

Matheunterricht mit/trotz KI?

Es ist unbestreitbar, dass generative KI-Technologien unsere Erwartungen übertreffen und das Potenzial haben, die Bildungslandschaft, nachhaltig zu verändern. Angesichts dieser rasanten technologischen Fortschritte stehen sowohl Studierende als auch Lehrende vor neuen Herausforderungen und Fragen hinsichtlich der Arbeitsteilung zwischen Menschen und Maschinen, Lernzielen und Formen der Bewertung der Studienleistung [Helfrich-Schkarbanenko, 2023]

Es waren immer wieder Werkzeuge, die Mathematik beeinflusst und verändert haben. Nun gibt es die mächtigen Werkzeuge der KI Systeme, die nicht nur Rechen- oder Graphikwerkzeuge sind, sondern Problemlösemedien und Kommunikationsmedien. Und viele empfinden die Möglichkeiten, die sich daraus ergeben als Bedrohung für das Fach Mathematik. Man sollte aber auch die Chancen sehen, die sich daraus ergeben.

Die Diskussion über die Rolle und den Einfluss von KI überrascht mich nicht. Genau dieselbe Diskussion habe ich Anfang der neunziger Jahre erlebt, als wir begonnen haben CAS im Unterricht einzusetzen.

There are two poles [Buchberger, 2002]:

Populist view:

- by recent advances, (math) teaching, can be automated;
- thus, let's automate it and dismiss the teachers!

Purist view:

- (math) teaching is an art;
- thus, let's protect it against automation!

Mein wichtiger Lehrmeister damals und bis heute ist Bruno Buchberger. Er ist ja nicht nur ein großer Mathematiker, seine Theorie der Gröbner-Basen dürfte das international am meisten zitierte österreichische Forschungsergebnis im Bereich der Computer-Mathematik sein. Er hat durch seine Forschung im Bereich des Computers auch eine hohe didaktische Kompetenz entwickelt, indem er die Frage „wie entwickelt sich Mathematik im Computer?“ verknüpft mit der Frage „wie entwickelt sich Mathematik im menschlichen Gehirn?“.



In meinem Artikel möchte ich zuerst zwei Fragen diskutieren: „Wozu ChatGPT?“ und vor allem die Frage „Wozu Mathe?“ Erst danach kann man über mögliche Konsequenzen auf das Lehren und Lernen von Mathematik nachdenken.

1. Was kann CharGPT im Bereich der Mathematik leisten?

Der Artikel beschäftigt sich natürlich nicht genauer mit der Frage: „Wie leistet das ChatGPT?“, aber wichtig ist für mich, dass „künstliche Intelligenz“ auch ein Produkt „menschlicher Intelligenz“, genauer „mathematischer Intelligenz“ ist.

„Ich persönlich erweitere daher gerne die Abkürzung "AI" zu "algorithmischer Intelligenz", d.h. die menschliche Intelligenz zum Finden von Programmen auf immer höheren Ebenen!“ [Buchberger, 2023_3].

ChatGPT ist ein textbasiertes Werkzeug mit beeindruckenden Leistungen bei verschiedenen sprachlichen Aufgaben wie eben Texte zu generieren, da es auf umfangreichen Daten vortrainiert wurde. Aber ChatGPT hat immer noch Schwierigkeiten mit einigen logischen Aufgaben, die logisches Denken und mehrere Schritte zur Lösung erfordern. Das muss beim Einsatz in Mathematik berücksichtigt werden.

Einige Beispiele für die Leistungsfähigkeit, aber auch für die Schwächen von ChatGPT:

a) Ein Projekt mit dem Titel „Ist ChatGPT schlauer als Master Studenten?“

[Buchberger, 2023_1]

Im Zuge des Auswahlverfahrens für ein spezielles Informatik-Stipendienprogramm von oberösterreichischen Unternehmen, stelle ich den Bewerbern ein paar einfache technische Fragen zur Programmierung etc. in einem Zoom-Meeting.

Die gleichen Fragen stelle ich dem Dialogsystem ChatGPT, [ChatGPT].

Das Ergebnis:

Das Ergebnis hat mich überrascht: Fast alle Antworten von ChatGPT waren völlig korrekt und gut erklärt. Auch in den Dialogen zur Klärung einiger kritischer Punkte in den Antworten, waren die Erklärungen von ChatGPT erstaunlich klar und zielführend.

Im Vergleich dazu: Ich habe die gleichen Fragen in den persönlichen Zoom-Interviews mit ca. 30 Bewerbern aus fünf Ländern ausprobiert. Nur die drei besten Kandidaten (die die einen GPA von 1,0, d.h. den höchstmöglichen GPA, in ihrem Bachelor-Studium hatten), schnitten etwa gleich gut ab im Vorstellungsgespräch. Alle anderen schnitten (weit) schlechter ab als ChatGPT. Und natürlich kamen alle Antworten von ChatGPT innerhalb von 1 bis 10 Sekunden, während die meisten der menschlichen Bewerber ziemlich langwierige und schwierige Dialoge benötigten.

Ich bin besonders beeindruckt von der Fähigkeit von ChatGPT, sinnvolle und gut strukturierte Programme aus Problemspezifikationen in natürlicher Sprache zu extrahieren. Die Leistung von ChatGPT war recht beeindruckend, was die Formalisierung und die Aussagenlogik anbelangt. In Beispielen, in denen prädikatenlogisches Logik notwendig ist, sind die Antworten von ChatGPT noch nicht perfekt

b) Das Protokoll eines Interviews von Bruno Buchberger mit ChatGPT

BB:

Angenommen, wir haben 10 rote Karten mit den Nummern 1, ..., 10; 5 blaue Karten mit den Nummern 1, ..., 5; 7 grüne Karten mit den Nummern 1, ..., 7. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, eine blaue Karte mit der Nummer 2 oder 3?

ChatGPT:

Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, eine blaue Karte mit der Nummer 2 oder 3 zu ziehen, benötigen wir die Gesamtzahl der möglichen Ergebnisse (d.h. die Gesamtzahl der Karten) und die Anzahl der erfolgreichen Ergebnisse (d.h. die Anzahl der blauen Karten mit der Nummer 2 oder 3)

Es gibt insgesamt $10 + 5 + 7 = 22$ Karten. Davon sind 5 blaue Karten, und 2 davon (die Karten mit den Nummern 2 und 3) sind erfolgreiche Ergebnisse. Die Wahrscheinlichkeit, eine blaue Karte mit der Zahl 2 oder 3 zu ziehen, ist also $2/22 = 1/11$.

Ich hoffe, das ist hilfreich! Lassen Sie mich wissen, wenn Sie weitere Fragen haben.

