MMS-Aufgaben für das Fach Mathematik

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder (Jhg. 2022)

Hubert Langlotz
Wilfried Zappe

T³ DEUTSCHLAND

Teachers Teaching with Technology™

Autoren:
Hubert Langlotz, Wilfried Zappe

Dieses und weiteres Material steht Ihnen zum pdf-Download bereit: **www.t3deutschland.de** sowie unter **www.ti-unterrichtsmaterialien.net**

MMS-Aufgaben für das Fach Mathematik

Die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik wird in zwei Teilen durchgeführt.

Im Prüfungsteil A ist eine Verwendung von Hilfsmitteln nicht vorgesehen, im Prüfungsteil B dürfen Hilfsmittel verwendet werden. Beide Prüfungsteile enthalten Aufgaben zu jedem der Sachgebiete Analysis, Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Stochastik.

Der Prüfungsteil A besteht aus mehreren kurzen, nicht zusammenhängenden Aufgaben. Für den Prüfungsteil B sind umfangreichere Aufgaben vorgesehen, für deren Bearbeitung u. a. als digitales Hilfsmittel ein modulares Mathematiksystem MMS[1] vorgesehen ist.

Grundlegendes Anforderungsniveau

Die insgesamt zu erreichenden 100 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:

Sachgebiet	Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel)	Prüfungsteil B (mit Hilfsmitteln)
Analysis	25	35
Stochastik		20
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra		20

Für den Prüfungsteil A ist eine Arbeitszeit von insgesamt 60 Minuten, für den Prüfungsteil B von insgesamt 165 Minuten vorgesehen.

Erhöhtes Anforderungsniveau

Die insgesamt zu erreichenden 120 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:

Sachgebiet	Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel)	Prüfungsteil B (mit Hilfsmitteln)
Analysis	30	40
Stochastik		25
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra		25

Für den Prüfungsteil A ist eine Arbeitszeit von insgesamt 70 Minuten, für den Prüfungsteil B von insgesamt 200 Minuten vorgesehen.

[1]MMS bestehen aus Modulen wie einem Computeralgebramodul, einem Modul zum Darstellen von Funktionsgraphen, einem dynamischen Geometriemodul, einem Modul zur Bestimmung von Werten von Wahrscheinlichkeitsverteilungen oder einem Tabellenkalkulationsmodul, die in geeigneter Weise korrespondieren.

Für jedes Prüfungsjahr stellt das IQB den Ländern in Abituraufgabenpools für die Fächer Deutsch, Englisch, Französisch und Mathematik Aufgaben für den Einsatz in der Abiturprüfung zur Verfügung. Veröffentlicht werden nur diejenigen Aufgaben der Pools, die von den Ländern entnommen wurden. Die Veröffentlichung der Aufgaben erfolgt ausschließlich online. Die Aufgaben können hier aus urheberrechtlichen Gründen nicht abgedruckt werden.

Die Aufgaben für die Jahre 2017 - 2022 finden Sie auf den Seiten des IQB bzw. für das Jahr 2022 direkt über den Link in der entsprechenden Fußnote der Lösungen in diesem Heft.
In der Vereinbarung der Länder wird die Funktionalität des zugelassenen CAS beschrieben:

Es wird vorausgesetzt, dass das CAS über Funktionen u. a. verfügt, eigens zum

- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen (jeweils algebraisch),
- Differenzieren und Integrieren (jeweils algebraisch),
- Rechnen mit Vektoren und Matrizen (jeweils algebraisch),
- Berechnen von einzelnen und kumulierten Werten der Binomialverteilung sowie von Werten der Normalverteilung,
- Durchführen von Berechnungen in Tabellen,
- Darstellen von Graphen.

Außerdem wird vorausgesetzt, dass das CAS vor seiner Verwendung in einen Zustand versetzt wird, in dem ein Zugriff auf Dateien und Programme, die nicht zum Lieferumfang oder zu einem Systemupdate gehören, unterbunden ist.

Hier bietet sich z. B. der Press-To-Test-Modus an.[2] Erwähnenswert ist außerdem, dass in Zukunft statt des Begriffs CAS der Begriff MMS genutzt werden soll.

