Kenntnisse über Kegelschnitte mit dem modularen Mathematiksystem der TI-Nspire™ CX CAS Technologie anschaulich und effektiv erlernen
Teil1

Wolfgang Häfner

Ein Lehrbuch aus meinen ersten Berufsjahren als Lehrer brachte mich auf die Idee. Die Behandlung der Kegelschnitte in der Oberstufe in den sechziger und siebziger Jahren war doch recht mühsam.
Mit den Hilfsmitteln, die uns heute zur Verfügung stehen, wäre der Lernprozess anschaulicher und effektiver gewesen. Ich denke hier insbesondere an die Verwendung dynamischer Geometriesoftware und die Nutzung eines CAS bei der Lösung komplexer Gleichungen und der Ermittlung von Ableitungen.
Gedacht ist der Beitrag beispielsweise zur Nutzung im Rahmen der Begabtenförderung. Deshalb wird auch die Datei Kegelschnitte1.tns zum Download bereitgestellt. Vor allem die Geometry-Seiten können so genutzt und müssen nicht selbst entwickelt werden.

Von folgenden Voraussetzungen soll ausgegangen werden:
1. Der gerade Kreiskegel wurde als Punktmenge von Geraden definiert.
2. Die Kegelschnitte wurden als Punktmengen definiert, die beim Schnitt eines geraden Kreiskegels mit einer Ebene entstehen (Fallunterscheidung)
3. Die den Ortsdefinitionen zugrunde liegende Eigenschaften der Kegelschnitte wurden hergeleitet (Dandelinsche Kugeln)

Ortsdefinitionen der Kegelschnitte

Ellipse:
Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte einer Ebene, für die die Summe ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 dieser Ebene konstant und größer als der Abstand von F_1 zu F_2 ist. F_1 und F_2 heißen die Brennpunkte der Ellipse.

Hyperbel:
Eine Hyperbel ist die Menge aller Punkte einer Ebene, für die der Betrag der Differenz ihrer Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 dieser Ebene konstant und ungleich Null ist. F_1 und F_2 heißen die Brennpunkte der Hyperbel.

Parabel:
Eine Parabel ist die Menge aller Punkte einer Ebene, für die der Abstand von einem festen Punkt F dieser Ebene und der Abstand von einer Geraden l dieser Ebene einander gleich sind. F heißt der Brennpunkt und l die Leitlinie der Parabel.

Die Konstruktion der Kegelschnitte

Auf der Basis der Ortsdefinitionen können Kegelschnitte konstruiert werden.
Solche Konstruktionen sind jeweils auf der Seite 1 der Probleme 1, 2 und 3 in der Datei Kegelschnitte1.tns erfolgt. Bei allen Konstruktionen wurden die benötigten Abstände gemessen. Die Messergebnisse und einige weitere Konstruktionsdetails wurden ausgeblendet.

Abbildung 1:
Den Punkt P erhält man als Schnittpunkt der Kreise um F_1und F_2 mit den Radien $\overline{A_1T}$ bzw. $\overline{TA_2}$.
$\overline{A_1A_2}$ ist die konstante „Abstandssumme“.

Bewegen Sie den Punkt T zwischen den beiden schwarzen Punkten.

Die Ellipse ist dann die Ortskurve des Punktes P bezüglich T.

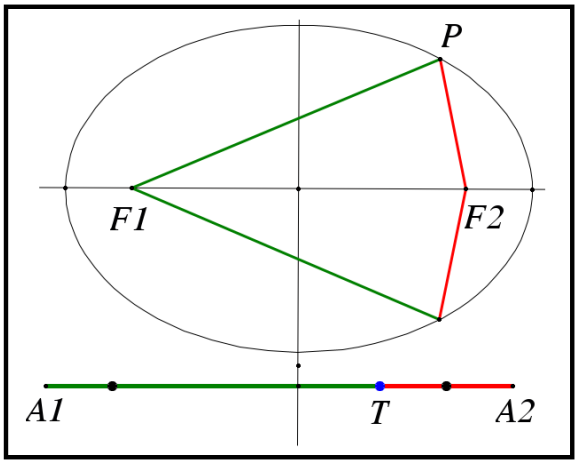


Abb. 1

Abbildung 2:
Den Punkt P erhält man als Schnittpunkt der Kreise um F_1und F_2 mit den Radien $\overline{A_1T}$ bzw. $\overline{TA_2}$.
Damit gilt: $|\overline{F_1P} - \overline{PF_2}| = \overline{A_1A_2} = konst \neq 0$

Bewegen Sie den blauen Punkt T auf der Gerade A_1A_2.