BB:

Kennen Sie das Bayes'sche Theorem? Wie konnten Sie das Bayes'sche Theorem in der vorherigen Aufgabe anwenden?

ChatGPT:

Ja, das Bayes'sche Theorem ist eine mathematische Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses auf der Grundlage von Vorwissen über Bedingungen, die mit dem Ereignis zusammenhängen könnten. Es wird häufig beim maschinellen Lernen und in der Statistik verwendet, um Vorhersagen zu treffen oder die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses auf der Grundlage von Daten abzuleiten.

$$P(A|B) = P(B|A) * P(A) / P(B)$$

wobei:

- $P(A|B)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt, wenn das Ereignis B eingetreten ist,
- $P(B|A)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis B eintritt, wenn das Ereignis A eingetreten ist,
- $P(A)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von Ereignis A
- $P(B)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis B eintritt

Zur Anwendung des Satzes von Bayes auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, eine blaue Karte mit der Zahl 2 oder 3 zu ziehen Karte mit der Zahl 2 oder 3 zu ziehen, müssen wir die Ereignisse A und B definieren und die Wahrscheinlichkeiten für jedes Ereignis berechnen. Wir könnten zum Beispiel das Ereignis A als "Ziehen einer blauen Karte mit der Zahl 2 oder 3" und das Ereignis B als "Ziehen einer blauen Karte". Wir können dann die Informationen der Frage die Wahrscheinlichkeiten für jedes Ereignis wie folgt berechnen:

- $P(A) = 2/22 = 1/11$ (da es 2 erfolgreiche Ergebnisse von insgesamt 22 Karten)
- $P(B) = 5/22 = 5/22$ (da es 5 blaue Karten von insgesamt 22 Karten gibt)
- $P(B|A) = 1$ (da alle erfolgreichen Ergebnisse blaue Karten sind)

Setzt man diese Werte in das Bayes'sche Theorem ein, kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, eine blaue Karte mit der Nummer 2 oder 3 zu ziehen, vorausgesetzt, wir haben eine blaue Karte gezogen:

$$P(A|B) = P(B|A) * P(A) / P(B) = (1) * (1/11) / (5/22) = 2/5$$

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, eine blaue Karte mit der Zahl 2 oder 3 zu ziehen, wenn wir eine blaue Karte gezogen haben, ist $2/5$.

Ich hoffe, das hilft! Lassen Sie mich wissen, wenn Sie weitere Fragen haben.

Kommentar:

Interessant ist, dass ChatGPT die Fragestellung verändert, um zu zeigen, dass es das Bayes'sche Theorem versteht

c) **Aufgabe 01: Beweis des Lehrsatzes von Pythagoras mit Diskussion** [ChatGPT 4, 2023]



You

Beweise den Lehrsatz von Pythagoras



ChatGPT

Um den Lehrsatz von Pythagoras zu beweisen, gibt es viele verschiedene Methoden. Eine der bekanntesten ist der geometrische Beweis durch Umordnung. Hier wird die Gültigkeit der Formel $a^2 + b^2 = c^2$ für ein rechtwinkliges Dreieck gezeigt, wobei a und b die Längen der Katheten und c die Länge der Hypotenuse darstellen.

Der Beweis geht folgendermaßen:

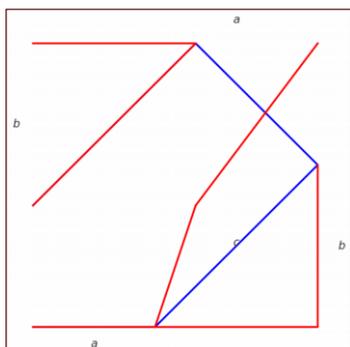
1. Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge $a + b$. Dieses Quadrat hat eine Gesamtfläche von $(a + b)^2$.
2. Zeichne innerhalb dieses großen Quadrats vier rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten die Längen a und b haben. Platziere die Dreiecke so, dass ihre Hypotenusen ein kleineres Quadrat in der Mitte des großen Quadrats bilden.
3. Die Fläche des kleineren Quadrats in der Mitte entspricht der Fläche einer Hypotenuse im Quadrat, also c^2 .
4. Die verbleibende Fläche, die von den vier Dreiecken umgeben wird, entspricht viermal der Fläche eines der rechtwinkligen Dreiecke. Die Gesamtfläche der vier Dreiecke ist $4 \times \frac{1}{2}ab = 2ab$.
5. Somit kann die Gesamtfläche des großen Quadrats auf zwei Arten berechnet werden:
 - Als Fläche des gesamten großen Quadrats: $(a + b)^2$
 - Als Summe der Flächen des kleineren Quadrats und der vier Dreiecke: $c^2 + 2ab$
6. Da beide Berechnungen die Fläche desselben Quadrats beschreiben, müssen sie gleich sein. Das führt zu $(a + b)^2 = c^2 + 2ab$.
7. Nach der Ausmultiplizierung der linken Seite erhält man $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$.
8. Subtrahiere $2ab$ von beiden Seiten der Gleichung: $a^2 + b^2 = c^2$.

Das ist der Lehrsatz von Pythagoras. Diese elegante geometrische Methode zeigt, dass in jedem rechtwinkligen Dreieck die Summe der Flächen der Kathetenquadrate gleich der Fläche des Hypotenusenquadrats ist.



You

Kannst du den Beweis mit Hilfe von TikZ graphisch darstellen?



Im obigen Diagramm wird der geometrische Beweis des Satzes von Pythagoras dargestellt:

- Das große Quadrat, mit der Seitenlänge $a + b$, ist in blau gezeichnet.
- Vier rote rechtwinklige Dreiecke sind innerhalb des großen Quadrats platziert. Jedes Dreieck hat die Katheten a und b und die Hypotenuse c .
- Das kleinere Quadrat, gebildet durch die Hypotenusen der roten Dreiecke, repräsentiert c^2 .

Dieses Diagramm visualisiert, wie die Gesamtfläche des großen Quadrats sowohl durch $(a + b)^2$ als auch durch die Kombination der Fläche des inneren Quadrats c^2 und der Flächen der vier Dreiecke (zusammen $2ab$) ausgedrückt werden kann, was den Lehrsatz von Pythagoras beweist.

Kommentar:

Durch Plugins ist ChatGPT in der Version 4 im Vergleich zur Version 3.5 mathematisch leistungsfähiger geworden. Das Wolfram-Plugin macht ChatGPT intelligenter, indem es auf leistungsstarke Berechnungen, präzise Mathematik, kuratiertes Wissen, Echtzeitdaten und Visualisierung von [Wolfram|Alpha](#) und [Wolfram Language](#) zurückgreift.