Diese Regelungen gelten bis zum **Abiturjahrgang 2028**.

Ab dem **Abiturjahrgang 2029** gelten neue Regelungen.[3]

[2] https://www.youtube.com/watch?v=PYm5jDoDE8Y
[3] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/abitur/dokumente/mathematik/M_Hinweise_zur_V.pdf

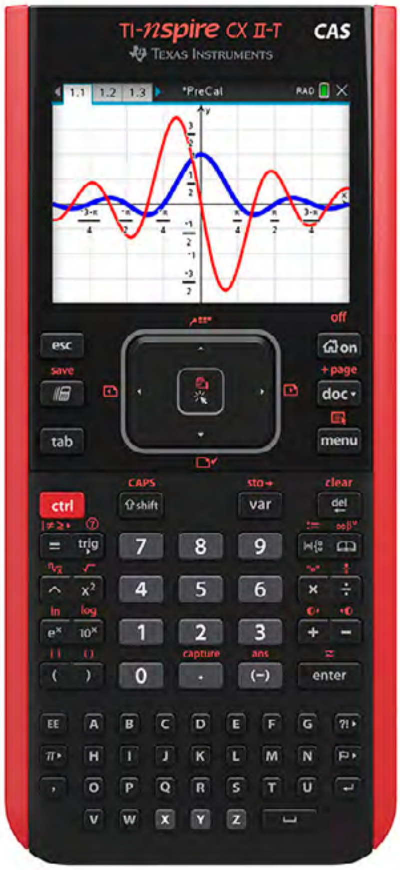
Der CAS-Taschenrechner

TI-Nspire™ CX II-T CAS

erfüllt alle diese Bedingungen.

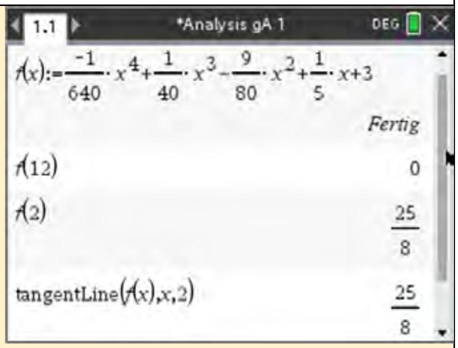
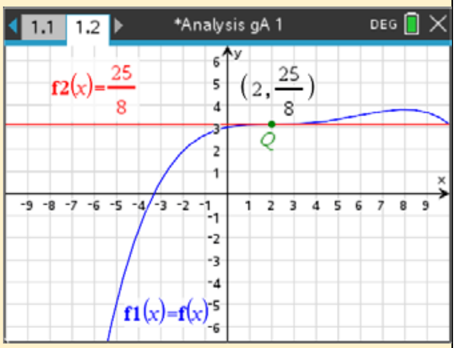
(Dies gilt auch für die zugehörige Software und die TI-Nspire™ CAS App für iPad.)

In den folgenden Lösungen der Musteraufgaben für den Prüfungsteil B ist angegeben, wie die verschiedenen Funktionalitäten des TI-Nspire CX II-T genutzt werden können.



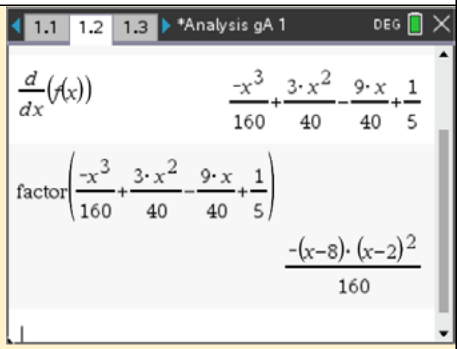
Analysis - Grundlegendes Anforderungsniveau

Analysis Aufgabe 1 - (grundlegendes Anforderungsniveau)[4]

1	
a (3 BE)	
Lösung	Speichern Sie den Funktionsterm unter einer geeigneten Variablen auf dem TI-Nspire. Der Funktionswert f(12) = 0 lässt sich durch Berechnung nachweisen. Damit ist gezeigt, dass der Graph von f durch P(12|0) verläuft. Die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt Q(2|f(2)) kann mit dem Befehl *tangentline(f(x),x,2)* bestimmt werden. Es ergibt sich $y = \frac{25}{8}$ als Tangentengleichung. Die besondere Lage dieser Tangente im Koordinatensystem besteht darin, dass es sich um eine Parallele zur x - Achse im Abstand $\frac{25}{8}$ oberhalb der x-Achse handelt. Durch eine grafische Darstellung lässt sich diese Untersuchung veranschaulichen. Es handelt sich vermutlich um eine Wendetangente.  