Die Hyperbel ist dann die Ortskurve des Punktes P bezüglich T.

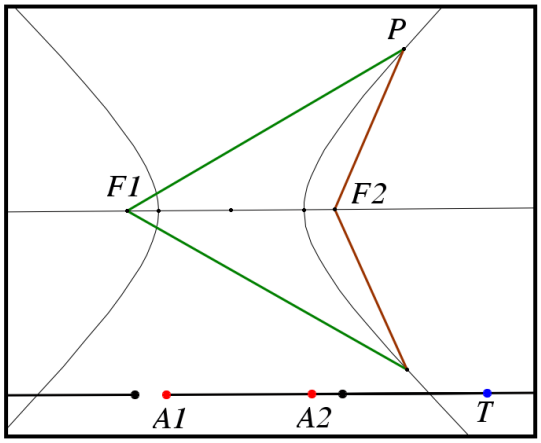


Abb. 2

Abbildung 3:
Den Punkt P erhält man als Schnittpunkt des Kreises um F mit dem Radius $\overline{L_0T}$ mit der Gerade g. Damit gilt: $|\overline{PF}| = |\overline{PL}|$

Bewegen Sie den blauen Punkt T auf der Gerade L_0F.

Die Parabel ist dann die Ortskurve des Punktes P bezüglich T.

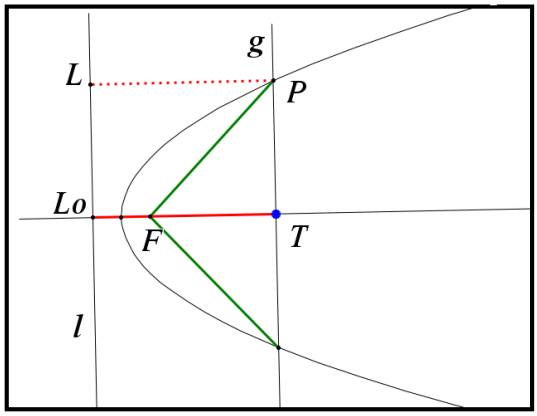
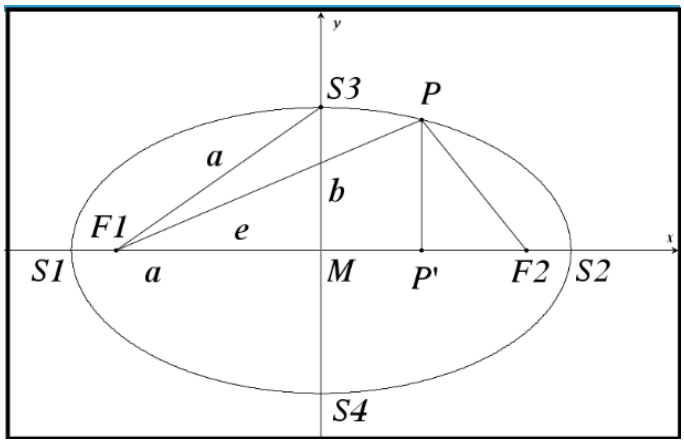


Abb. 3

Die Mittelpunktsgleichungen der Ellipse und der Hyperbel

Der Mittelpunkt der Ellipse bzw. Hyperbel ist der Koordinatenursprung eines kartesischen Koordinatensystems, die Brennpunkte sind Punkte der x-Achse.