Die graphische Darstellung zeigt aber, dass es nach wie vor Schwächen bei graphischen Repräsentationen gibt. Die angebotene graphische Darstellung ist unbrauchbar. Die verbale Erklärung stimmt nicht mit der Zeichnung überein.

2. Warum Mathe? Wie entwickelt sich Mathematik in der Wissenschaft und im Lernenden?

Hier einige Antworten:

- (1) Meine Lieblingsdefinition von Mathematik: „*Mathematik ist die über Jahrhunderte entwickelte Technik des Problemlösens durch Schließen*“ (Buchberger)
- (2) „*Mathematik als möglicher Modus der Weltbegegnung, als eine spezifische Brille, die Welt um uns herum zu sehen bzw. zu modellieren*“. (Österreichische Reifeprüfung: Auszug aus der bildungstheoretischen Orientierung) [IDM, 2009]

(3) *Der wichtigste Ertrag des Faches Mathematik ist jene Denktechnologie, die notwendig ist um Mathematik zu treiben (Buchberger). Diese Denktechnologie ist ein wesentlicher Beitrag zur allgemeinen Problemlösefähigkeit.*

(4) *Man lernt am schnellsten und besten, indem man andere lehrt. (Rosa Luxemburg (1870 - 1919))*

(5) *“Teaching without teachers?” [Buchberger, 2002]
(Vortrag Buchberger bei der VISIME- Konferenz in Wien 2002)*

Mathematics and Automation

- *The goal of mathematics is automation.*
- *The goal of mathematics is to trivialize mathematics.*
- *The goal of mathematics is explanation (= making things of high dimension plane = making complicated things simple).*
- *Mathematics is didactics.*
- *The process of trivialization is completely non-trivial.*
- *Think nontrivially once and act trivially infinitely often.*

Global Math Teaching

- *Teaching will never be obsolete in this global magma.*
- *Rather, teaching will be more and more important and challenging.*
- *Everyone should be a teacher and nobody should be a teacher only.*
- *Math teaching is a paradigm: If we manage math teaching, we master teaching in (all, some, many?) other areas.*

(6) *“The future of Mathematics – a personal view and comments on math education”
(Vortrag Buchberger bei der TIME-Konferenz in Krems 2014) [Buchberger, 2014]*

Conclusions 2014

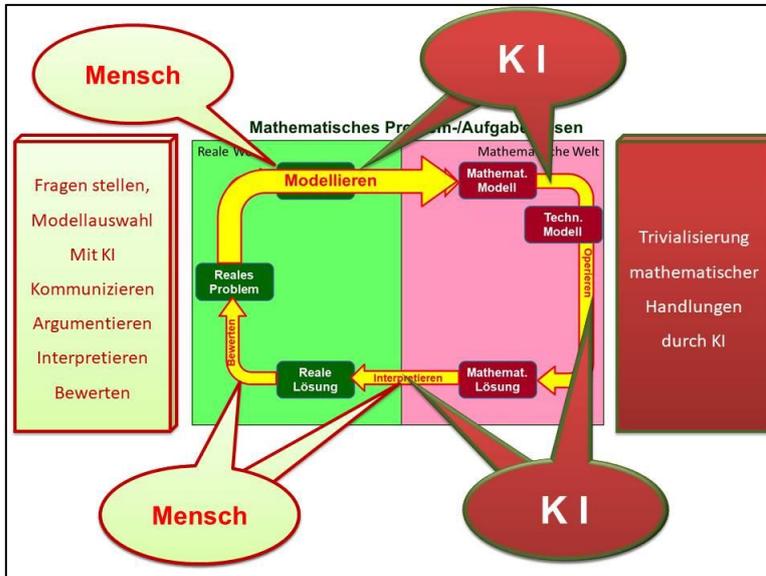
- *Using technology in math education? Math = technology!*
- *Algorithms (on higher and higher levels) are goal and means of math and math education*
- *Teaching math using “technology”: Give students a chance to repeat evolution! (The White-Box / Black-Box Principle, BB 1989).*
- *The higher the “technology”, the more important the personal teacher!*

Identifiziert man sich mit den 6 Antworten, ergeben sich Konsequenzen bezüglich der Rolle von KI im Mathematikunterricht.

3. Welchen Beitrag kann KI für einen in Kapitel 2 charakterisierten Mathematikunterricht leisten?

3.1 Schlussfolgerungen zur Antwort (1)

Der Problemlösekreislauf:



Für die Lernenden bleibt trotz KI noch genug zu tun:

Die Modellentscheidung unterliegt nicht der zweiwertigen Logik wahr/falsch. Basierend auf den im Lernprozess verfügbaren mathematischen Werkzeugen ist ein Abwägen bezüglich der möglichen mathematischen Modelle für das reale Problem notwendig.

[Heugl, 2014]

Bei einer Untersuchung Buchbergers wurde ein Problem fünfmal gestellt, jedes Mal wurde von ChatGPT ein anderer Algorithmus vorgeschlagen, aber immer korrekt [Buchberger, 2023_1].

Es ist faszinierend, wie ChatGPT aus einer Spracheingabe eines Problems ein mathematisches Modell entwickelt:

Aufgabe 02: Bausparkredit

You
Ich benötige für einen Hausbau einen Kredit von € 140000 und möchte in 30 Jahresraten tilgen. Der Zinssatz ist derzeit 3,5%. Wie hoch ist die Jahresrate?

ChatGPT
Die Jahresrate für einen Kredit von 140.000 € mit einem Zinssatz von 3,5% und einer Laufzeit von 30 Jahren beträgt etwa 7.612 €. [-]

Eine interessante Aufgabe für die Trivialisierung durch das KI Werkzeug. Aber für den Lernprozess ist nicht nur das Ergebnis wichtig, wichtiger ist der Weg zur Trivialisierung. Nun kann man ChatGPT durch weitere Fragen auffordernd, den Weg zu erklären. Das Ergebnis hängt dann stark davon ab, wie und wonach man fragt.



You

Wie kommt man zu diesem Ergebnis?



ChatGPT

Um die Jahresrate eines Kredits zu berechnen, der in regelmäßigen Raten über eine feste Laufzeit zurückgezahlt wird, verwenden wir die Formel für ein Annuitätendarlehen. Die Formel lautet:

$$R = P \times \frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Dabei steht:

- R für die Jahresrate (die regelmäßige Zahlung, die Sie leisten müssen).
- P für den Kreditbetrag (in Ihrem Fall 140.000 €).
- i für den jährlichen Zinssatz, ausgedrückt als Dezimalzahl (also 3,5% oder 0,035).
- n für die Anzahl der Jahre, über die der Kredit zurückgezahlt wird (hier 30 Jahre).

