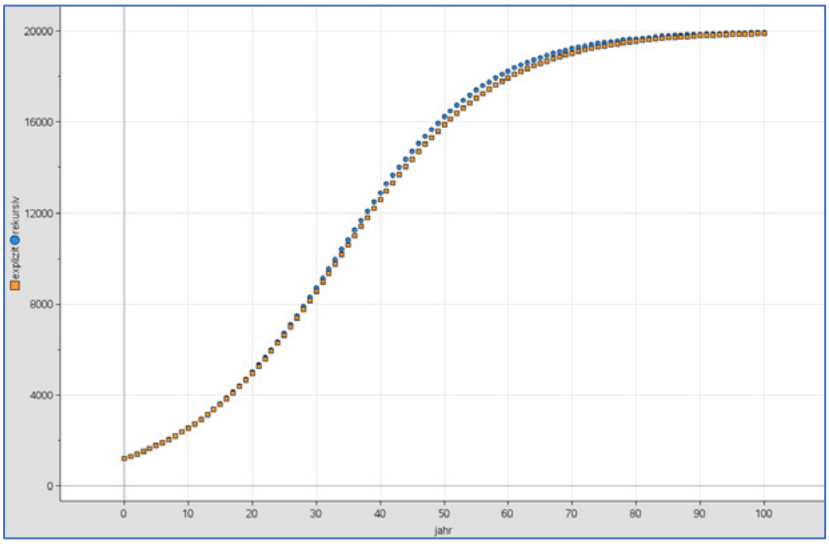
$\boldsymbol{b(n+1) = b(n) + \frac{1}{235000} \cdot b(n) \cdot \big(20000 - b(n)\big)}$ und $\boldsymbol{b(0) = 1200}$

mit der expliziten

[5] Foto: Autor, Quelle Zeitung „Freies Wort" vom 20./21.08.2022, Seite 32
[6] Nach Henrik Korsch, Gutenberg-Universität Mainz

$\boldsymbol{f(t)} = \frac{\mathbf{20000}}{\mathbf{1}+\frac{\mathbf{47}}{\mathbf{3}}\cdot \boldsymbol{e}^{-\mathbf{4{,}1}\cdot\mathbf{10}^{-\mathbf{6}}\cdot\mathbf{20000}\cdot\boldsymbol{t}}}$ anhand ihrer Graphen.

	A jahr	B rekursiv	C explizit	D
=	=seq(k	=seqgen(u(n−1)+1/235000*(2000(	=20000/(1+47/3*e^(-4.1*10^(-6)*2	
1	0	1200.	1200.	
2	1	1296.	1296.	
3	2	1399.	1399.	
4	3	1510.	1509.	
5	4	1629.	1628.	
6	5	1756.	1755.	
7	6	1892.	1891.	



Man erkennt eine gute Übereinstimmung, aber nicht völlige Identität der Ergebnisse. Das liegt daran, dass die rekursive Darstellung das Wachstum schrittweise, die explizite Darstellung aber stetig modelliert. Ebenfalls ohne exakten Nachweis sei hier mitgeteilt, dass für den Zeitpunkt tw der größten Wachstumsgeschwindigkeit gilt: tw=S/2. Erkennbar ist diese Eigenschaft am Graphen der Bestandsfunktion, der zu diesem Zeitpunkt seinen größten Anstieg hat.

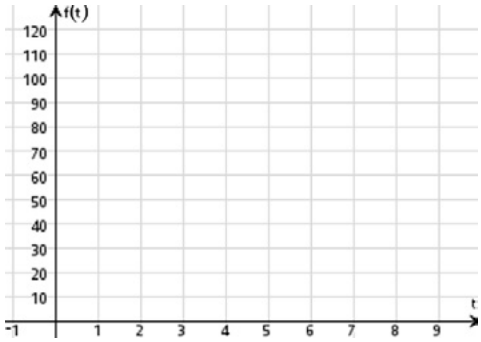
Aufgabe1
Betrachten Sie in der einleitenden Abbildung zur Entwicklung der Impfungen auf der vorigen Seite die am weitesten links liegende Kurve für die Entwicklung der Erstimpfungen. Geben Sie einen möglichen Wert an für

- die Schranke S,
- den Zeitpunkt t_w des stärksten Wachstums,
- die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit von April 2021 bis Juni 2021 und
- die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit von Dezember 2020 bis März 2021.

Aufgabe 2

Das Wachstum einer Bakterienkultur kann durch die Gleichung $f(t) = \frac{120}{1+4\cdot e^{-0,96\cdot t}}$ beschrieben werden. Dabei steht t für die Zeit in Stunden und f(t) für die Menge in Gramm.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f(t).



Bestimmen Sie

- den Bestand für t = 0,
- die Schranke S,
- den Zeitpunkt t_w,
- den Quotienten $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$.

Interpretieren Sie den Quotienten $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$ und t_w im Sachzusammenhang.

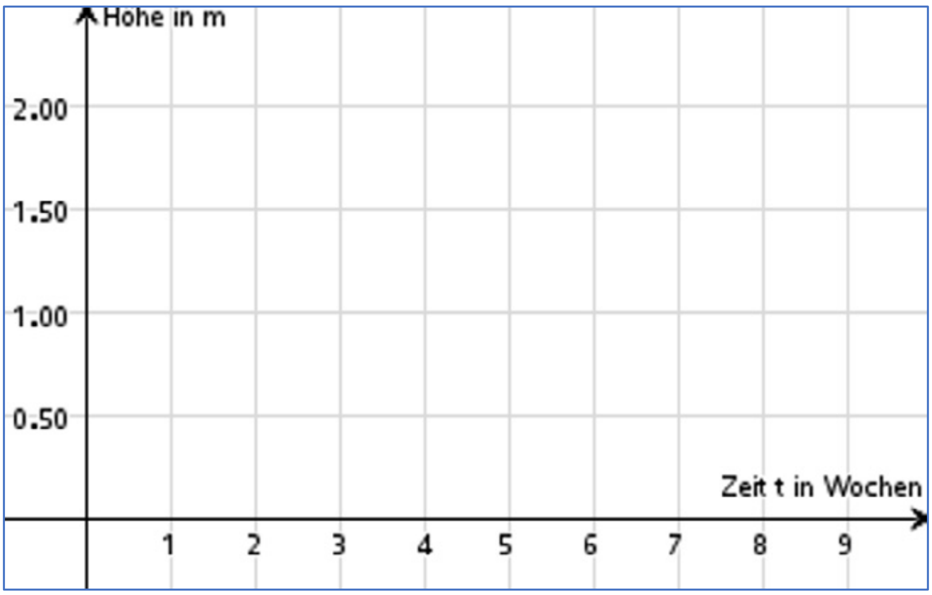
Aufgabe 3

Das Wachstum einer Sonnenblume kann durch die Gleichung $f(t) = \frac{12}{6+12\cdot e^{-0,5\cdot(t-3)}}$ beschrieben werden (t in Wochen, f(t) Höhe in Meter).

Ergänzen Sie die Tabelle.

Zeit t in Wochen	0		4		10
Höhe in m		1		1,5	

Zeichnen Sie den Graphen t → f(t).

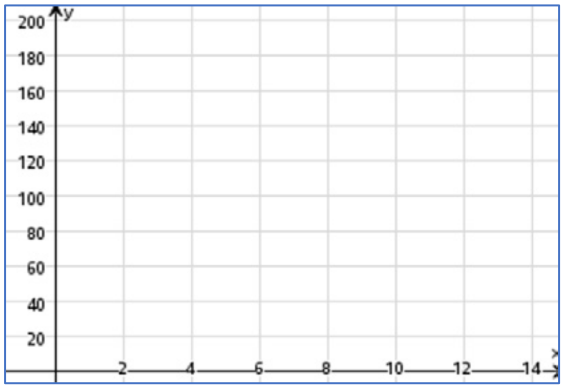


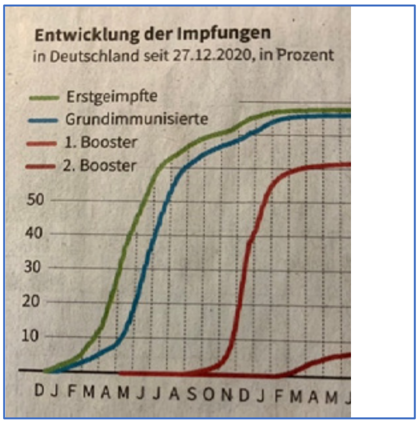
Schätzen Sie ab, wann die Wachstumsgeschwindigkeit am größten ist.

Aufgabe 4

Bei einem logistischen Wachstumsprozess hat ein Bestand nach drei Wochen einen Wert von 150 und zu diesem Zeitpunkt auch seine größte Wachstumsgeschwindigkeit. Der Bestand zum Beginn der Messung betrug 15. Bestimmen Sie die Bestandsfunktion.

Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion, die ein logistisches Wachstum mit Anfangswert 5, einer Sättigung von 100 und einer größten Wachstumsgeschwindigkeit bei t = 5 beschreibt.

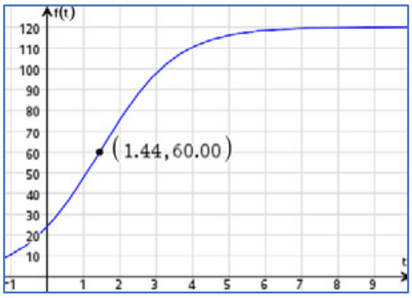




WB 2 Lösungen zu Arbeitsblatt 3:

Aufgabe1
die Schranke S: 80 %
den Zeitpunkt t_W: ca. Mai 2021
die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit[7]
von April 2021 bis Juni 2021: ca. 10,7 % pro Monat
die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit
von Dezember 2020 bis März 2021:
ca. 1,2 % pro Monat

Aufgabe 2
Zeichnung des Graphen der Funktion f(t).

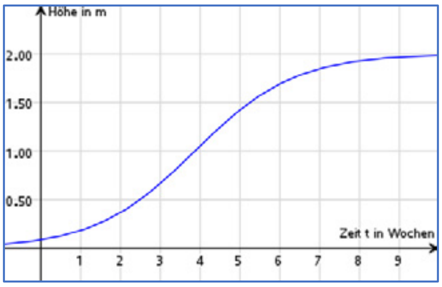


Bestimmung
des Bestandes für t = 0: f(0) = 24 g,
der Schranke S: S = 120 g,
des Zeitpunktes tw: $t_w \approx 1{,}44\ Stunden,$
des Quotienten: $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} \approx 25{,}3\ g\ pro\ Stunde,$
Interpretation des Quotienten $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$ und von t_w im Sachzusammenhang:
Durchschnittliche Wachstumsrate von der 1. bis zur 3. Stunde, Zeitpunkt des stärksten Wachstums.