[4] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/abitur/pools2022/mathematik/grundlegend/2022_M_grundlege_5.pdf

<table>
<tr><td>b
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Die 1. Ableitung von f kann mit dem TI-Nspire ermittelt werden:



$f'(x) = -\frac{x^3}{160} + \frac{3}{40}x^2 - \frac{9}{40}x + \frac{1}{5}$

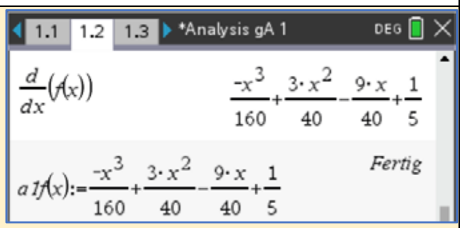
Mit der Anweisung *factor()* wird dieser Term faktorisiert. Es ergibt sich:

$f'(x) = -\frac{(x-8)\cdot(x-2)^2}{160}$

Ein Vergleich mit

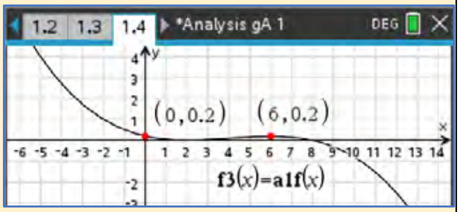
$f'(x) = a\cdot(x-b)\cdot(x-c)^2$ zeigt, dass

$a = -\frac{1}{160}; b = 8; c = 2$ gilt.
</td></tr>
<tr><td>c
(4 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Die Funktion



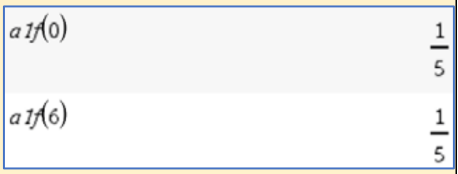
$f'(x) = -\frac{x^3}{160} + \frac{3}{40}x^2 - \frac{9}{40}x + \frac{1}{5}$

wird unter einer geeigneten Variablen gespeichert und grafisch dargestellt.



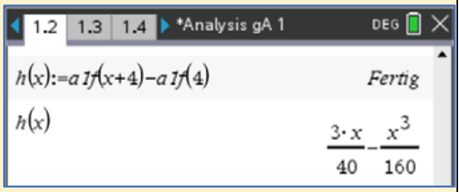
Die Aussage I ist falsch, denn $f'(x)$ wechselt an der Stelle x = 8 das Vorzeichen von Plus nach Minus. Für x < 8 ist der Graph von f monoton steigend, für x > 8 monoton fallend. (Da f' eine kubische Funktion ist, gilt das für alle x > 8.)

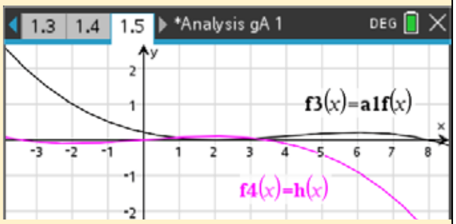
Die Aussage II ist richtig, denn die Funktionswerte von $f'(x)$ an den Stellen x = 0 und x = 6 sind gleich:

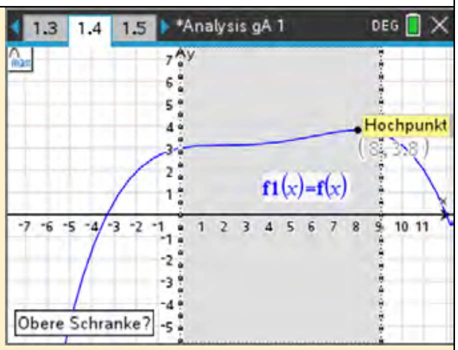


$f'(0) = f'(6) = 0{,}2$

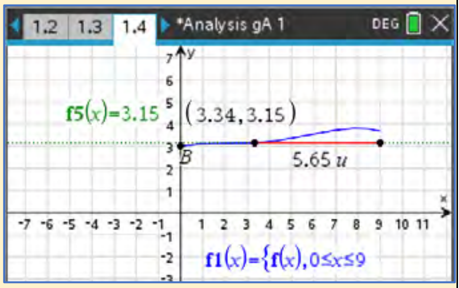
Die Funktion f hat also an diesen Stellen den gleichen Anstieg, die Tangenten sind parallel.
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>d
(4 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>


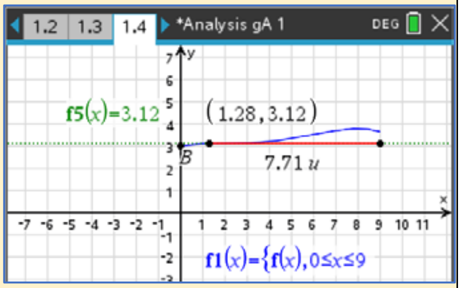
Die Symmetrie von h(x) bezüglich des Ursprungs darf man laut Aufgabenstellung voraussetzen.
Der Graph von $f'(x+4)$ geht aus dem Graphen von $f'(x)$ durch eine Verschiebung um 4 Einheiten in negative x-Richtung hervor. Der konstante Summand $-f'(4) = -\frac{1}{10}$ bewirkt eine Verschiebung des Graphen in negative y-Richtung um 0,1 Einheiten. Damit ist auch der Symmetriepunkt von h gegenüber dem Symmetriepunkt von $f'(x)$ um 4 Einheiten nach links und 0,1 Einheiten nach unten verschoben. Der Symmetriepunkt von h(x) hat die Koordinaten (0|0), also muss der Symmetriepunkt von $f'(x)$ die Koordinaten (4|0,1) besitzen.


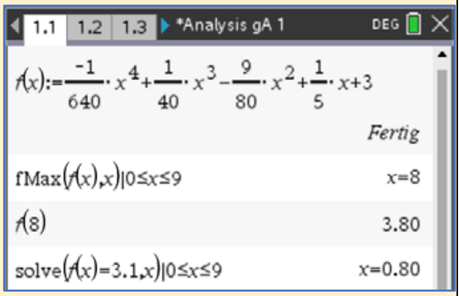
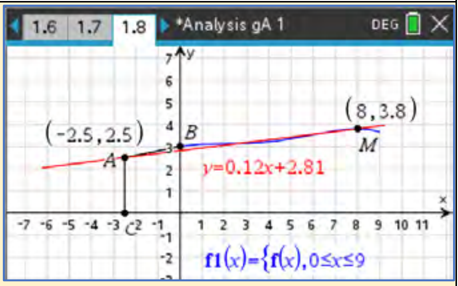
</td></tr>
<tr><td>e
(6 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Die x-Koordinate des Punktes A kann mithilfe der Geradengleichung von g und des bekannten y-Wertes von A berechnet werden:
$2{,}5 = \frac{1}{5} \cdot x_A + 3 \Leftrightarrow x_A = -2{,}5$
Die Länge des Carports entspricht der Summe der Beträge der x-Werte von A und C, diese beträgt
2,5 m + 9 m = 11,5 m.


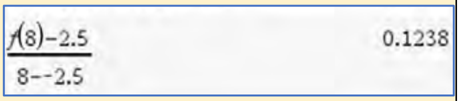
Das Maximum der Funktion f im Intervall $0 \leq x \leq 9$ kann aus der Grafik ermittelt werden (Anweisung Graph analysieren – Maximum):
Das Maximum in diesem Intervall liegt bei x = 8 und beträgt 3,8. Die gesuchte Höhe ist also 3,8 m.

Das Wohnmobil ist 3,10 m hoch. Es kann auf keinen Fall bis auf die Höhe von Punkt B zurückfahren, denn dort beträgt die Höhe nur 3,00 m.