Die Formel berechnet, wie viel Sie jedes Jahr zahlen müssen, um sowohl den Kreditbetrag als auch die darauf anfallenden Zinsen über die Laufzeit des Kredits vollständig zu begleichen.

In Ihrem Fall setzen wir die Werte in die Formel ein:

$$R = 140.000 \times \frac{0,035 \times (1+0,035)^{30}}{(1+0,035)^{30} - 1}$$

Durch diese Berechnung ermitteln wir, dass die jährliche Zahlung, die Sie leisten müssen, etwa 7.612 € beträgt.

Aber man kann sich auf das von ChatGPT gewählte Modell nicht immer verlassen. Für diese Kontrolle sind aber eigene mathematische Kompetenzen zu dem jeweiligen Thema notwendig.

Aufgabe 03: Grippeepidemie



You

Aufgabe: „Grippeepidemie“

Betrachtet man den Verlauf einer Grippeepidemie in einer Stadt mit 5 000 Einwohnern, so lässt sich die Anzahl an Erkrankten E in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) annähernd durch eine Polynomfunktion 3. Grades beschreiben.

Folgende Informationen liegen vor:

- (1) Zu Beginn der Beobachtungen sind 10 Personen mit dem Grippevirus infiziert.
- (2) Nach einem Tag sind bereits 100 Personen an Grippe erkrankt.
- (3) Am 3. Tag nimmt die Anzahl an Erkrankten am stärksten zu.
- (4) Am 10. Tag erreicht die Grippeepidemie (d. h. die Anzahl an Erkrankten) ihr Maximum.

Aufgabenstellung:

Ermitteln sie die Funktionsgleichung der Funktion E aus den verfügbaren Informationen und zeichnen Sie den Graphen.

 ChatGPT

Die Funktionsgleichung der Funktion $E(t)$, die den Verlauf der Grippeepidemie in einer Stadt mit 5.000 Einwohnern beschreibt, lautet:

$$E(t) = \frac{180}{143}t^3 - \frac{270}{11}t^2 + \frac{16200}{143}t + 10$$

Dieses Polynom 3. Grades wurde basierend auf den gegebenen Bedingungen ermittelt:

1. Zu Beginn ($t = 0$) sind 10 Personen infiziert.
2. Nach einem Tag ($t = 1$) sind bereits 100 Personen erkrankt.
3. Am 3. Tag ($t = 3$) nimmt die Anzahl der Erkrankten am stärksten zu (dies entspricht dem Punkt, an dem die erste Ableitung des Polynoms maximal ist).
4. Am 10. Tag ($t = 10$) erreicht die Anzahl der Erkrankten ihr Maximum (dies entspricht dem Punkt, an dem die erste Ableitung des Polynoms null wird).

Der beigefügte Graph illustriert den Verlauf der Grippewelle. Hierbei zeigt die rote gestrichelte Linie den 3. Tag an, an dem die Zunahme der Erkrankten am stärksten ist, und die grüne gestrichelte Linie den 10. Tag, an dem die Anzahl der Erkrankten ihr Maximum erreicht. 

Um dem Ergebnis zu trauen, sollte man sich das Modell, also das zugehörige Gleichungssystem anschauen. Und man findet einen logischen Fehler:

 You

Wie lautet das Gleichungssystem?

das

bedeutet,

dass

 ChatGPT

Das Gleichungssystem zur Bestimmung der Funktionsgleichung der Grippeepidemie besteht aus vier Gleichungen, die sich aus den gegebenen Informationen ableiten lassen. Die unbekannt Koeffizienten der Polynomfunktion 3. Grades $E(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ werden durch die folgenden Bedingungen bestimmt:

1. Zu Beginn der Beobachtungen ($t = 0$) sind 10 Personen mit dem Grippevirus infiziert:

$$E(0) = 10$$

$$d = 10$$

2. Nach einem Tag ($t = 1$) sind bereits 100 Personen an Grippe erkrankt:

$$E(1) = 100$$

$$a + b + c + 10 = 100$$

logischer Fehler

3. Am 3. Tag ($t = 3$) nimmt die Anzahl an Erkrankten am stärksten zu. Dies bedeutet, dass die erste Ableitung von $E(t)$ an diesem Tag einen Extremwert (hier ein Maximum) hat:

$$E'(3) = 0$$

4. Am 10. Tag ($t = 10$) erreicht die Grippewelle ihr Maximum. Das bedeutet, dass die erste Ableitung von $E(t)$ an diesem Tag null ist:

$$E'(10) = 0$$

$$3a(10)^2 + 2b(10) + c = 0$$

$$300a + 20b + c = 0$$

Diese vier Gleichungen bilden das Gleichungssystem, das gelöst werden muss, um die Koeffizienten a , b , c und d der Funktion $E(t)$ zu bestimmen.

Interessant ist, dass bei der dritten Information verbal die Bedingung verstanden wurde („das bedeutet, dass die erste Ableitung von $E(t)$ an diesem Tag einen Extremwert (hier ein Maximum) hat“). Dann wird aber zu dieser verbal richtigen Schlussfolge das falsche mathematische Modell gewählt: $E'(3)=0$.

Aber ChatGPT ist lernfähig. Die Lernenden werden zu Lehrenden, indem sie ihre mathematische Kompetenz nützend das System zur Einsicht bringen:

You

Nein wenn die Anzahl am stärksten zunimmt, hat die Geschwindigkeit ein Maximum, also ist die zweite Ableitung gleich 0

ChatGPT

Sie haben recht, ich entschuldige mich für das Missverständnis. Wenn die Anzahl der Erkrankten am stärksten zunimmt, erreicht die Geschwindigkeit, mit der sich die Anzahl der Erkrankten ändert (dargestellt durch die erste Ableitung der Funktion $E(t)$), ihr Maximum. Dies bedeutet, dass die zweite Ableitung der Funktion $E(t)$ zu diesem Zeitpunkt gleich null sein muss.