Aufgabe 3

Zeit t in Wochen	0	**1,39**	4	**3,58**	10
Höhe in m	**0,67**	1	**1,57**	1,5	**1,97**

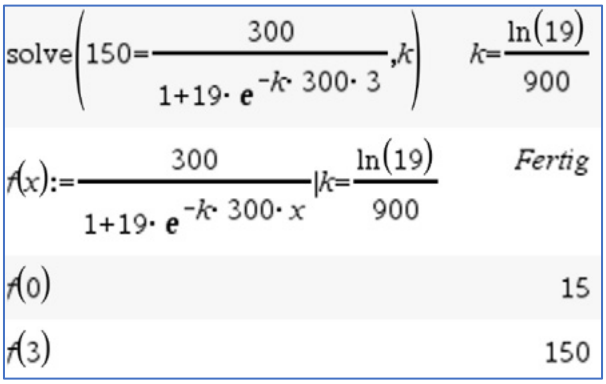
Zeichnung des Graphen t → f(t).



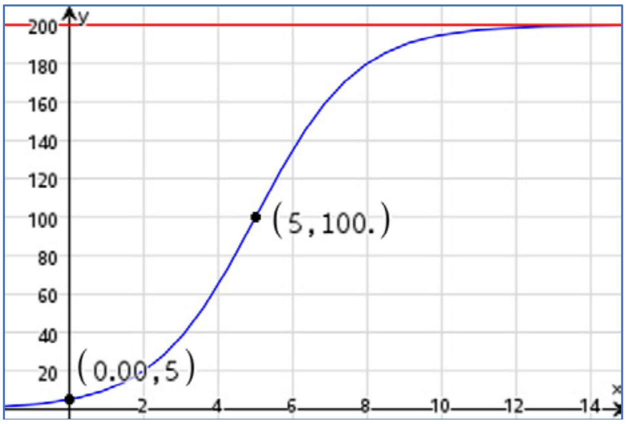
Abschätzung, wann die Wachstumsgeschwindigkeit am größten ist:
Ungefähr nach vier Wochen.

[7] **Geschätzt von Monatsanfang bis Monatsanfang**

Aufgabe 4
S = 300
Zum Zeitpunkt t_W der größten Wachstumsgeschwindigkeit beträgt der Bestand $y = \frac{S}{2}$.
Aus f(0) = 15 folgt wegen
$\mathrm{c} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{f(0)}} - 1 = \frac{300}{15} - 1 = 19.$
Mit $\mathrm{f(t)} = \frac{\mathrm{S}}{1+\mathrm{c}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{k}\cdot\mathrm{S}\cdot\mathrm{t}}}$ und f(3) = 150 ergibt sich $150 = \frac{300}{1+39\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{k}\cdot 300\cdot 3}}$ und daraus $k = \frac{ln(19)}{900}$.



Skizze des Graphen einer Funktion, die ein logistisches Wachstum mit Anfangswert 5, einer Sättigung von 100 und einer größten Wachstumsgeschwindigkeit bei t = 5 beschreibt.



Arbeitsblatt 4: Anwendungen zu den verschiedenen Wachstumsmodellen

Aufgabe 1
Ein Gegenstand wird aus dem Kühlschrank genommen, in dem 6° C vorliegen. Er erwärmt sich auf Raumtemperatur (20° C). Der Temperaturzuwachs beträgt 25 % pro Minute.

a) Entwickeln Sie ein begründetes mathematisches Modell für den Erwärmungsvorgang.
b) Nutzen Sie die Tabellenkalkulation, um den Vorgang grafisch darzustellen und geben Sie die rekursive Bildungsvorschrift an.
c) Geben Sie die durchschnittliche Temperaturänderung für die Zeiträume 0. bis 5. Minute, 5. bis 10. Minute und 10. bis 15. Minute an.

Aufgabe 2[8]
In einem Teich wurden 500 Forellen ausgesetzt. Man kann aus Erfahrung davon ausgehen, dass sich die Forellenzahl ohne weitere Einflüsse vermehrt. Es wird geschätzt, dass sich im Teich maximal 2000 Forellen aufhalten können. Nach einem Jahr wurde die Anzahl der Forellen im Teich auf 700 geschätzt.

a) Entwickeln Sie ein passendes rekursives Modell, welches den Sachverhalt beschreibt und geben Sie die rekursive Bildungsvorschrift an. Bestimmen Sie zunächst den Proportionalitätsfaktor k.
b) Wann ist demnach mit mindestens 1500 Forellen zu rechnen?
c) Vergleichen Sie die rekursive Bildungsvorschrift mit der expliziten.
d) Entwickeln Sie einen Vorschlag, wie viele Forellen pro Jahr gefangen werden sollten, damit der Bestand nicht schrumpft.

Aufgabe 3
Informieren Sie sich im Internet über den Zusammenhang der logistischen Differenzengleichung zu sogenannten Feigenbaumdiagrammen.

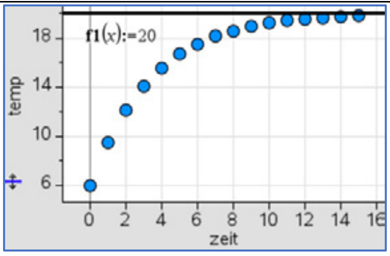
[8] Idee nach Helmut Heugl „Mathematikunterricht mit Technologie“, S. 86

WB 1 Lösungen zu Arbeitsblatt 3:

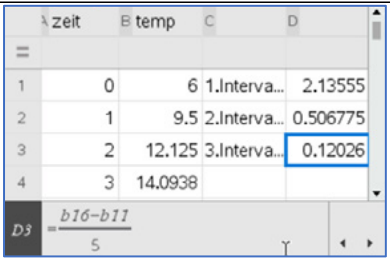
Aufgabe 1

a) Begrenztes Wachstum stellt ein realistisches Modell für den Erwärmungsvorgang dar.

b) t(n+1) = t(n) + 0,25(20-t(n)), t(0) = 6

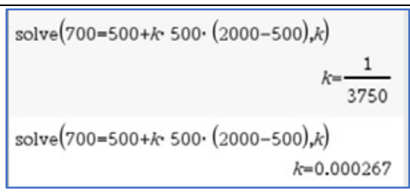


c) In der Tabellenkalkulation lassen sich die durchschnittlichen Temperaturänderungen leicht berechnen. Wie aus der Grafik ersichtlich ist, werden diese kleiner.



Aufgabe 2

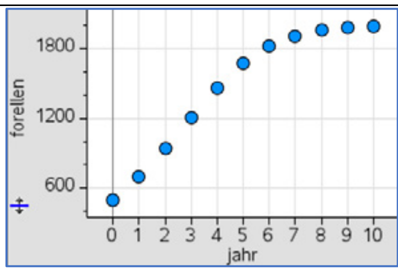
a) Man kann von logistischem Wachstum ausgehen und mit den gegebenen Werten den Proportionalitätsfaktor berechnen.
Man erhält $k = \frac{1}{3750}$.



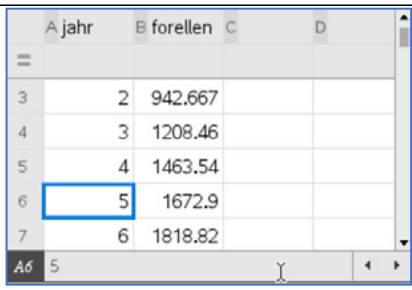
Damit erhält man die rekursive Bildungsvorschrift:

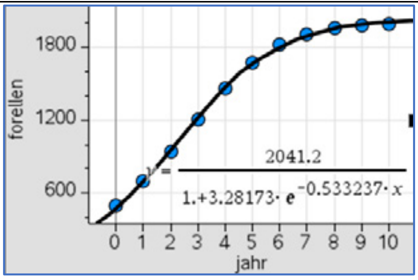
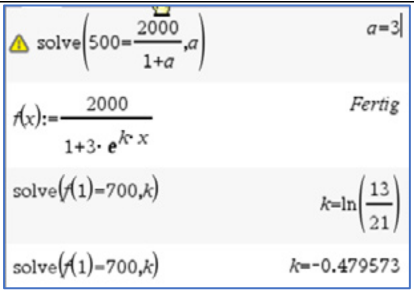
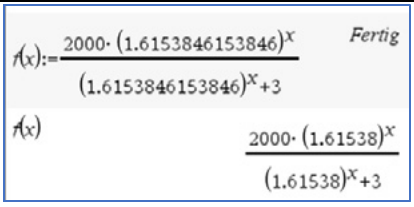
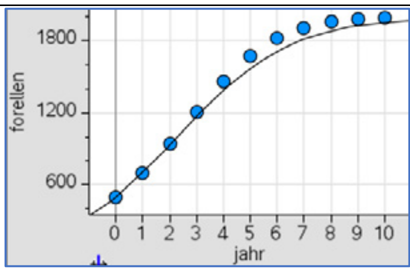
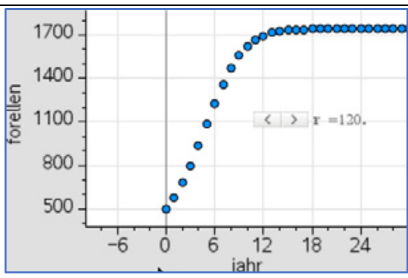
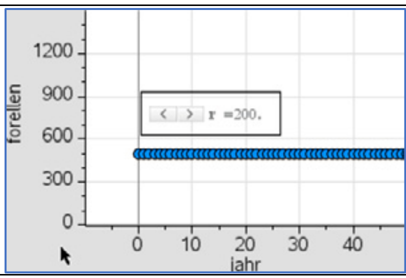
$$b(n+1) = b(n) + \frac{1}{3750} \cdot b(n) \cdot (2000 - b(n))$$

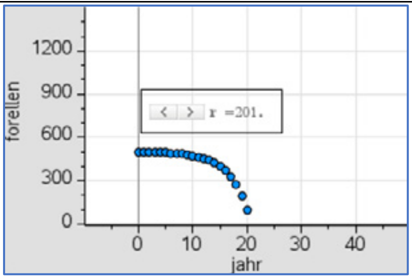
b(0) = 500



b) Nach 5 Jahren kann man mindestens 1500 Forellen erwarten.