</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Selbst wenn man über dem Wohnmobil noch 5 cm „Luft“ bis zum Dach lassen möchte, passt es nicht vollständig hinein, denn es bleiben dann nur 5,65 m Länge bis zum Eingang.
Begnügt man sich mit 2 cm „Luft“ nach oben, dann ist der Abstand zum Eingang 7,71 m groß, der Platz würde dann reichen.


Alternative Lösung:
Das lokale Maximum der Funktion f im Intervall $0 \leq x \leq 9$ kann auch mithilfe des Befehls fMax((f(x),x)| $0 \leq x \leq 9$ ermittelt werden.
Löst man die Gleichung f(x) = 3,1 (Höhe des Wohnmobils) nach x auf, erhält man x = 0,80 als Lösung.
Es blieben dann noch 8,20 m zum Unterstellen des 7,05 m langen Wohnmobils.

</td></tr>
<tr><td>f
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Das Wasser läuft über den hinteren Bereich des Carports über die Strecke $\overline{AM}$ ab mit A(-2,5|2,5) und M(8|3,8).
Man legt eine Gerade durch diese Punkte und bestimmt deren Gleichung mit ctrl menu Koordinaten/ Gleichungen.
Die Gleichung ist y = 0,12x + 2,81, dabei beschreibt der Anstieg m = 0,12 die durchschnittliche Steigung von ca. 12% zwischen A und M.


Alternative Lösung:
Bestimmung des durchschnittlichen Gefälles zwischen A und M mit dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{3{,}8-2{,}5}{8-(-2{,}5)} = \frac{1{,}3}{10{,}5} \approx 0{,}12$

</td></tr>
</table>

g
(5 BE)

Lösung

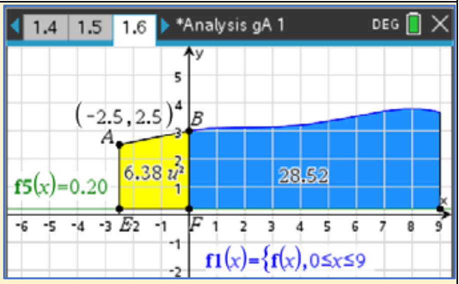
Die Abbildung zeigt die zu berücksichtigenden Flächen und ihre über die Grafik bestimmten Flächeninhalte.
Sie sind in der Summe
6,38 m² + 28,52 m² = 34,90 m².
Die Aufgabenstellung verlangt aber eine Berechnung, sodass diese Betrachtungen nur zur Selbstkontrolle dienen können.
Berechnung des Trapezes (gelb):

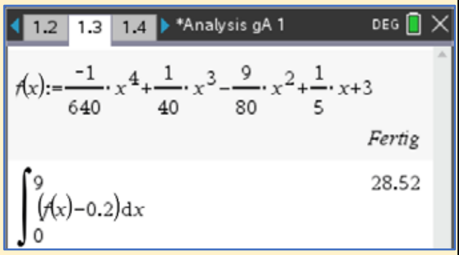
$A_1 = \frac{2{,}3+2{,}8}{2} \cdot 2{,}5\ m^2 \approx 6{,}38\ m^2$

Berechnung der blauen Fläche:

$A_2 = \int_0^9 (f(x) - 0{,}2\ dx \approx 28{,}52\ m^2$

$A_1 + A_1 = 34{,}90\ m^2$

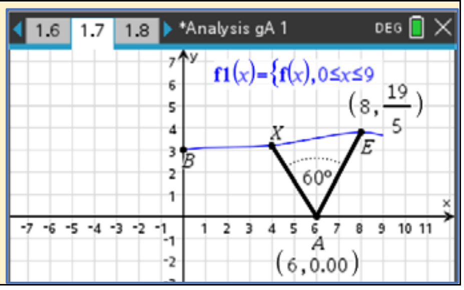


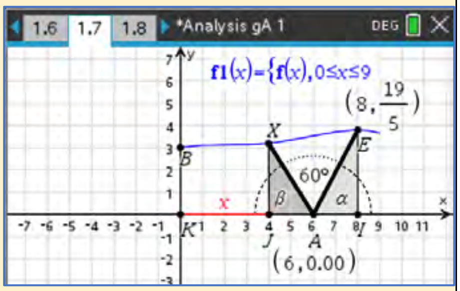
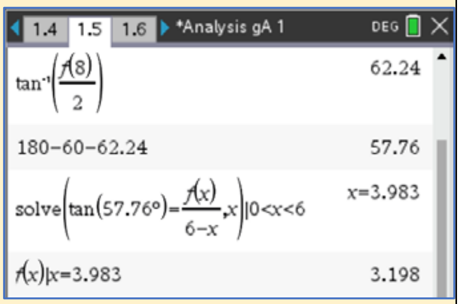


h
(2 BE)