Das korrekte Gleichungssystem, das wir aufstellen müssen, sieht dann wie folgt aus:

1. Zu Beginn der Beobachtungen ($t = 0$) sind 10 Personen mit dem Grippevirus infiziert:

$$E(0) = 10$$

$$d = 10$$

2. Nach einem Tag ($t = 1$) sind bereits 100 Personen an Grippe erkrankt:

$$E(1) = 100$$

$$a + b + c + 10 = 100$$

korrigierter Fehler

3. Am 3. Tag ($t = 3$) erreicht die Geschwindigkeit der Zunahme der Anzahl der Erkrankten ihr Maximum, also ist die zweite Ableitung von $E(t)$ zu diesem Zeitpunkt gleich null:

$$E''(3) = 0$$

$$6a(3) + 2b = 0$$

$$18a + 2b = 0$$

4. Am 10. Tag ($t = 10$) erreicht die Anzahl der Erkrankten ihr Maximum, was bedeutet, dass die erste Ableitung von $E(t)$ an diesem Tag null ist:

$$E'(10) = 0$$

$$3a(10)^2 + 2b(10) + c = 0$$

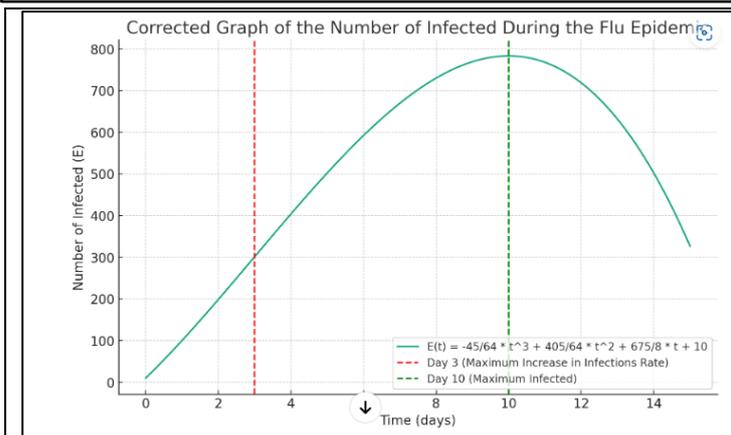
$$300a + 20b + c = 0$$

Dieses korrigierte Gleichungssystem werden wir nun lösen, um die richtigen Koeffizienten zu ermitteln.

Die endgültige korrigierte Funktionsgleichung für die Grippeepidemie, basierend auf der korrekten Annahme, dass am 3. Tag die Geschwindigkeit der Zunahme der Anzahl der Erkrankten (erste Ableitung von $E(t)$) ihr Maximum erreicht und somit die zweite Ableitung $E''(t)$ zu diesem Zeitpunkt null ist, lautet:

$$E(t) = -\frac{45}{64}t^3 + \frac{405}{64}t^2 + \frac{675}{8}t + 10$$

Der Graph zeigt den Verlauf der Anzahl der Infizierten über die Zeit. Die rote gestrichelte Linie markiert den 3. Tag, an dem die Zunahmerate der Infektionen (Geschwindigkeit) ihr Maximum erreicht, und die grüne gestrichelte Linie den 10. Tag, an dem die Gesamtzahl der Infektionen ihren Höchststand erreicht. [3-]



Sogar der Graph der Polynomfunktion wird im definierten Intervall gezeichnet.

Aber auch das Operieren, die mathematische Ermittlung der Lösung, dürfen nicht zur Black Box werden. Durch das Wolfram Plugin ist ja ChatGPT 4 bei algebraischen Operationen sehr leistungsfähig geworden. Die Kompetenz des KI Werkzeuges, seine Operationen auch verbal zu erklären, kann genutzt werden, um die Black Box des fertigen Ergebnisses zur White Box zu machen.

Notwendig für die Nutzung dieser Möglichkeiten ist eine Erziehung zu kritischem Denken, also Ergebnisse nicht selbstverständlich zu akzeptieren, sondern zu hinterfragen.

Aufgabe 04: Termumformung

You

$$\frac{1 - \frac{7 \cdot (x-2)}{x^2 - 4}}{\frac{6}{x+2}} \cdot \left(\frac{3}{x+5} + \frac{30}{x^2 - 25} \right)$$

Vereinfache den Term

ChatGPT

Um den gegebenen mathematischen Ausdruck Schritt für Schritt zu vereinfachen:

1. **Schritt:** Vereinfachen des Zählers des Hauptbruchs:

$$1 - \frac{7(x-2)}{x^2-4} = \frac{x-5}{x+2}$$

2. **Schritt:** Vereinfachen des Nenners des Hauptbruchs:

$$\frac{6}{x+2}$$

3. **Schritt:** Vereinfachen des Hauptbruchs (nachdem Zähler und Nenner vereinfacht wurden):

$$\frac{\frac{x-5}{x+2}}{\frac{6}{x+2}} = \frac{x-5}{6}$$

4. **Schritt:** Vereinfachen des zusätzlichen Teils des Ausdrucks (rechts vom Hauptbruch):

$$\frac{3}{x+5} + \frac{30}{x^2-25} = \frac{3}{x-5}$$



5. **Schritt:** Multiplizieren des vereinfachten Hauptbruchs mit dem zusätzlichen Teil:

$$\left(\frac{x-5}{6} \right) \cdot \frac{3}{x-5} = \frac{1}{2}$$

Nach der Vereinfachung ergibt sich das Endergebnis von $\frac{1}{2}$. [-]



Aufgabe 05: Operieren in der Analysis 1 (Quelle J. Lechner)

You

Berechne bitte das bestimmte Integral von 0 bis 1 der Funktion f von x ist gleich x^2 .

ChatGPT

Das bestimmte Integral der Funktion $f(x) = x^2$ von 0 bis 1 beträgt $\frac{1}{3}$. [-]

You

Gib bitte alle Rechenschritte an, wie Du zu diesem Ergebnis gekommen bist.



ChatGPT

Natürlich! Das bestimmte Integral einer Funktion $f(x)$ von a bis b wird berechnet, indem man die Stammfunktion von $f(x)$ an den Grenzen b und a auswertet und die Differenz bildet. Die Berechnung des Integrals der Funktion $f(x) = x^2$ von 0 bis 1 erfolgt wie folgt:

1. **Bestimme die Stammfunktion von $f(x) = x^2$:**

Die Stammfunktion einer Potenzfunktion x^n ist $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, solange $n \neq -1$. Für $f(x) = x^2$, ist $n = 2$, also ist die Stammfunktion $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

2. **Berechne das Integral an den Grenzen 1 und 0:**

$$F(1) = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$F(0) = \frac{0^3}{3} = 0$$

3. **Bilde die Differenz:**

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Somit ist das bestimmte Integral der Funktion $f(x) = x^2$ von 0 bis 1 gleich $\frac{1}{3}$.

Auch eine Verknüpfung der algebraischen mit der graphischen Repräsentation ist dank Wolfram Plugin möglich:

Aufgabe 06: Operieren in der Analysis 2 (Quelle J. Lechner)

You

Berechne bitte das bestimmte Integral der Funktion f von x ist gleich Sinus x In den Grenzen von 0 bis π .