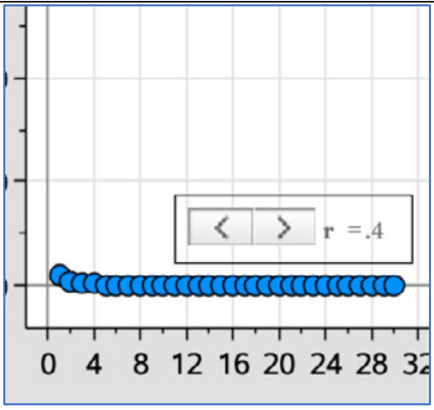
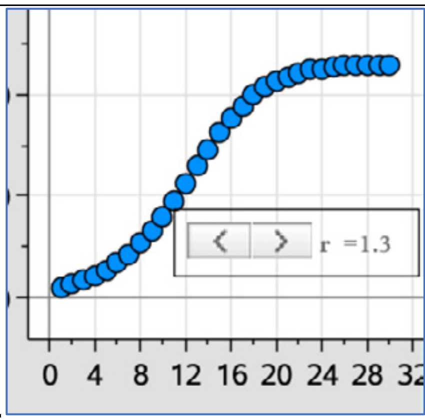
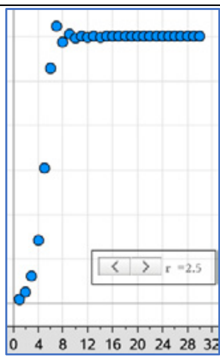


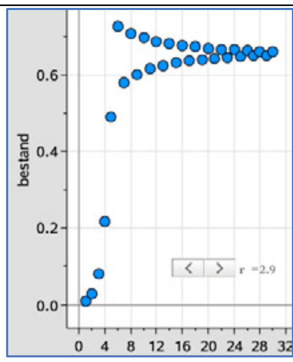
<table>
<tr><td>c) Bestimmt man die explizite Bildungsvorschrift durch Regression, so erkennt man die gute Übereinstimmung. Auch die Grenze (ca. 2041) passt gut zu den gegebenen Daten.</td><td></td></tr>
<tr><td>Variante zur Bestimmung einer expliziten Bildungsvorschrift:
Da $f(x) = \frac{G}{1+a\cdot e^{k\cdot x}}$ eine mögliche Darstellung der expliziten Form ist, gilt $f(0) = \frac{G}{1+a\cdot}$. Hiermit kann man a = 3 ermitteln und damit kann auch k = –0,479573 bestimmt werden.</td><td></td></tr>
<tr><td>Mit beiden Werten erhält man die explizite Bildungsvorschrift f(x).</td><td></td></tr>
<tr><td>Der Graph von f beschreibt den Verlauf der mit Hilfe der rekursiven Bildungsvorschrift gefundenen Daten relativ gut.
Hinweis: Da zur Modellierung die Werte f(0), f(1) und die Grenze genutzt wurden, passt der Graph der Funktion insbesondere an diesen Stellen sehr gut zu den gefundenen Daten.</td><td></td></tr>
<tr><td>d) Man experimentiert z. B. mit Hilfe eines Schiebereglers r, der die Fangquote pro Jahr angibt. Diesen fügt man in die rekursive Bildungsvorschrift ein
$b(n+1) = b(n) + \frac{1}{3750} \cdot b(n) \cdot \big(2000 - b(n)\big) - r.$
Fängt man z. B. 120 Forellen pro Jahr, so wächst die Population trotzdem noch.</td><td></td></tr>
<tr><td>Bei einer Fangrate von 200 bleibt die Population konstant.
Mehr als 200 Forellen dürfen nicht gefangen werden, damit die Population nicht ausstirbt.</td><td></td></tr>
</table>

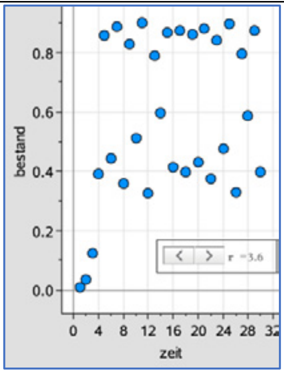
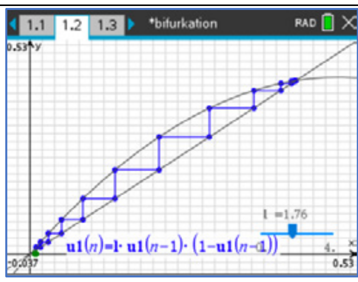
<table>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
</table>

Aufgabe 3

Der Zusammenhang ist gegeben durch die sogenannte Verhulst-Gleichung $x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, die die gleiche Struktur hat wie die rekursive Darstellung für logistisches Wachstum.

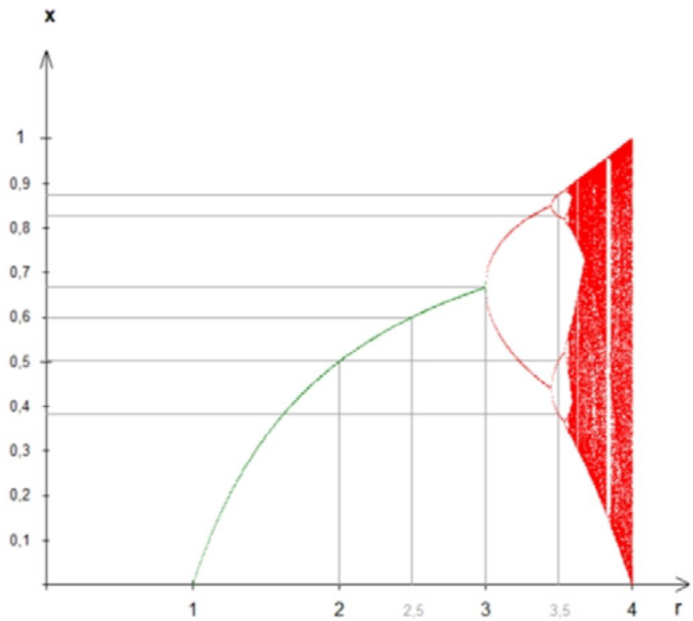
<table>
<tr><td>Mit x_0 = 0,01 gilt:
Mit 0 < r < 1 stirbt die Population aus.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Mit 1 < r < 2 entsteht die typische logistische Kurve.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Mit 2 < r < 3,6 alternierende Annäherung an eine Grenze und Aufspaltung der Folge.</td><td>


</td></tr>
</table>

Ab $r > 3{,}6$ Übergang zum Chaos.	
Die Darstellung im sogenannten Web-Diagramm ist möglich. Dabei werden aufeinanderfolgende Folgenwerte abwechselnd auf der x- bzw. y-Achse dargestellt. Hinweis: Grafikmodus *Sequence* nutzen und unter *Attribute* statt *Zeitmodus* *Webdiagramm* einstellen.	

Dieses seltsame Verhalten hat der amerikanische Mathematiker Mitchel Jay Feigenbaum im sogenannten Feigenbaumdiagramm dargestellt.
Vgl. https://www.michael-holzapfel.de/themen/parabelchaos/par_feigenbaum.html

Die horizontale Achse gibt den Wert des Parameters r an und die vertikale Achse die Häufungspunkte für die Folge x_n (x-Achse).

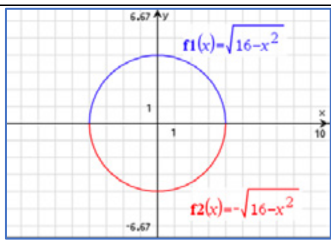
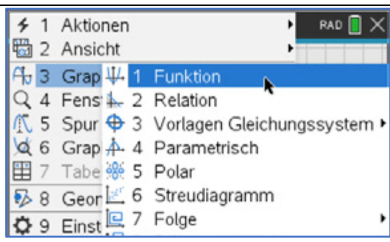
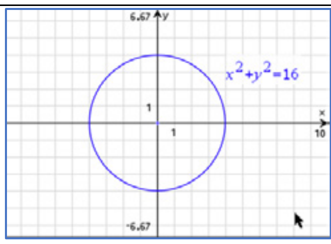
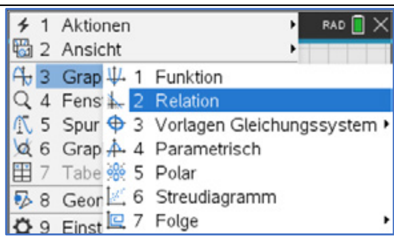
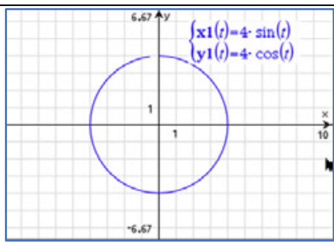
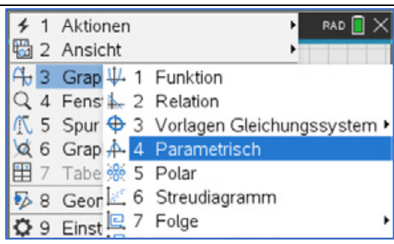


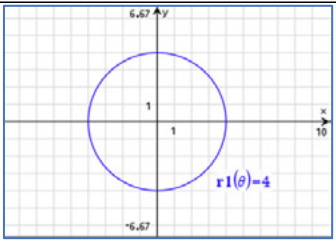
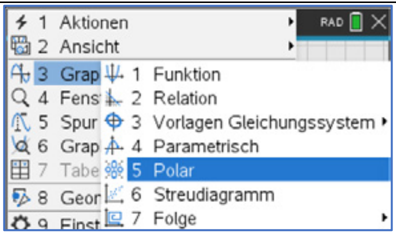
Wahlbereich 3: Kurven in Parameterdarstellung und in Polarkoordinaten

Wahlbereich 3:	**Kurven in Parameterdarstellung und in Polarkoordinaten**
Kennen von Parameterdarstellung und Polarkoordinaten zur Beschreibung von Kurven	CAS, DGS
- Einfluss von Parametern auf den Kurvenverlauf	Lissajous'sche Figuren, Rollkurven wie Zykloide, Epizykloide, Kardioide
- Umrechnen von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten und umgekehrt	➔ Kl. 9, LB 3 archimedische Spirale, Kreis, Cassini'sche Kurve
Kennen verschiedener Darstellungsformen des Kreises	Graphen von geeigneten Wurzelfunktionen, Kurve in Polarkoordinaten, Kurve in Parameterdarstellung

Hinweise für Lehrkräfte:

Der TI-Nspire CAS bietet im Grafikmodus viele Möglichkeiten zur Darstellung von Kurven sowohl in Parameter- als auch in Polarkoordinatendarstellung. So kann z. B. ein Kreis mit dem Radius r = 4 LE auf verschiedene Art und Weise dargestellt werden.

<table>
<tr>
<td>Nutzung von zwei Funktionen</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Nutzung des Relationsplots</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Parameterdarstellung</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Polarkoordinatendarstellung		

In den nachfolgenden Arbeitsblättern konzentrieren wir uns auf die letzten beiden Darstellungsformen. Sie bieten sich an, um z. B. einfache Zugänge zu Umkehrfunktionen und zeitabhängigen Prozessen zu finden oder eben zur Beschreibung von Kurven der Ebene, die sich nicht durch Funktionen beschreiben lassen (Zykloide, Spiralen, etc.).