Ellipse:



$S_1.S_2, S_3, S_4$: Scheitelpunkte der Ellipse, M: Mittelpunkt der Ellipse, F_1, F_2: Brennpunkte
$\overline{S_1S_2}$: Hauptachse, Länge $2a$ $\overline{S_3S_4}$: Nebenachse, Länge 2b
S_1S_2, S_3S_4: Symmetrieachsen
$\overline{F_1M} = e$: lineare Exzentrizität
F_1MS_3: charakteristisches Dreieck

Es gilt
$\overline{F_1S_1} + \overline{S_1F_2} = \overline{S_1F_2} + \overline{F_2S_2} = 2a \quad \Rightarrow \quad \overline{F_1P} + \overline{PF_2} = 2a$
Dabei ist $P(x|y)$ ein beliebiger Punkt der Ellipse.
Damit gilt dann weiter
$\sqrt{y^2 + (e+x)^2} + \sqrt{y^2 + (e-x)^2} = 2a$
$e = \sqrt{a^2 - b^2}$
$\sqrt{y^2 + \left(\sqrt{a^2 - b^2} + x\right)^2} + \sqrt{y^2 + \left(\sqrt{a^2 - b^2} - x\right)^2} = 2a$

$$\text{solve}\left(\sqrt{y^2+\left(\sqrt{a^2-b^2}+x\right)^2}+\sqrt{y^2+\left(\sqrt{a^2-b^2}-x\right)^2}=2\cdot a,y\right)$$

$$y=\frac{-b\cdot\sqrt{a^2-x^2}}{a} \text{ and } \frac{b^2\cdot\left(x^2-a^2\right)}{a^2}\le 0 \text{ or } y=\frac{b\cdot\sqrt{a^2-x^2}}{a} \text{ and } \frac{b^2\cdot\left(x^2-a^2\right)}{a^2}\le 0$$

Die Bedingung $\frac{b^2\cdot(x^2-a^2)}{a^2} \le 0$ ist stets gültig, da $|x| \le a$ und $a \neq 0$ gilt.
Die Lösung der Gleichung kann nun weiter umgeformt werden.

$$y = \pm\frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

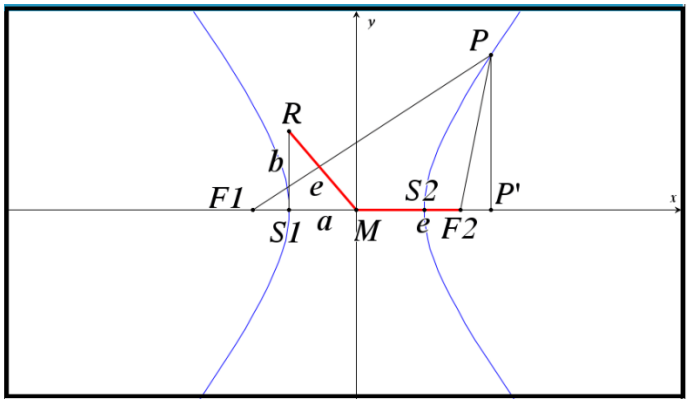
$$y^2 = \frac{b^2\cdot(a^2-x^2)}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1-\frac{x^2}{a^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Hinweis: Da die Gleichungen für die Kegelschnitte keine Funktionsgleichungen sind, muss man sie für die grafische Darstellung als Relation eingeben.

Hyperbel



S_1, S_2: Scheitelpunkte der Hyperbel, M: Mittelpunkt der Hyperbel, F_1, F_2: Brennpunkte
$\overline{S_1S_2}$: Hauptachse, Länge $2a$
$y-Achse, x-Achse$: Symmetrieachsen
$\overline{MF_2} = \overline{MR} = e$: lineare Exzentrizität
S_1MR: charakteristisches Dreieck

Es gilt
$|\overline{F_1\,S_1} - \overline{S_1\,F_2}\,| = \overline{S_1F_2} - \overline{F_2S_2} = \overline{S_1S_2} = 2a$
$|\overline{F_1P} - \overline{PF_2}| = 2a$
Dabei ist $P(x|y)$ ein beliebiger Punkt der Hyperbel.