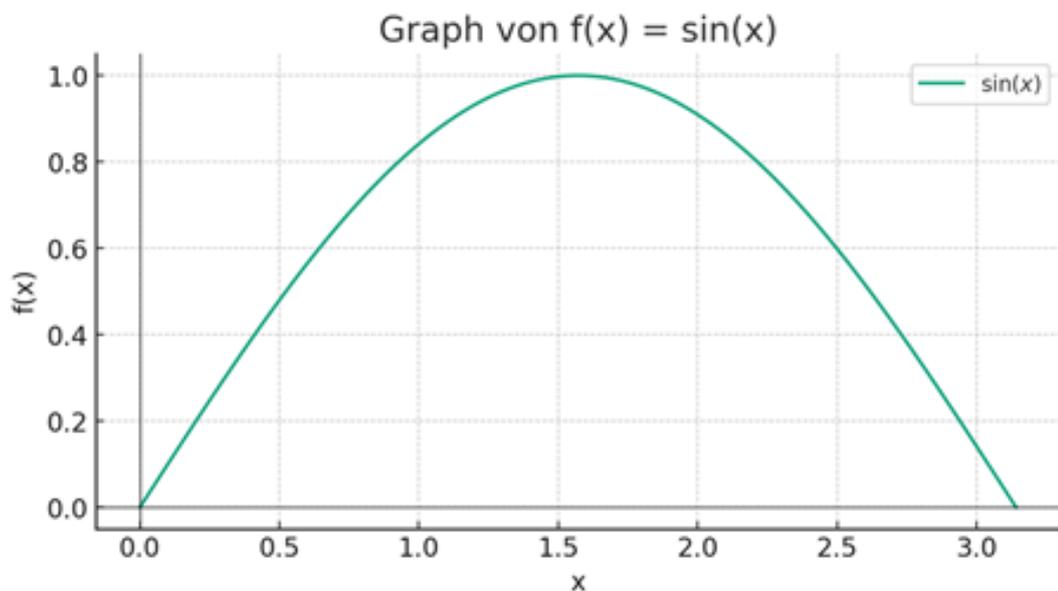
ChatGPT

Das bestimmte Integral der Funktion $f(x) = \sin(x)$ von 0 bis π beträgt ebenfalls 2. [-]

You

Zeichne bitte den Graphen der Funktion Sinus von x In den Grenzen von 0 bis π .

ChatGPT

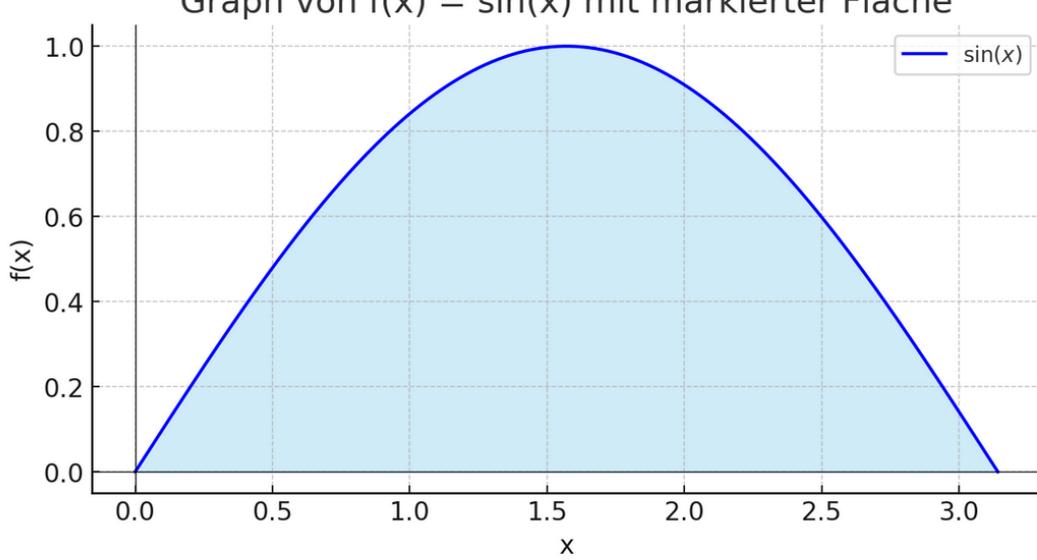


Hier ist der Graph der Funktion $f(x) = \sin(x)$ im Bereich von 0 bis π . Wie Sie sehen, schwankt der Sinuswert zwischen 0 und 1 und kehrt dann wieder auf 0 zurück. [-]

You
 Markiere bitte im Graphen die Fläche, die im Integral berechnet wurde.

ChatGPT

Graph von $f(x) = \sin(x)$ mit markierter Fläche



In diesem Graphen habe ich die Fläche unter der Kurve $f(x) = \sin(x)$ im Bereich von 0 bis π markiert. Diese Fläche entspricht dem Wert des bestimmten Integrals, den wir zuvor berechnet haben. [-]

Fragen formulieren ⇔ Denken verbalisieren. [Dörner, 1984]

Abgesehen davon, dass durch Fragen das KI System veranlasst wird, Antworten zum besseren Verständnis zu liefern oder falsche Antworten zu korrigieren, beinhaltet die Umsetzung von Denken in Sprache oft Konstruktionsprozesse und kann selbst ein Denkkakt sein, der zu stabileren mentalen Modellen führt.

Umgekehrt ist es für die Lernenden nicht immer leicht, zu sprachlich gefassten Antworten des KI Systems die entsprechenden Vorstellungen zu entwickeln. Oft ist dann ein Dialog, sind weitere Fragen nötig, um die angebotenen Lösungen zu verstehen und zu bewerten.

Probleme ⇔ Repetieraufgaben

Problem	Repetieraufgabe
„Von Problemen ist die Rede, wenn die Mittel zum Erreichen eines Zieles unbekannt sind oder die bekannten Mittel auf neue Weise zu kombinieren sind, aber auch dann, wenn über das angestrebte Ziel keine klaren Vorstellungen existieren.“ [Spring, 2003]	Bei einer Repetieraufgabe wird „lediglich der Einsatz bekannter Mittel auf bekannte Weise zur Erreichung eines klar definierten Ziels gefordert.“ [Spring, 2003]

Bei einem **Problem** besteht Diskrepanz zwischen einem Ist- und einem Soll-Wert, zwischen beiden Zuständen besteht eine Barriere, die eine Transformation erforderlich macht. Das Lösen eines Problems ist **produktiv**.

Bei einer **Aufgabe** besteht zwar eine geistige Anforderung, die Methoden zur Bewältigung sind jedoch bekannt. Meist führt bloßes Handeln bzw. das Ausführen selbstverständlicher Operationen zur erwünschten Veränderung eines Zustandes. Das Lösen einer Aufgabe ist **reproduktiv**.