Arbeitsblatt 1: Waagerechter und schräger Wurf

Aufgabe 1: Senkrechter Wurf
Bei einem Hilfseinsatz in einem Überschwemmungsgebiet muss ein Hilfspaket auf eine kleine Erhebung abgeworfen werden. Das Flugzeug befindet sich in 120 m Höhe und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 50 $\frac{m}{s}$ auf die Erhebung zu.

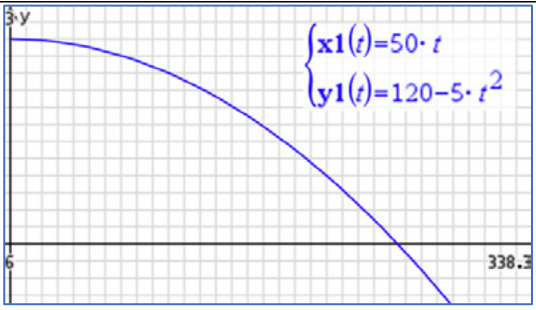
a) Ermitteln Sie, wann und in welcher Entfernung vor der Erhebung das Hilfspaket ausgeklinkt werden muss (vereinfachte Modellierungsannahmen: Luftwiderstand, Wind etc. werden vernachlässigt).
b) Geben Sie auch den funktionalen Zusammenhang h(x) zwischen der Höhe h und der horizontalen Entfernung von der Ausklinkstelle x an.
(Vgl. MU, Heft 3 Jg. 58, S. 35 ff.)

Aufgabe 2: Schräger Wurf
Ein Ball wird unter einem Winkel α schräg mit einer Geschwindigkeit von 28 $\frac{m}{s}$ abgeschossen.

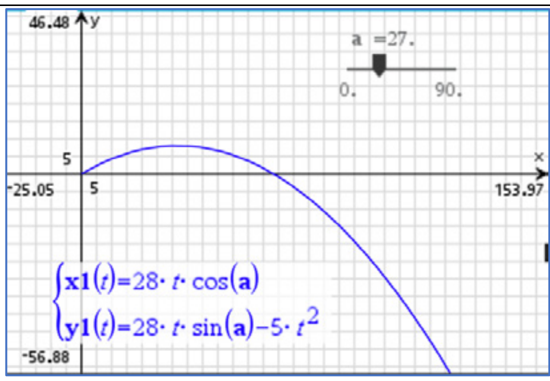
a) Begründen Sie, dass die folgenden Parametergleichungen den schrägen Wurf (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) beschreiben:
$x(t) = 28 \cdot t \cdot \cos(\alpha) \quad y(t) = 28 \cdot t \cdot \sin(\alpha) - 5t^2.$
b) Ermitteln Sie, für welchen Winkel die größte Weite erzielt wird.
c) Geben Sie den funktionalen Zusammenhang h(x) zwischen der Höhe h und der horizontalen Entfernung des Balls von der Abwurfstelle an.

WB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 1:

Aufgabe 1:

a) Aus dem Text lassen sich sofort die Gleichungen für x(t) = 50t und h(t) = 120 – 5t² aufstellen und im Parametermodus darstellen.	
Man berechnet, dass ca. 245 m vor der Erhebung das Hilfspaket ausgeklinkt werden muss und es dann 5 s fällt.	$\text{solve}(120-5\cdot t^2=0,t)$ $\quad t=-2\cdot\sqrt{6}$ or $t=2\cdot\sqrt{6}$ $\text{solve}(120-5\cdot t^2=0,t)$ $\quad t=-4.89898$ or $t=4.89898$ $50\cdot t\mid t=4.89898$ $\quad 244.949$
b) Es ergibt sich als Zusammenhang h(x) = $120-\frac{x^2}{500}$.	$y=120-5\cdot t^2\mid t=\frac{x}{50}$ $\quad y=120-\frac{x^2}{500}$

Aufgabe 2:

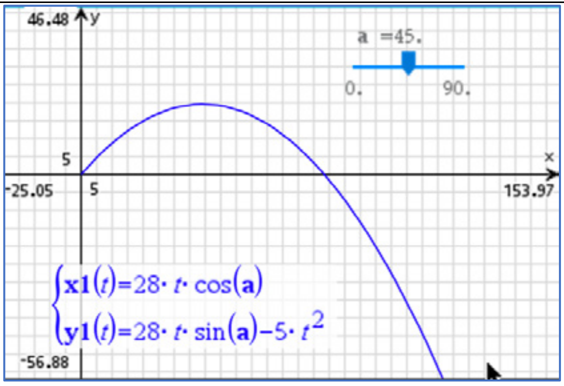
a) Der „x-Anteil“ der Bewegung wird mittels $\cos(\alpha)$ realisiert, analog der „y-Anteil“ mittels $\sin(\alpha)$ in y-Richtung. Hier muss, wie beim waagerechten Wurf, die Fallbeschleunigung berücksichtigt werden.	

<table>
<tr>
<td>

b) Durch Experimentieren mit dem Schieberegler erkennt man, dass für $\alpha = 45°$ die größte Weite erzielt wird.

Hinweis: Auch eine Berechnung ist - wie im Screenshot dargestellt - möglich.
Es ergibt sich eine maximale Weite von ca. 78,4 m.

</td>
<td>



$\operatorname{solve}(0=28\cdot t\cdot \sin(b)-5\cdot t^2,t)$ $\quad t=\frac{28\cdot \sin(b)}{5}$ or $t=0$

$x=28\cdot t\cdot \cos(b)|t=\frac{28\cdot \sin(b)}{5}$

$x=\frac{784\cdot \sin(b)\cdot \cos(b)}{5}$

$\operatorname{fMax}\left(\frac{784\cdot \sin(b)\cdot \cos(b)}{5},b\right)|0\le b\le 90$ $\quad b=45$

$x=\frac{784\cdot \sin(b)\cdot \cos(b)}{5}|b=45$ $\quad x=78.4$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

c) Die Umformung einer der beiden Parametergleichungen nach t und Substitution von t in der anderen Gleichung liefert den gesuchten Zusammenhang.
$h(x) = \tan(\alpha)\cdot x - \frac{5x^2}{784(\cos(\alpha))^2}$.

</td>
<td>

$\operatorname{solve}(x=28\cdot t\cdot \cos(b),t)$ $\quad t=\frac{x}{28\cdot \cos(b)}$

$y=28\cdot t\cdot \sin(b)-5\cdot t^2|t=\frac{x}{28\cdot \cos(b)}$

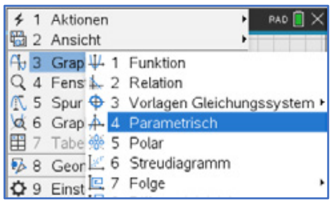
$y=\tan(b)\cdot x-\frac{5\cdot x^2}{784\cdot (\cos(b))^2}$

</td>
</tr>
</table>

Arbeitsblatt 2: Ellipsengleichungen in Parameterform

Aufgabe 1

Erzeugen Sie den Graphen von $x(t) = 4 \cdot \cos(t)$ und $y(t) = 2 \cdot \sin(t)$ mit der Parameterfunktion des CAS-Rechners. Beschreiben Sie deren Form.
Erzeugen Sie weitere Graphen von Kurven mit der Parametergleichung
$x(t) = a \cdot \cos(t)$ und $y(t) = b \cdot \sin(t)$ mit $a, b > 0; a \neq b$.



Aufgabe 2

Beschreiben Sie die Auswirkungen auf die Form, wenn Sie a und b in $x(t) = a \cdot \cos(t)$ und $y(t) = b \cdot \sin(t)$ mit $a, b > 0; a \neq b$ vertauschen.
Geben Sie Parametergleichungen für die abgebildeten Kurven an.

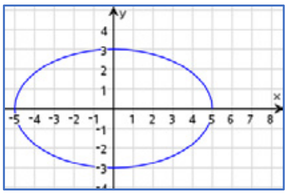


Bild 1

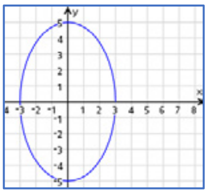


Bild 2

Aufgabe 3

Erläutern Sie die Umformung der Ellipsengleichung von der Parameterform in die kartesische Form.

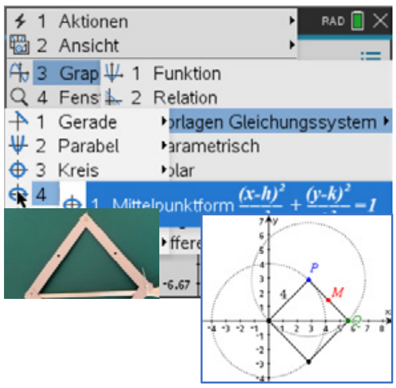
$$x = a \cdot \cos(t) \Rightarrow \frac{x}{a} = \cos(t) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = cos^2(t)$$

$$y = b \cdot \sin(t) \Rightarrow \frac{y}{b} = \sin(t) \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = sin^2(t)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

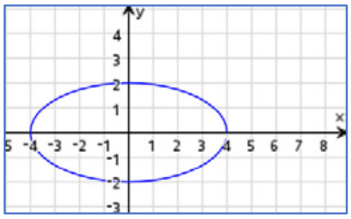
Aufgabe 4

Der TI-Nspire CAS bietet unter ***Graphs**-Eingabe/Bearbeitung* - *Vorlagen Gleichungssystem* auch eine Vorlage für die Verwendung der kartesischen Form der Ellipsengleichung an. Erkunden und beschreiben Sie die Bedeutung der Parameter a, b, h und k.
Das Foto zeigt das Modell eines Scherengitters. Wird der rechte Eckpunkt der Raute nach links entlang des Stieles bewegt und der linke Eckpunkt festgehalten, dann verändern alle Punkte auf der Raute außer dem linken Eckpunkt ihre Lage.



Simulieren Sie die Konstruktion durch eine geometrische Konstruktion auf Ihrem CAS-Rechner und zeigen Sie, dass sich der Mittelpunkt M von $\overline{PQ}$ auf einer elliptischen Bahn bewegt, wenn Q auf den Ursprung zuläuft.

WB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 2:



Aufgabe 1
Darstellung weiterer Ellipsen: individuelle Lösungen

Aufgabe 2
Der Wert für a in $x(t) = a \cdot \cos(t)$ gibt den Abstand der Scheitelpunkte auf der x-Achse an.
Der Wert für b in $y(t) = b \cdot \sin(t)$ gibt den Abstand der Scheitelpunkte auf der y-Achse an.
Beim Vertauschen von a und b werden auch diese Abstände getauscht.