Also gilt dann weiter

$$\left|\sqrt{y^2+(e+x)^2}-\sqrt{y^2+(e-x)^2}\right|=2a$$

$$e=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\left|\sqrt{y^2+\left(\sqrt{a^2+b^2}+x\right)^2}-\sqrt{y^2+\left(\sqrt{a^2+b^2}-x\right)^2}\right|=2a$$

$$\text{solve}\left(\left|\sqrt{y^2+\left(\sqrt{a^2+b^2}+x\right)^2}-\sqrt{y^2+\left(\sqrt{a^2+b^2}-x\right)^2}\right|=2\cdot a,y\right)$$

$$y=\frac{-b\cdot\sqrt{x^2-a^2}}{a} \text{ and } \frac{b^2\cdot\left(x^2-a^2\right)}{a^2}\geq 0 \text{ and } a\geq 0 \text{ or } y=\frac{b\cdot\sqrt{x^2-a^2}}{a} \text{ and } \frac{b^2\cdot\left(x^2-a^2\right)}{a^2}\geq 0 \text{ and } a\geq 0$$

Die Bedingung $\frac{b^2\cdot(x^2-a^2)}{a^2}\geq 0$ ist stets gültig, da $|x|\geq a$ und $a\neq 0$ gilt.
Die Lösung der Gleichung kann nun weiter umgeformt werden.

$$y=\pm\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

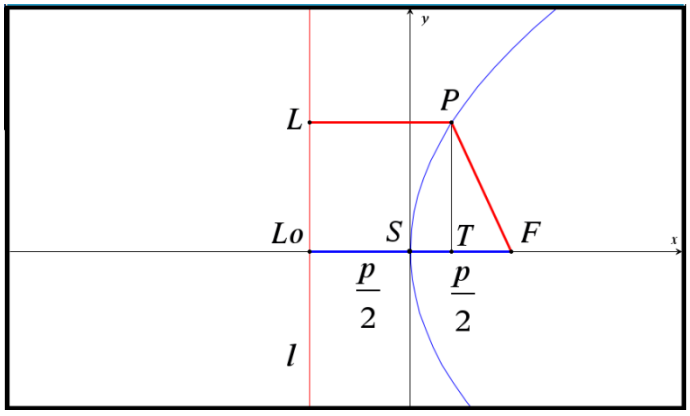
$$y^2=\frac{b^2\cdot(x^2-a^2)}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1$$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Die Scheitelgleichung der Parabel

Wir wählen das Koordinatensystem so, dass die x-Achse durch den Brennpunkt F geht und die Leitlinie l orthogonal zur x-Achse ist. Die x-Achse ist daher die Symmetrieachse der Parabel, ihr Schnittpunkt mit l sei L_0.
Außerdem wählen wir die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{L_0F}$ als y-Achse.
Der Koordinatenursprung ist also der Scheitelpunkt S der Parabel, denn er liegt auf der Achse (Strahl SF) der Parabel und es gilt $\overline{L_0S}=\overline{SF}$.



$\overline{L_0F} = p$: Halbparameter der Parabel
$2p$: Parameter der Parabel

Es gilt
$\overline{L_0S} = \overline{SF} = \frac{p}{2}$
$\overline{LP} = \overline{PF}$
Dabei ist $P(x|y)$ ein beliebiger Punkt der Parabel.
Daraus folgt

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{y^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2}$$

$$\text{solve}\left(\frac{p}{2}+x=\sqrt{y^2+\left(\frac{p}{2}-x\right)^2}, y\right) \mid p>0 \text{ and } x>0$$
$$y=-\sqrt{2\cdot p\cdot x} \text{ and } x>0 \text{ and } p>0 \text{ or } y=\sqrt{2\cdot p\cdot x} \text{ and } x>0 \text{ and } p>0$$

Durch das Quadrieren der Lösung erhält man die Scheitelpunktsgleichung.
$y = \pm\sqrt{2 \cdot p \cdot x}$
$\boldsymbol{y^2 = 2 \cdot p \cdot x}$

Tangenten

Ellipse:

$$\text{impDif}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, x, y\right) \qquad \frac{-b^2\cdot x}{a^2\cdot y}$$
$$\text{impDif}\left(\frac{x\cdot x0}{a^2}+\frac{y\cdot y0}{b^2}=1, x, y\right) \qquad \frac{-b^2\cdot x0}{a^2\cdot y0}$$