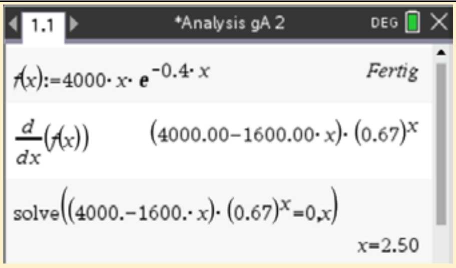
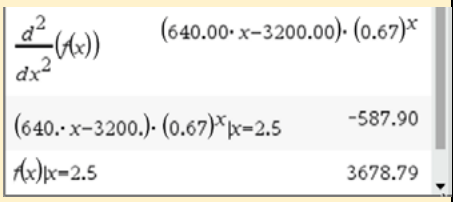
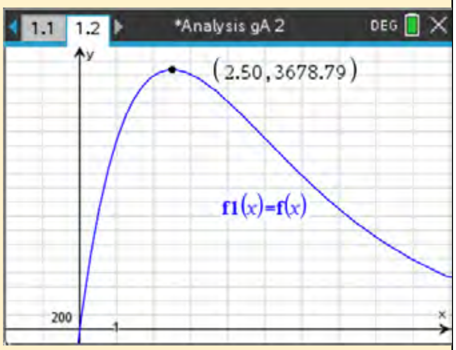
Lösung

Zeichnung nebenstehend

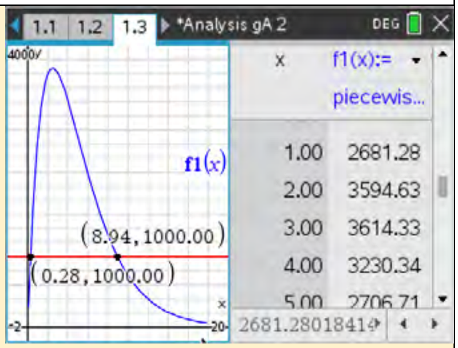
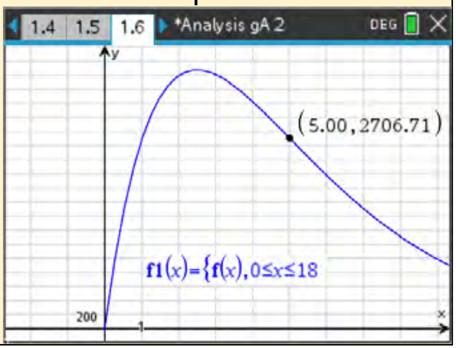