Bild 1: $x(t) = 5 \cdot \cos(t)$ und $y(t) = 3 \cdot \sin(t)$
Bild 2: $x(t) = 3 \cdot \cos(t)$ und $y(t) = 5 \cdot \sin(t)$

Aufgabe 3
Durch a bzw. b dividieren und quadrieren ergibt:

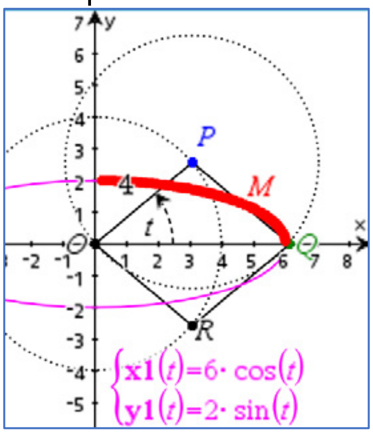
$$x = a \cdot \cos(t) \Longrightarrow \frac{x}{a} = \cos(t) \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} = cos^2(t)$$

$$y = b \cdot \sin(t) \Longrightarrow \frac{y}{b} = \sin(t) \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} = sin^2(t)$$

Beide quadrierte Gleichungen addieren:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = sin^2(t) + cos^2(t) = 1$ (trigonometrischer Pythagoras)

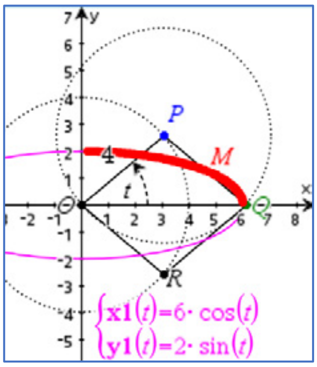
Aufgabe 4
Die Parameter a und b beschreiben die Längen der Achsen. Die Parameter h und k geben den Mittelpunkt M(h| k) einer parallel zu den Achsen verschobenen Ellipse an.
Öffnen Sie die Anwendung *Graphs*. Zeichnen Sie um den Ursprung O einen Kreis mit dem Radius 4 LE (*Geometry - Konstruktion - Zirkel*). Legen Sie einen Punkt P auf dem Kreis fest (*Geometry - Punkte&Geraden - Punkt auf*). Zeichnen Sie um P einen Kreis mit dem Radius 4 LE, der die x-Achse im Punkt Q schneidet (*Geometry - Konstruktion - Zirkel*). Spiegeln Sie den Punkt P an der x-Achse (*Geometry - Abbildung - Achsenspiegelung*). Der Spiegelpunkt ist R. Zeichnen Sie die Raute OPQR (*Geometry - Formen - Polygon*). Konstruieren Sie den Mittelpunkt M von $\overline{PQ}$ (*Geometry – Konstruktion – Mittelpunkt*). Wählen Sie *Spur – Geometriespur* und erzeugen Sie die Spur von M beim Bewegen von P auf dem Viertelkreis um O im 1. Quadranten.



Gleichung des Ellipsenbogens:

- P(4cos(t)|4sin(t)) liegt auf einem Kreis um O mit r = 4 LE.
- Q(8cos(t)|0) ist aus Symmetriegründen doppelt so weit von O wie P entfernt.
- M(6cos(t)|2sin(t)) ist der Mittelpunkt von $\overline{PQ}$.
- Die Gleichung des Ellipsenbogens lautet:
  $x(t) = 8 \cdot \cos(t)\,; y(t) = 2 \cdot \sin(t)$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Arbeitsblatt 3: Weitere Kurvengleichungen in Parameterform



Im vorigen Arbeitsblatt wurde gezeigt, dass der Mittelpunkt M von $\overline{PQ}$ auf einer Viertelellipse liegt, wenn Q sich auf den Ursprung zubewegt. Dies wurde erreicht durch die Veränderung der Lage von P auf dem Ursprungskreis für Winkel im Intervall $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 1

Untersuchen Sie aus innermathematischer Sicht, welche Kurve entsteht, wenn für die Drehung von P um O auf dem Ursprungskreis die Beschränkung auf das Intervall $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ aufgegeben wird.

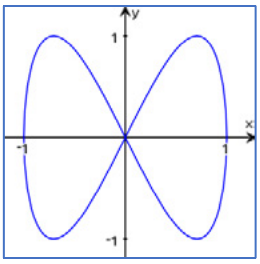
Aufgabe 2

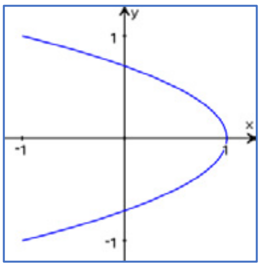
Durch Variieren der Gleichung $\begin{cases} \mathrm{x(t)} = \cos(t) \\ \mathrm{y(t)} = \sin(t) \end{cases}$ für den Einheitskreis lassen sich interessante Kurven erzeugen.

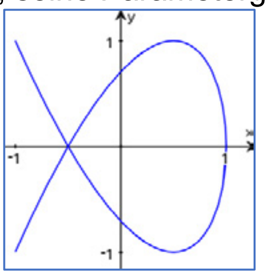
Ordnen Sie den Gleichungen den passenden Graphen zu.

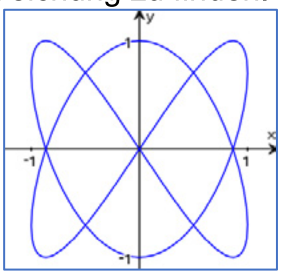
(1) $\begin{cases} \mathrm{x(t)} = \cos(2t) \\ \mathrm{y(t)} = \sin(t) \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \mathrm{x(t)} = \cos(2t) \\ \mathrm{y(t)} = \sin(3t) \end{cases}$ (3) $\begin{cases} \mathrm{x(t)} = \sin(2t) \\ \mathrm{y(t)} = \sin(3t) \end{cases}$

Ein Graph bleibt übrig. Versuchen Sie, seine Parametergleichung zu finden.


A


B


C


D

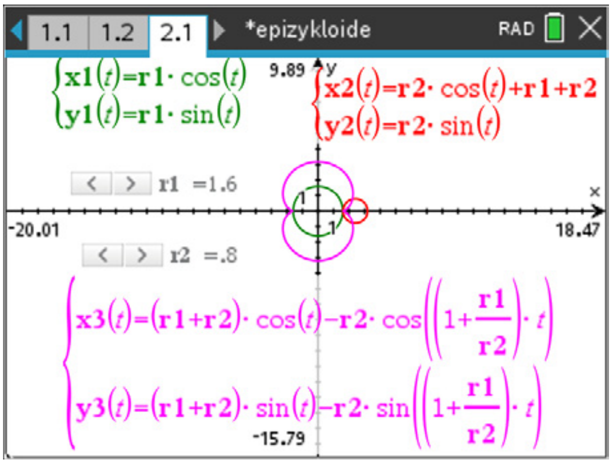
Aufgabe 3

Erzeugen Sie weitere Graphen durch Variieren der Parametergleichung. Lassen Sie Ihren Nachbarn die Gleichungen raten.

Aufgabe 4
„Gegeben sei ein (erzeugender) Kreis mit dem Radius r1. Rollt man einen zweiten Kreis mit dem Radius r2 auf ihm ab und verfolgt man dabei die Bahn eines Punktes P auf der Kreislinie, so entsteht die Epizykloide".[9]

Parametergleichungen von Epizykloiden: $\begin{cases} \mathrm{x(t)} = (\mathrm{r1}+\mathrm{r2})\cdot\cos(t) - \mathrm{r2}\cdot\cos\left[\left(1+\frac{r1}{r2}\right)\cdot t\right] \\ \mathrm{y(t)} = (\mathrm{r1}+\mathrm{r2})\cdot\sin(t) - \mathrm{r2}\cdot\sin\left[\left(1+\frac{r1}{r2}\right)\cdot t\right] \end{cases}$

Experimentieren Sie mit verschiedenen erzeugenden (r1) und abrollenden (r2) Kreisradien. Erstellen Sie dazu ein Graphs-Dokument mit zwei Schiebereglern für r1 und r2 nach folgendem Muster (*Graph-Eingabe/Bearbeitung*: *Parametrisch*):



Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen für Fälle, bei denen das Verhältnis der Radien r1 und r2 ganzzahlig, rational oder irrational ist.
Hinweis: Die Anzeige der Gleichungen auf dem Bildschirm kann man durch die Anweisung „*Auswahl*" ausblenden.

Aufgabe 5
Recherchieren Sie über Epizykloiden im Internet und bereiten Sie einen Vortrag dazu vor.

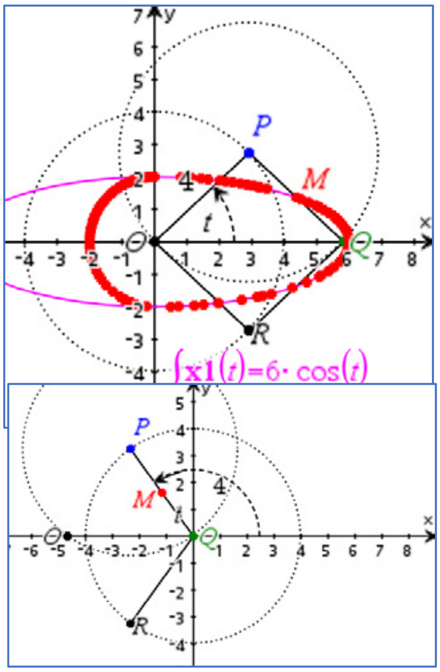
Aufgabe 6
Erläutern Sie, welcher Unterschied zwischen den Graphen von
$\begin{cases} \mathrm{x(t)} = 3\sin(2t) \\ \mathrm{y(t)} = \mathrm{t} \end{cases}$ und $\begin{cases} \mathrm{x(t)} = \mathrm{t} \\ \mathrm{y(t)} = 3\sin(2t) \end{cases}$ mit $0 \le t \le 2\pi$ zu erwarten ist.
Kontrollieren Sie Ihre Überlegungen mit dem CAS-Rechner.

[9] Quelle: http://www.mathematische-basteleien.de

WB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 3:

Aufgabe 1

Die innermathematische Sicht ist dadurch gegeben, dass man sich von der mechanischen Vorstellung des bewegten Scherengitters trennt und nur die Folgen der geometrischen Konstruktion betrachtet.



Man kann die vollständige Geometriespur von M erzeugen bei mindestens einer vollen Umdrehung von P um den Ursprung.

Es entsteht eine Spur, die an den Umriss eines Eies erinnert. Die Spur kommt nur im 1. und 4. Quadranten mit der Ellipse zur Deckung.