Der Unterschied zwischen Problem und Repetieraufgabe ist vom Vorwissen abhängig, somit handelt es sich nicht um eine absolute Eigenschaft des Problems selbst.

Vor allem unter dem Einfluss der Prüfungssituation werden im traditionellen Unterricht überwiegend Repetieraufgaben gestellt und keine Probleme. KI bietet die Chance und macht nötig, dass der Unterricht problemlöseorientierter wird. Das wäre eine deutliche Qualitätsverbesserung. Erst dadurch bekommt das Fach Mathematik seinen unverzichtbaren Platz im Fächerkanon.

3.2 Schlussfolgerungen zu Antworten (2) und (3)

KI ist eine völlig neue Brille, die Welt um herum zu sehen und zu modellieren. Damit eröffnen sich neue Chancen, Mathematikunterricht sinnvoller zu machen. Aber umso mehr ist der Erwerb der mathematischen Denktechnologie nötig, um in der Lage zu sein, vom Werkzeug angebotene Lösungen zu hinterfragen und nicht einer Manipulation durch KI ausgeliefert zu sein.

Die Systeme sind lernfähig. Also passt die Aussage von Buchberger: „*Everyone should be a teacher and nobody should be a teacher only*“. Die Systeme können auch Fehler machen. Durch Analyse der Fehler, durch gezielte Fragen an das System werden die Schülerinnen und Schüler zu Lehrenden und entwickeln dadurch ihre mathematische Kompetenz.

Damit verändert sich aber auch die Rolle der Lehrerinnen und Lehrer. Sie sind nicht mehr die einzigen Wissensvermittler, die Lernenden verfügen nun über einen neuen Experten, das KI-System. Damit verschiebt sich die Funktion von der Wissensvermittlung zur Lernbegleitung, man kann von einer Art „Navigationsfunktion“ zur Lernunterstützung sprechen.

Die Lernenden müssen also auch weiterhin in die Welt der Mathematik eindringen, um eine kompetente Kommunikation mit KI führen zu können. „*Give students a chance to repeat evolution!*“ (Zitat Buchberger Antwort (5)). Nach Piaget erfolgt die Entwicklung der Mathematik in den Lernenden ja ähnlich wie die Entwicklung der Mathematik in der Geschichte.

Didaktisch ist das „White Box/Black Box Prinzip“ ein guter Wegweiser für diesen Weg.

Das White Box/Black Box Prinzip [Buchberger, 1989], [Heugl, 2014]

Phase 1: Die White Box Phase - Phase des verstehenden Lernens

In der White Box Phase erforschen, entdecken die Lernenden den Weg zur Trivialisierung

- Formulieren des Problems,
- Finden einer Vermutung,
- Entwickeln von Begriffen oder Algorithmen,

- Begründen, Beweisen,
- Nutzen von Black Boxes die in früheren White Boxes erforscht wurden.
- Rechnen ausreichend vieler Übungsaufgaben ohne Technologie

Phase 2: Die Black Box Phase - Phase des erkennenden und begründeten Anwendens

In der Black Box Phase nutzen wir die Trivialisierung zum Problemlösen.

- Kommunizieren mit KI
- Entscheidung für ein Konzept, für einen Algorithmus
- Ausführung durch das KI als Black Box
- Kontrolle der Korrektheit der angebotenen Lösungen. Analyse von Fehlern.
- Testen, Interpretieren, Bewerten der von KI angebotenen Lösung

3.3 Schlussfolgerungen zur Antwort (4)

Das Jammern betreffend die Trivialisierung von Mathematik habe ich jedes Mal erlebt, wenn neue Werkzeuge verfügbar waren, beim ersten Taschenrechner und besonders bei der Einführung von CAS. Das wiederholt sich jetzt bei der Diskussion um KI. Man vergisst dabei, dass, wie Buchberger es ausdrückt, Trivialisierung ein Grundprinzip der mathematischen Entwicklung ist. Das Multiplizieren ist ja auch die Trivialisierung der Addition gleicher Summanden und niemand erwartet, dass man sich beim Multiplizieren immer daran erinnert. Auch bei der Berechnung eines Integrals denkt man nicht ständig an den Grenzwert von Produktsummen. Für die mathematische Denktechnologie ist aber wesentlich, dass man sich zuerst einmal mit diesem Grenzwert beschäftigt hat.

Daher ist ein wesentliches Ziel des Mathematiklernens sich mit dem Weg zur Trivialisierung zu beschäftigen, der wie Buchberger es sagt, absolut nicht trivial ist.

Wenn durch KI weitere Aspekte menschlichen Denkens und Handelns „trivialisieren“, werden, ist die Gefahr, dass man sich zurücklehnt und sich vom Werkzeug führen und steuern lässt.

Davor habe ich schon bei der Nutzung von MMS (**M**odulare **M**athematik **S**ysteme) wie GeoGebra gewarnt. Ich habe Bedenken wegen der vielen fertigen Applets, die angeboten werden, wo es genügt, Schieberegler zu bewegen, um zu beobachten, was der Computer tut. Meine didaktische Botschaft war immer: Nicht der Computer darf den Lernenden steuern, der Lernende muss den Computer steuern.

Diese Botschaft wird bei der Nutzung von KI noch viel wichtiger:

Wir müssen das Werkzeug KI zu unserem Nutzen steuern, das System darf nicht uns steuern und manipulieren. Dazu ist aber eine mathematische Eigenkompetenz notwendig, um die Kommunikation mit KI kompetent zu führen. Die oben angeführten Aufgaben zeigen, wie man das KI Werkzeug durch Fragen und Behauptungen nutzen kann, um den Weg zur Trivialisierung verständlich zu machen.

3.4 Schlussfolgerungen aus Experimenten mit ChatGPT:

Wichtige Kompetenzen/Aktivitäten bei Nutzung von KI Systemen:

- **Fragen stellen, weiter fragen:**

Fragen stellen kann nur jemand, der über die gestellte Frage etwas weiß: Im traditionellen Unterricht stellen die Fragen viel häufiger die Lehrenden. Als Vorbereitung auf das Arbeiten mit ChatGPT sollen die Schülerinnen und Schüler angeregt werden, Fragen zu stellen.

Die Analyse der Antworten von ChatGPT erfordert oft weitere Fragen.

- **Wissen für das Fragen erwerben:** Nur wenn man selber Kompetenzen im Bereich der für das jeweilige Problem erforderlichen Mathematik hat, kann man die von Chat GPT angebotenen Lösungen analysieren und bewerten.