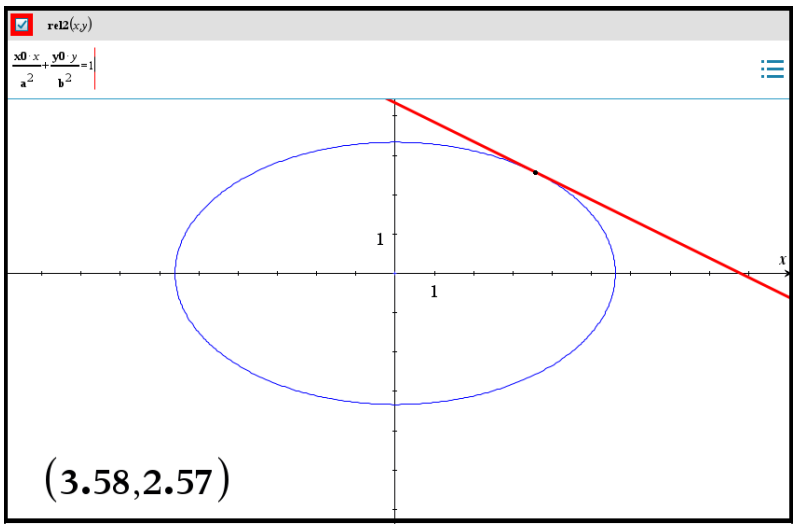
Die Ableitung liefert uns die Steigung der Tangente im Ellipsenpunkt $P(x_0|y_0)$

$$m = -\frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0} \qquad (y_0 \neq 0)$$

Damit erhält man die Tangentengleichung und durch Umformung dann auch die übliche Form.

$$y - y_0 = -\frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0} \cdot (x - x_0)$$
$$y - y_0 = -\frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0} \cdot x - \left(-\frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0}\right) \cdot x_0 \qquad \mid \cdot \frac{y_0}{b^2}$$
$$\frac{y \cdot y_0}{b^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} = -\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{{x_0}^2}{a^2}$$
$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1 \qquad \boldsymbol{\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1}$$

Beispiel:



Setzt man in die Gleichung $\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$ $P_0(a|0)$ bzw. $P_0(-a|0)$ ein, so erhält man $x = a$ bzw. $x = -a$.
Wegen der Symmetrie zur x-Achse sind das die Gleichungen der entsprechenden Tangenten, woraus folgt, dass die hergeleitete Tangentengleichung auch für den Sonderfall $y_0 = 0$ gilt.

Hyperbel:

$$\text{impDif}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x, y\right) \qquad \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$$

$$\text{impDif}\left(\frac{x \cdot x0}{a^2} - \frac{y \cdot y0}{b^2} = 1, x, y\right) \qquad \frac{b^2 \cdot x0}{a^2 \cdot y0}$$

Die Ableitung liefert uns die Steigung der Tangente im Hyperbelpunkt $P(x_0|y_0)$

$$m = \frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0} \qquad (y_0 \neq 0)$$

Damit erhält man die Tangentengleichung und durch Umformung dann auch die übliche Form.

$$y - y_0 = \frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0} \cdot x - \frac{b^2 \cdot x_0}{a^2 \cdot y_0} \cdot x_0 \qquad | \cdot \frac{y_0}{b^2}$$

$$\frac{y \cdot y_0}{b^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} = \frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{{x_0}^2}{a^2}$$

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = \frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1; \qquad \boldsymbol{\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1}$$

Auch hier gilt wie bei der Ellipse die Tangentengleichung für den Sonderfall $y_0 = 0$.

Parabel:

impDif$\left(y^2=2\cdot p\cdot x,x,y\right)$ $\quad \frac{p}{y}$

impDif$\left(y\cdot y0=p\cdot\left(x+x0\right),x,y\right)$ $\quad \frac{p}{y0}$

Die Ableitung liefert uns die Steigung der Tangente im Punkt $P(x_0|y_0)$ der Parabel.
$m=\frac{p}{y_0} \qquad (y_0\neq 0)$
Damit erhält man die Tangentengleichung und durch Umformung dann auch die übliche Form.

$$y-y_0=\frac{p}{y_0}\cdot(x-x_0) \qquad |\ \cdot y_0$$
$$y\cdot y_0-{y_0}^2=p\cdot x-p\cdot x_0 \qquad |+2px_0$$
$$y\cdot y_0-({y_0}^2-2px_0)=p\cdot x+p\cdot x_0$$

Wegen ${y_0}^2-2px_0=0$, folgt $\boldsymbol{y\cdot y_0=p\cdot(x+x_0)}$.
Auch hier kann man leicht zeigen, dass diese Gleichung auch für den Fall $y_0=0$ gilt.