Im 2. und 3. Quadranten bildet die Spur einen Halbkreis mit der Parametergleichung

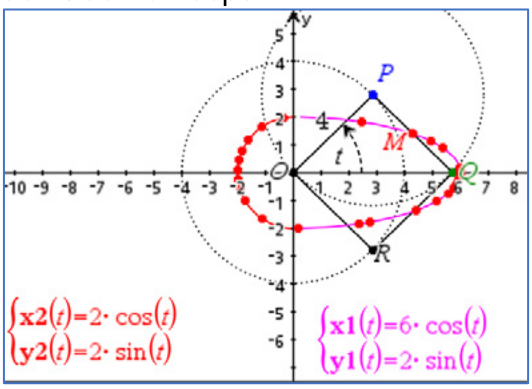
$x(t) = 2 \cdot \cos(t)\,; y(t) = 2 \cdot \sin(t)$.

Begründung: Liegt P auf dem Kreis um O im 2. oder 3. Quadranten, dann liegt Q im Ursprung und der Mittelpunkt M von Q(0|0) und P(4cos(t)|4sin(t)) hat die Koordinaten M(2cos(t)|2sin(t)).

Die Parametergleichung von M lautet:

$$\begin{cases} x(t) = 8 \cdot \cos(t)\,; y(t) = 2 \cdot \sin(t)\,, -\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2} \\ x(t) = 2 \cdot \cos(t)\,; y(t) = 2 \cdot \sin(t),\ \dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Die grafische Darstellung zeigt die Übereinstimmung mit der Geometriespur.



Aufgabe 2

Es gehören zusammen: (1) und B, (2) und C, (3) und D.

Der Graph A hat die Gleichung $\begin{cases} \mathrm{x(t)} = \cos(t) \\ \mathrm{y(t)} = \sin(2t) \end{cases}$.

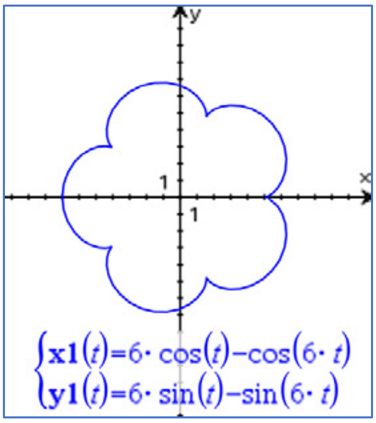
Aufgabe 3

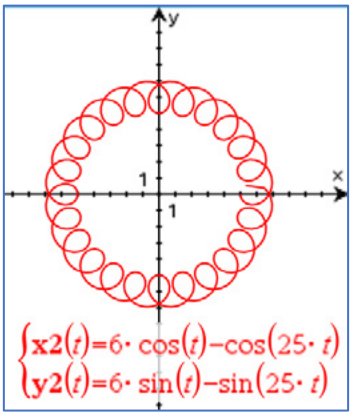
Weitere Graphen und Gleichungen individuell.

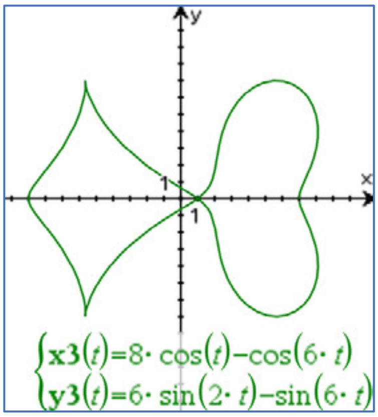
Aufgabe 4
Epizykloiden:

Das Verhältnis der Radien ist	Die Kurve
ganzzahlig	ist einfach geschlossen
rational	schließt sich nach mehreren Umläufen
irrational	schließt sich nicht

Eine Eigenschaft ist allen Epizykloiden gemeinsam: Sie liegen in einem Kreisring, der von dem erzeugenden Kreis mit dem Radius r1 und einem Hüllkreis mit dem Radius $r1 + 2 \cdot r2$ gebildet wird.
Einige besonders „schöne" Epizykloiden:

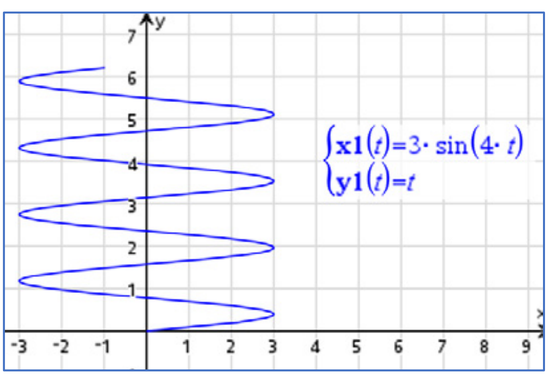


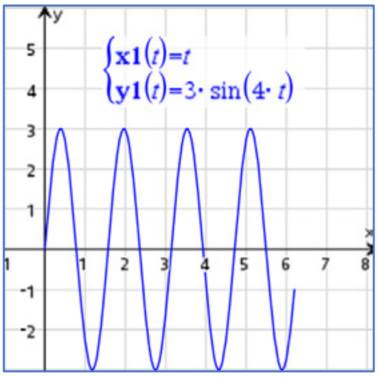




Aufgabe 5
Vortrag individuell

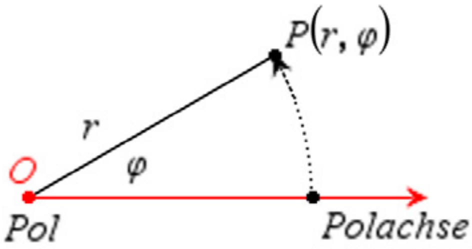
Aufgabe 6
Erläuterung in Worten für diese grafische Darstellungen.





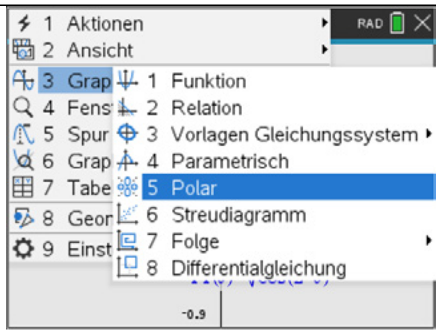
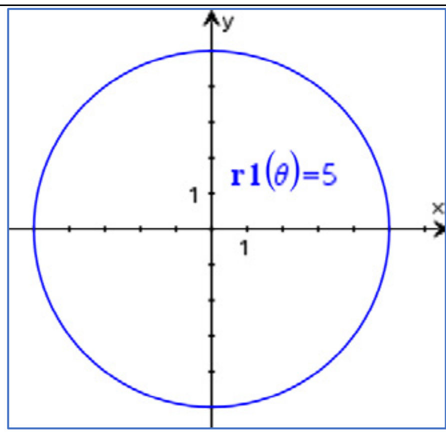
Arbeitsblatt 4: Polarkoordinaten

Im ebenen Polarkoordinatensystem wird ein fester Punkt O („Pol“) und eine in diesem Punkt beginnende Halbgerade („Polachse“) als Bezugssystem gewählt. Die Lage eines Punktes P der Ebene wird durch seinen Abstand r vom Pol und dem im Pol an die Polachse im mathematisch negativen Drehsinn angetragenen Winkel θ („Polarwinkel Theta“ in Bogenmaß) zwischen den beiden Halbgeraden OP und der Polachse eindeutig beschrieben.

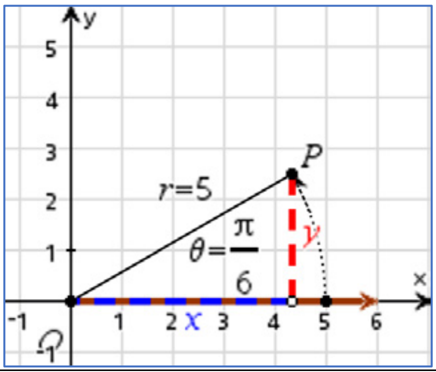


Wie bei kartesischen Koordinaten schreibt man beide Angaben in Klammern P(r; θ). Eine Kurve wird dann durch eine Gleichung $r(\theta)$ beschrieben. Da sich bei einem Kreis die Entfernung zum Pol nicht ändert, wenn der Drehwinkel verändert wird, lautet die Gleichung eines Kreises z. B. mit dem Radius 5 LE $r(\theta) = 5$.

Hinweise zur Darstellung auf dem TI-Nspire CAS am Beispiel der Darstellung eines Kreises mit dem Radius 5 LE.

Applikation ***Graphs*** öffnen, unter *Menü Einstellungen* das Bogenmaß für *Graph* festlegen, *Menü – Graph – Eingabe/Bearbeitung – Polar* Gleichung $r(\theta)$, sowie ggf. ein Intervall für θeingeben, *Menü – Fenster – Fenstereinstellungen* anpassen. Das Zeichen θ für den Winkel findet man unter $\boxed{\pi\blacktriangleright}$. 	
Gleichung $r(\theta) = 5$ eingeben, ggf. Fenster einrichten.	

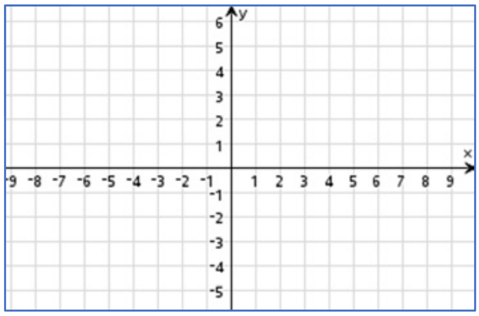
Umrechnung
Polarkoordinaten ↔ kartesische Koordinaten:
$x = r \cdot \cos(\theta)\,;\, y = r \cdot \sin(\theta)$
$r = \sqrt{x^2 + y^2};\ \theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right)$



Beispiele:
Es sind die Polarkoordinaten des Punktes *P*(1|2) gesucht.
Aus *x* = 1 und *y* = 2 folgt $r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ sowie
$\theta = arctan\left(\frac{2}{1}\right) \approx 63{,}4°(\approx 1{,}12\ Rad)$

Es sind die kartesischen Koordinaten von P zu ermitteln für einen Punkt P mit
r = 3 und $\theta = \frac{\pi}{4}$.
$x = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 2{,}12$ und $y = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 2{,}12$

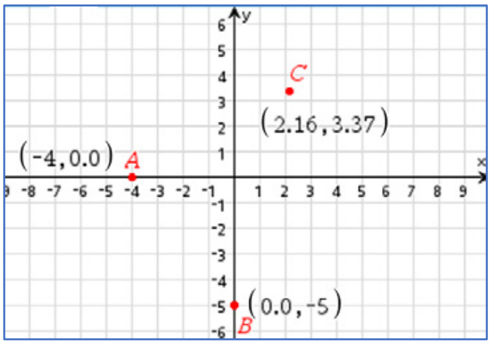
Aufgabe 1:
Gegeben sind die Punkte $A(3|\,\pi)$, $B\left(5|-\frac{\pi}{2}\right)$ und $C(4|\,1)$ in Polarkoordinaten. Zeichnen Sie die Punkte in das Koordinatensystem ein und geben Sie deren kartesischen Koordinaten an.
Pol im Ursprung;
Polachse = positive x-Achse



Aufgabe 2:
Stellen Sie die Kurven zu den folgenden Polargleichungen dar.
$r(\theta) = 2 \cdot (1 + \cos(\theta))$
$r(\theta) = 5 \cdot \sqrt{\cos(2\theta)}$
$r(\theta) = 4 \cdot \sin(3\theta)$
$r(\theta) = \sin^3(\theta) + cos^3(\theta)$
In der Literatur/im Internet werden folgende Begriffe für diese Kurven genannt:
„Trifolium“, „Das krumme Ei“, „Lemniskate“, „Kardioide“
Ordnen Sie jeder Kurve ihren richtigen Namen zu.