- **Faktencheck:** Die Brauchbarkeit des angebotenen Modells sowie die mathematische Korrektheit des Modells und des Lösungsweges müssen überprüft werden. Zur Klärung sind oft weitere Fragen nötig. Dieser Faktencheck kann auch die Nutzung externer mathematischer Werkzeuge erfordern wie zum Beispiel ein CAS Werkzeug

- **Den Lösungsweg vom KI Werkzeug erklären lassen:** ChatGPT liefert oft fertige Antworten als Black Box oder überspringt Gedankenschritte auf dem Lösungsweg. Durch zusätzliche Fragen kann man eine genauere Erklärung verlangen.

- **Den Lösungsweg selber nachvollziehen:**

„Am besten lehrt man eine Tätigkeit, indem man sie vorführt“ (Comenius)

„Am besten lernt man eine Tätigkeit, indem man sie ausführt“ [Freudenthal, 1977]

Dieses Zitat von Hans Freudenthal passt sehr gut zur Beziehung zwischen dem Werkzeug ChatGPT und den Lernenden. Das KI Werkzeug führt Modellbildungen und mathematische Lösungen samt Interpretationen vor. Aber stabilere mathematische Modelle als Lernergebnis sind nur zu erwarten, wenn die Lernenden den Lösungsprozess aktiv nachvollziehen. Außerdem können Fehler oft nur dadurch entdeckt werden.

- **Zusammenspiel mit anderen Technologien,** zum Beispiel mit digitalen „Modularen Mathematiksystemen“ (MMS). Erstens ist es nicht ratsam, sich nur auf Erklärungen und Ergebnisse von ChatGPT zu verlassen, indem man MMS als Kontrollinstrumente nutzt, und zweitens bietet das Zusammenspiel verschiedener Werkzeuge die Chance, verschiedene Repräsentationen mathematischer Objekte parallel zu vernetzen, was wiederum zu stabileren mentalen Modellen beim Lernprozess führt. Besonders empfehlenswert ist derzeit die Nutzung von MMS für graphische Repräsentationen, da die derzeitige Version ChatGPT 4 Schwächen bei graphischen Darstellungen zeigt.

Schlussgedanken:

Im Mittelalter gab es die ehrbare Zunft der „Rechenmeister“. Sie ist ausgestorben, als die Menschen zurzeit von Adam Riehs selber lernten zu rechnen.

Mathematiklehrende im KI Zeitalter werden nur aussterben, wenn sie sich noch immer nur als Rechenmeister sehen. Wenn sie die Chancen von KI nutzen, kann Mathematik eine neue, größere Rolle beim Problemlösen spielen.

Die durch KI mögliche Trivialisierung mathematischen Handelns erfordert eine Schwerpunktverlagerung auf den Weg zur Trivialisierung. Die Lernenden müssen die für das

Problemlösen nötige Mathematik aktiv entwickeln, um die Angebote von KI kritisch hinterfragen zu können.

Wie die Beispiele zeigen, sind die aktuellen KI Werkzeuge mathematisch nicht perfekt. Es ist mathematische Kompetenz erforderlich, um die Korrektheit der mathematischen Lösungen des KI Werkzeuges zu überprüfen. Dabei auftretende Fehler können interessante Gegenstände des Lernprozesses sein.

Lernen und Lehren mit Nutzung von KI führt zu einer deutlichen Veränderung der Lehr- und Lernformen. Es ändert sich sowohl die Rolle der Lehrenden wie die der Lernenden. Die Lernenden müssen dazu angeleitet werden, kritische Fragen zu stellen, die traditionell von den Lehrenden erwartet würden.

Je nachdem mit welchem didaktischen Konzept man KI Systeme im Mathematikunterricht nutzt, können sie gefährliche Waffen oder sehr wertvolle Unterstützer für den Lernprozess sein. Meine Absicht war, nicht die Funktion als Waffe, sondern die Chancen zu zeigen, die sich aus der Nutzung von KI Systemen im Unterricht ergeben.

Quellen:

- Buchberger, B. [1990]: "Should students learn integration rules?" ACM SIGSAM Bulletin 24(1), pp. 10-17. January 1990.
- Buchberger, B. [2002]: „Teaching without Teachers?“ Talk at VISIT-ME 2002, Vienna, July 10, 2002. <http://rfdz.ph-noe.ac.at/acdca/konferenzen/vienna-2002.html>
- Buchberger, B. [2014]: „The Future of Mathematics: A Personal View and Comments on Math Education“ Keynote at TIME 2014, Krems, Austria July 2, 2014
<https://journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/article/view/76/79>
- Buchberger, B. [2023_1]: "Is ChatGPT Smarter than Master's Applicants?" RISC Report Series No. 23-04. ISSN: 2791-4267. <https://doi.org/10.35011/risc.23-04>.
- Buchberger, B. [2023_3]: „Automated programming, symbolic computation, machine learning: my personal view“. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence (springer.com).
<https://doi.org/10.1007/s10472-023-09894-7>
- ChatGPT 4, 2023: Optimizing Language Models for Dialogue. <https://openai.com/blog/chatgpt>
- Dörner, D. [1984]: „Denken, Problemlösen und Intelligenz“. Psychologische Rundschau 1984, Band XXXV, Heft 1, S. 10—2.
- Freudenthal, H. 1977: „Mathematik als pädagogische Aufgabe“, Klett Studienbücher Band 1, 1977, S. 107 ISBN 3-12-983220-3
- Helfrich-Schkarbanenko, A, 2023: "Mathematik und ChatGPT" Springer Verlag GmbH DE. ISBN 978-3-662-68208-1 ISBN 978-3-662-68209-8 (eBook). <https://doi.org/10.1007/978-3-662-68209-8>
- Heugl, H. [2014]: „Mathematikunterricht mit Technologie – ein didaktisches Handbuch mit einer Vielzahl von Aufgaben“. Veritas-Verlag, Linz. ISBN 978-3-7101-0431-2
- Hischer, H. [2023]: „ChatGPT und Mathematikunterricht - eine didaktische Herausforderung?“ GDM Mitteilungen 115-2023. S.6-11

- IDM Klagenfurt, 2009: „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“
https://www.aau.at/wp-content/uploads/2017/10/sRP-M_September_2009-2.pdf
- Lutz-Westphal, B. [2023]: "ChatGPT und der „Faktor Mensch“ im schulischen Mathematikunterricht" Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 31, no. 1, 2023, S. 19-21. <https://doi.org/10.1515/dmvm-2023-0008>
- RISC, [2014]: „Theorema“. Research Institute for Symbolic Computation.
<https://www3.risc.jku.at/research/theorema/software/>
- Spering, M. [2003]: “Praktisches Problemlösen”. Universität Heidelberg Psychologisches Institut
Dipl.-Psych. Miriam Spering.
https://www.psychologie.uni-heidelberg.de/ae/allg/mitarb/ms/PH_Einfuehrung.pdf