Asymptoten der Hyperbel

Zuerst untersucht man Ursprungsgeraden und Hyperbeln in Mittelpunktslage auf gemeinsame Punkte.

$I)\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$II)\ y=m\cdot x$

solve$\left(\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=m\cdot x\end{cases},\{x,y\}\right)$

$$x=-a\cdot\sqrt{\frac{-1}{a^2\cdot m^2-b^2}}\cdot b \text{ and } y=-a\cdot\sqrt{\frac{-1}{a^2\cdot m^2-b^2}}\cdot b\cdot m \text{ and } \frac{a^2\cdot b^2\cdot m^2}{a^2\cdot m^2-b^2}\le 0 \text{ and } a\neq 0 \text{ and } b\neq 0$$
$$\text{or } x=a\cdot\sqrt{\frac{-1}{a^2\cdot m^2-b^2}}\cdot b \text{ and } y=a\cdot\sqrt{\frac{-1}{a^2\cdot m^2-b^2}}\cdot b\cdot m \text{ and } \frac{a^2\cdot b^2\cdot m^2}{a^2\cdot m^2-b^2}\le 0 \text{ and } a\neq 0 \text{ and } b\neq 0$$

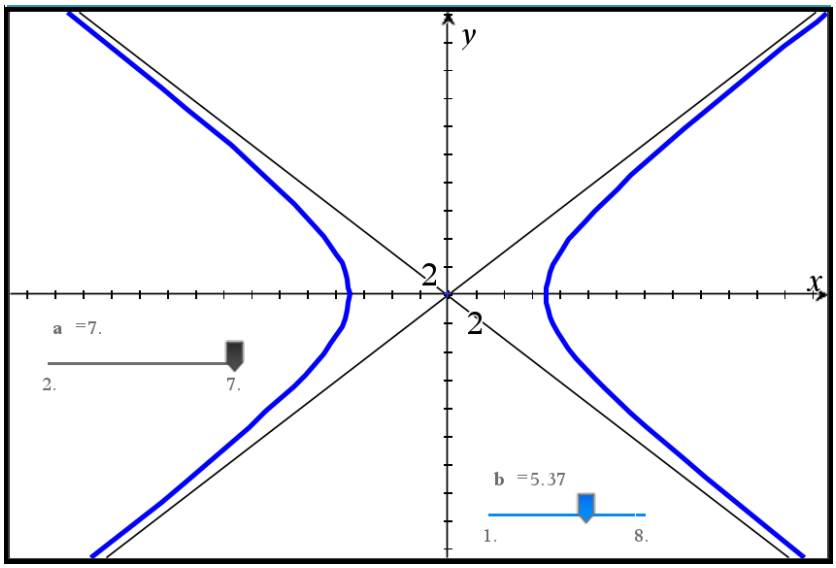
solve$\left(b^2-a^2\cdot m^2>0,m\right)|a>0 \text{ and } b>0 \qquad \frac{-b}{a}<m<\frac{b}{a} \text{ and } a>0 \text{ and } b>0$

Der Ausgabe im Calculator entnimmt man, dass sich Gerade und Hyperbel nur schneiden, wenn $|m| < \frac{b}{a}$ ist. Da also für $|m| \geq \frac{b}{a}$ keine Schnittpunkte existieren, liegt die Vermutung nahe, dass die Geraden mit den betragsmäßig kleinsten dieser möglichen Steigungen Asymptoten der Hyperbel sind.
Das sind also die Geraden mit den Gleichungen $a_1(x) = \frac{b}{a} \cdot x$ und $a_2(x) = -\frac{b}{a} \cdot x$.

Als Nachweis genügt wegen der Symmetrie bezüglich der Koordinatenachsen folgende Grenzwertbetrachtung:

$$\text{solve}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{yq}{b^2} = 1, yq\right) \qquad yq = \frac{b^2 \cdot \left(x^2 - a^2\right)}{a^2}$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{b \cdot x}{a} - \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}\right) \qquad 0$$



Quelle:
Frank, Brigitte, „Mathematik 12“, B. Kegelschnitte, Verlag Volk und Wissen, Berlin 1974