Aufgabe 3:
Betrachten Sie mithilfe eines Schiebereglers für den Parameter k verschiedene Kurven zur Polargleichung $r(\theta) = \sin(k \cdot \theta)$ mit $k \in \mathbb{N}$. Beschreiben Sie einen möglichen Zusammenhang zwischen der Art der Kurven und den Werten von k.

WB 3 Lösungen zu Arbeitsblatt 4:



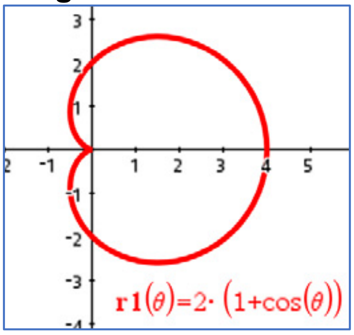
Aufgabe 1

$A(3|\,\pi) \rightarrow x = -4; y = 0$

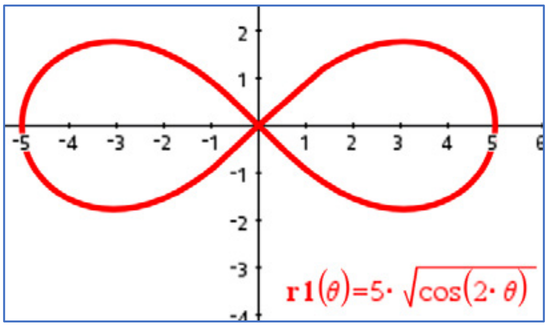
$B\left(5|-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow x = 0; y = -5$

$C(4|\,1) \rightarrow x \approx 2{,}16; y \approx 3{,}37$

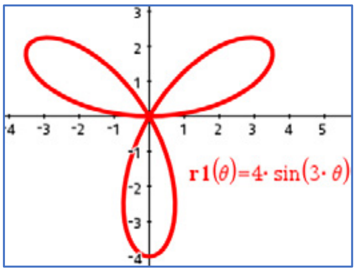
Aufgabe 2



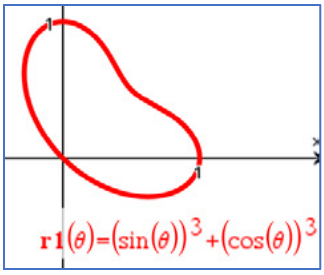
Kardioide



Lemniskate

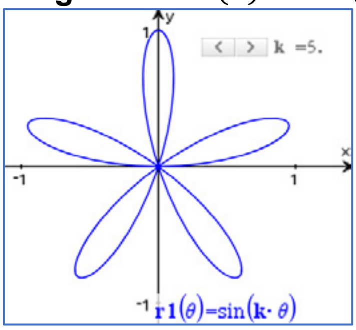


Trifolium

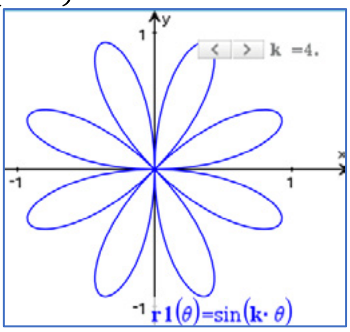


Das krumme Ei

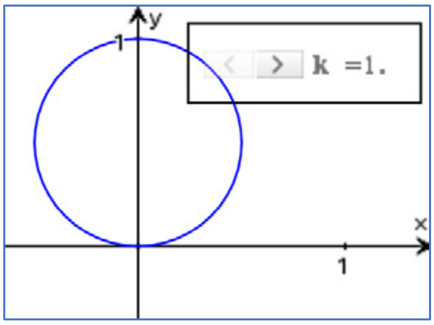
Aufgabe 3 $r(\theta) = \sin\,(k \cdot \theta)$



k ungerade:
k-blättrige Blüte



k gerade
2k-blättrige Blüte



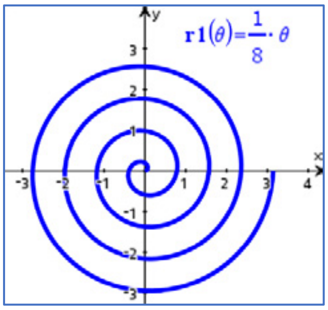
k = 1
Kreis

Arbeitsblatt 5: Spiralen

Spiralen treten in der Natur, Technik, Architektur und Kunst häufig auf. Es gibt ebene und räumliche Spiralen. Spiralen sind ein Beispiel für Kurven, die sich besonders einfach und elegant durch Polarkoordinaten mathematisch beschreiben lassen.
Ein gerolltes Seil[10] hat eine Spiralform. Da das Seil überall die gleiche Stärke hat, haben aufeinanderfolgende Windungen stets den gleichen Abstand. Solche Spiralen nennt man „archimedische Spiralen".

Definition:
Spiralen mit der Polargleichung $r(\varphi) = a \cdot \varphi + b$ mit a > 0 und $b \geq 0$ heißen „**archimedische Spiralen**".

Beispiel:
Das nebenstehende Bild zeigt den Graphen von $r(\theta) = \frac{1}{8} \cdot \theta$ mit $0 \leq \theta \leq 8\pi$.



Aufgabe 1
Zeichnen Sie die Spirale $r(\theta) = \frac{1}{8} \cdot \theta$ für verschiedene Intervalle $0 \leq \theta \leq 2k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{N}$. Beschreiben Sie, worauf die rechte Intervallgrenze Einfluss hat.

Aufgabe 2
Weisen Sie nach, dass der konstante Abstand benachbarter Spiralwindungen bei archimedischen Spiralen $a \cdot 2\pi$ beträgt.

Aufgabe 3
Untersuchen und beschreiben Sie den Einfluss der Parameter a und b auf die archimedische Spirale.

Aufgabe 4
Von einer Archimedischen Spirale sind zwei Punkte $A\left(1|\frac{\pi}{6}\right)$ und $B\left(2|\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$ bekannt. Ermitteln Sie eine Polargleichung dieser Archimedischen Spirale.

Geben Sie für die Punkte A und B auch die kartesischen Koordinaten an.

[10] Foto: Autor

Andere Spiralformen, bei denen der Abstand aufeinanderfolgender Windungen nicht konstant ist, finden sich oft in der Natur, wie dieses Foto[11] eines Ammoniten exemplarisch zeigt.
Ein Beispiel für die Mathematisierung solcher Spiralen sind die „logarithmischen Spiralen".

Definition:
Eine **„logarithmische Spirale"** ist eine Spirale, bei der sich mit jeder Umdrehung um ihren Pol der Abstand von diesem Mittelpunkt um den gleichen Faktor verändert. Der Radius wächst also proportional zur Bogen- bzw. Spirallänge.
Eine Polargleichung der logarithmischen Spirale ist $r(\theta) = a \cdot e^{k \cdot \theta}$
mit $a, k \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $\theta \in \mathbb{R}$ und der Eulerschen Zahl e.
Wegen der Exponentialgleichung werden diese Spiralen auch als „Exponentialspiralen" bezeichnet.

Aufgabe 5
Gegeben ist die Polargleichung $r(\theta) = e^{0,05 \cdot \theta}$:

a) Stellen Sie die Kurve im Intervall $0 \leq x \leq 10\pi$ grafisch dar.
b) Bestimmen Sie für die Schnittpunkte der Spirale mit der Polachse die Abstände vom Pol, also die Länge des Radius zu den in der Tabelle angegebenen Winkeln.

Winkel	0	2π	4π	6π	8π	10π
Radius						
Quotient						

c) Zeigen Sie, dass die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Radien näherungsweise konstant sind. Welche Aussage aus der Definition wird damit gestützt?
d) Weisen Sie die in c) untersuchte Eigenschaft anhand der Polargleichung exakt nach.
e) Stellen Sie grafisch dar, wie sich die Spirale verändert, wenn sie im Intervall $-4\pi \leq x \leq 10\pi$ dargestellt wird. Beschreiben Sie, wie sich die Spirale ändert, wenn die linke Intervallgrenze immer weiter gegen minus Unendlich geht.

[11] Foto: Autor

WB 3: Lösungen zu Arbeitsblatt 5

Aufgabe 1

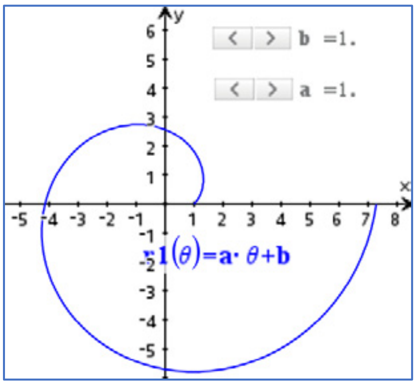
Die rechte Intervallgrenze $2k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{N}$ bewirkt, dass es k Spiralwindungen um den Ursprung gibt.

Aufgabe 2

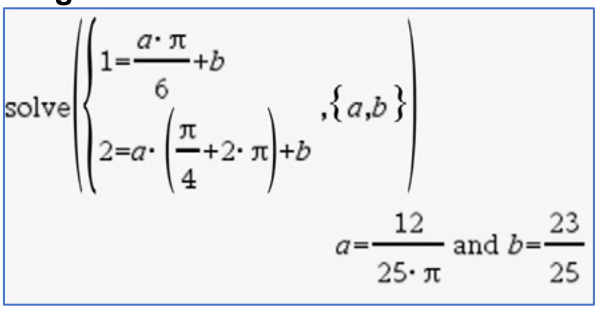
$a \cdot (\theta + 2\pi) + b - [a \cdot \theta + b] = a \cdot 2\pi$

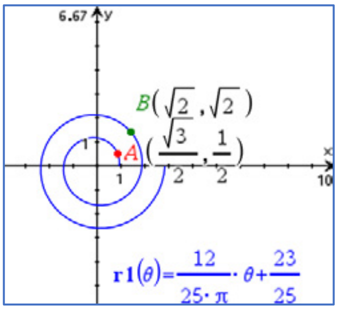
Aufgabe 3

Schieberegler für a und b einrichten mit a > 0 und $b \geq 0$.
Der Parameter a bestimmt den Abstand der aufeinanderfolgenden Spiralwindungen (siehe Aufgabe 2).
Der Parameter b legt den „Startpunkt S" der Windungen fest: S(b| 0).



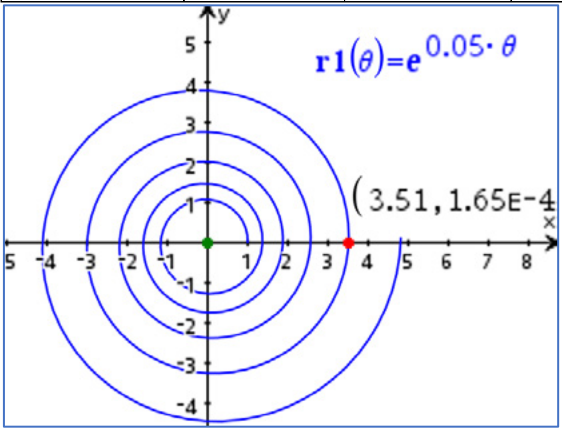
Aufgabe 4





Aufgabe 5
a), b) und c)

Winkel	0	2π	4π	6π	8π	10π
Radius	1	1,37	1,87	2,57	3,51	4,81
Quotient	1,37	1,36	1,37	1,37	1,37	-



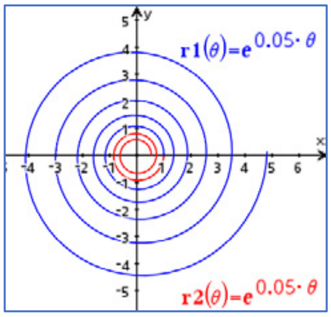
Die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Radien haben näherungsweise den konstanten Wert 1,37. Das entspricht der Eigenschaft „Der Radius wächst proportional zur Bogen- bzw. Spirallänge“.

d)
Exakter Nachweis:

$$\frac{e^{0,05\cdot(\theta+2\pi)}}{e^{0,05\cdot\theta}} = \frac{e^{0,05\cdot\theta+0,05\cdot2\pi}}{e^{0,05\cdot\theta}} = \frac{e^{0,05\cdot\theta}\cdot e^{0,05\cdot2\pi}}{e^{0,05\cdot\theta}} = e^{0,05\cdot2\pi} = e^{\frac{\pi}{10}} \approx 1,37$$

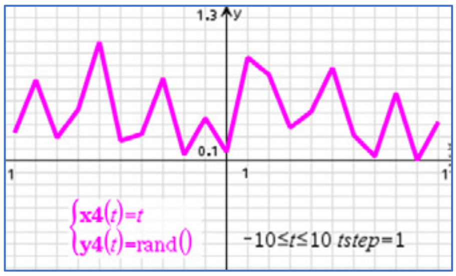
$$\frac{e^{0.05\cdot(\theta+2\cdot\pi)}}{e^{0.05\cdot\theta}} \qquad 1.36910777062$$

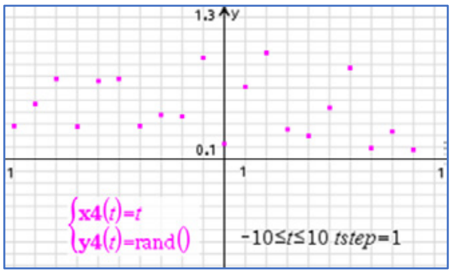
e)
Die Spirale windet sich enger um den Pol (rote Kurve).
Je näher die linke Intervallgrenze gegen minus unendlich rückt, desto enger windet sich die Spirale um den Pol, ohne ihn zu erreichen.



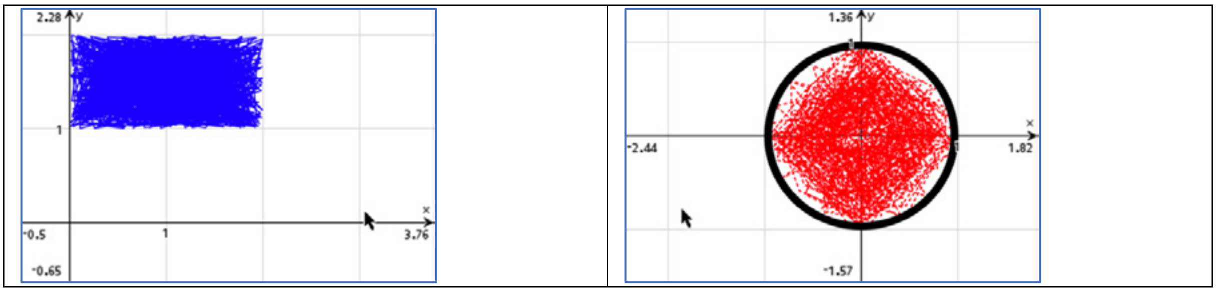
Arbeitsblatt 6: Parameterdarstellungen und Zufall

Parameterdarstellungen kann man auch nutzen, um Zufallsprozesse zu simulieren.
Im Bild rechts ist dazu ein einfaches Beispiel dargestellt. In der Einstellung *Graph – Eingabe/Bearbeitung – Parametrisch* können Kurven, die in Parameterform gegeben sind, durch Eingabe eines Ausdrucks für x(t) und y(t) dargestellt werden. Berücksichtigen muss man für jeden Fall die Laufvariable t. Es knnen maximal 200 Punkte dargestellt werden. Die Voreinstellung für die Darstellung der Punkte ist stetig, wie im oberen Bild. Dies kann unter *Attribute* verändert werden, wie im unteren Bild.

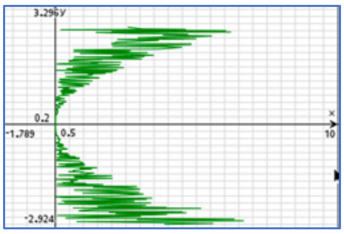




Aufgabe 1:
Erzeuge die in der Grafik dargestellten Bilder eines gefüllten Rechtecks und eines Kreises mit dem CAS.

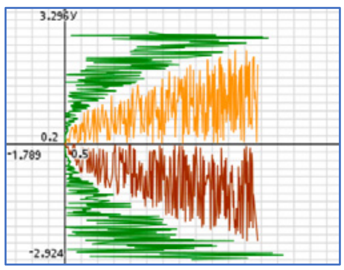


Aufgabe 2:
Das Bild wurde mit der rechts angegebenen Definition erzeugt.



$$\begin{cases} x5(t)=t^2\cdot \text{rand}() \\ y5(t)=t \\ -2.8\le t\le 2.8 \ \textit{tstep}=0.1 \end{cases}$$

Erzeugen Sie das folgende Bild und beschreiben Sie Ihre Überlegungen.



WB 3: Lösungen zu Arbeitsblatt 6
Lösungen:

Aufgabe 1

1. Rechteck z. B.:

$$\begin{cases} \mathbf{x1}(t)=2\cdot \mathrm{rand}() \\ \mathbf{y1}(t)=1\cdot \mathrm{rand}()+1 \\ 0\leq t\leq 2 \quad tstep=0.01 \end{cases}$$

2. Kreis z. B.:

$$\begin{cases} \mathbf{x2}(t)=\cos(t)\cdot \mathrm{rand}() \\ \mathbf{y2}(t)=\sin(t)\cdot \mathrm{rand}() \\ 0\leq t\leq 600 \quad tstep=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{x3}(t)=\cos(t) \\ \mathbf{y3}(t)=\sin(t) \\ 0\leq t\leq 600 \quad tstep=3 \end{cases}$$

Aufgabe 2

Mögliche Lösung:

$$\begin{cases} \mathbf{x6}(t)=t \\ \mathbf{y6}(t)=\sqrt{t}\cdot \mathrm{rand}() \\ 0\leq t\leq 6 \quad tstep=0.13 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{x7}(t)=t \\ \mathbf{y7}(t)=-\sqrt{t}\cdot \mathrm{rand}() \\ 0\leq t\leq 6 \quad tstep=0.13 \end{cases}$$

Literaturhinweise:

Auf den deutschsprachigen Webseiten von Texas Instruments (TI) education.ti.com/de findet man unter der Rubrik „Downloads“ verschiedene Handbücher zur TI-Nspire™ CX CAS Technologie.

Alle im Text beschriebenen Programme, die TI Codes und viel mehr nützliche Unterrichtsmaterialien finden Sie auf der TI Materialdatenbank unter www.ti-unterrichtsmaterialien.net oder gehen Sie auf www.t3europe.eu.

Unter der Rubrik „Resources“ gibt es auch unzählige fremdsprachige Materialien.

T³ DEUTSCHLAND

T³ Teachers Teaching with Technology

Netzwerk
Das T³ Lehrerfortbildungsnetzwerk richtet sich an Sie, an Lehrerinnen und Lehrer, die sich zum sinnvollen Einsatz digitaler Werkzeuge im MINT-Unterricht austauschen und weiterentwickeln wollen. T³ Deutschland ist Teil des internationalen T³ Netzwerks.

Fortbildungen
T³ Deutschland bietet Ihnen pädagogisch-didaktische Unterstützung in Form von schulinternen Fortbildungen, Online-Seminaren und Tagungen an.

Materialien
Aufgabenbeispiele, Tutorials, Videos und mehr nützliche Materialien für Ihren MINT-Unterricht stellen wir auf der Materialdatenbank kostenlos zur Verfügung.

Der T³ EduBlog bietet exklusive Interviews, inspirierende Erfahrungsberichte und mehr

Informieren Sie sich. Machen Sie mit!

Nehmen Sie Kontakt zu uns auf unter:
www.t3deutschland.de I info@t3deutschland.de

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

T3 Europe

TI-Nspire™ CX CAS Technologie

Ob Handheld, Software (Win/Mac) oder Tablet (Win/iPad) - alle Produkte sind einzeln oder als integrierte Lösung einsetzbar. Passendes Zubehör unterstützt den fächerübergreifenden Einsatz in Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik (MINT).

www.tinspirecas.de

Praxisorientierte Unterrichtsmaterialien

Nützliche Aufgabenbeispiele für Ihren Unterricht, kostenlose Downloads und Hinweise auf Verlagspublikationen finden Sie auf der TI Materialdatenbank, auch ganz speziell zur TI-Nspire™ CX Technologie.

Schauen Sie mal rein:
TI Materialdatenbank: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

» Nutzen Sie beispielsweise unser kostenloses Ausleihprogramm!

» Ausführliche Produkt- und Serviceinformationen sowie Bezugsquellen finden Sie auf unseren TI Webseiten education.ti.com/de

» Die TI Schulberater unterstützen Sie gerne bei allen Fragen rund um den Einsatz von TI Rechnern im Unterricht: schulberater-team@ti.com

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

www.youtube.com/TIedtechDE

education.ti.deutschland

@TIEducationDE