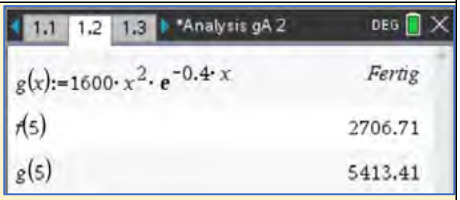
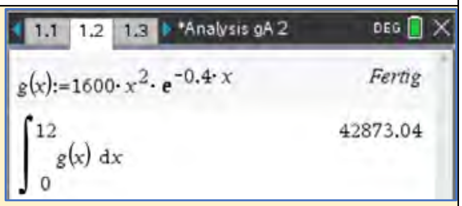
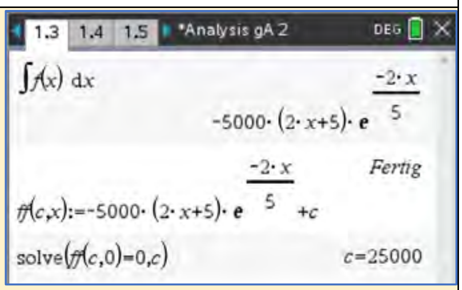
i (5 BE)	
Lösung	Im Dreieck AIE gilt $\tan(\alpha) = \frac{f(8)}{8-6} = \frac{3{,}8}{2} = 1{,}9.$ Damit ist $\alpha \approx 62{,}24°$. Die Winkel α, β und der 60°-Winkel haben als Summe 180°, denn sie bilden einen gestreckten Winkel. Damit ist $\beta \approx 180° - 60° - 62{,}24° = 57{,}76°$. Im Dreieck AXJ gilt $\tan(\beta) = \frac{\lvert\overline{JX}\rvert}{\lvert\overline{AJ}\rvert} = \frac{f(x)}{6-x}$. Die Gleichung $\tan(57{,}76°) = \frac{f(x)}{6-x}$ hat die Lösung $x \approx 3{,}98 \approx 4$. Der Funktionswert an dieser Stelle ist $f(x) \approx 3{,}198 \approx 3{,}2$. Die Koordinaten des Punktes X, der den Endpunkt der zweiten Stütze darstellt, sind ca. X(4,0|3,2).  

Analysis Aufgabe 2- (grundlegendes Anforderungsniveau)[5]

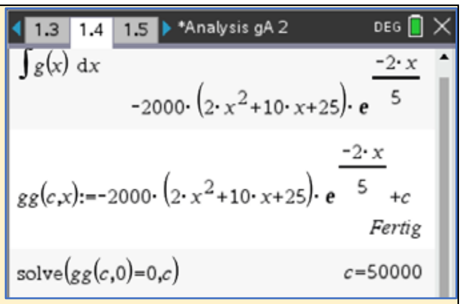
1		
a (4 BE)		
Lösung	Definieren Sie die Funktion $f(x) = 4000x \cdot e^{-0,4x}$ für die momentane Änderungsrate des Absatzes auf dem TI-Nspire und speichern Sie die Funktion unter einer geeigneten Variablen. Für die Ermittlung des Zeitpunktes, zu dem die momentane Änderungsrate des Absatzes den größten Wert erreicht, wird die 1. Ableitung von f(x) bestimmt und deren Nullstelle x = 2,5 berechnet. Der Wert der 2. Ableitung an dieser Stelle ist ca. -587,9 < 0. Deshalb liegt ein lokales Maximum vor. Der Funktionswert ist f(2,5) = 3678,79. Damit erreicht die momentane Änderungsrate des Absatzes zweieinhalb Monate nach Produkteinführung mit etwa 3679 Stück pro Monat ihren größten Wert. Zur Selbstkontrolle kann das lokale Maximum auf grafischem Wege mithilfe der Anweisung *Graph analysieren – Maximum* bestimmt werden.	  

[5] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/abitur/pools2022/mathematik/grundlegend/2022_M_grundlege_6.pdf

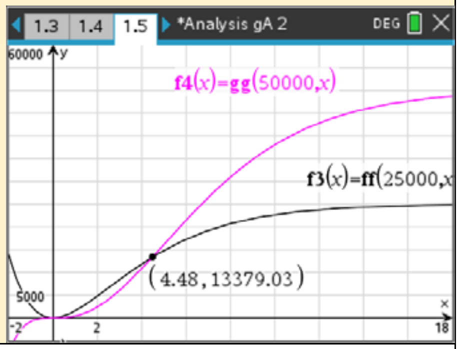
b (3 BE)	
Lösung	Zeichnen Sie den Graphen von f(x) auf dem TI-Nspire. Lassen Sie sich die Wertetabelle anzeigen und übertragen Sie den Graphen auf Papier. Achten Sie auf das Intervall $0 \leq x \leq 18$. Zeichnen Sie die Gerade y = 1000 zunächst auf dem TI-Nspire ein und ermitteln Sie die Schnittpunkte mit dem Graphen von f. Übertragen Sie die Schnittpunkte (0,28|1000) und (8,94|1000) auf die Zeichnung auf Papier. Die Angabe der Koordinaten ist nicht erforderlich und dient hier nur zur besseren Durchführung der Zeichnung. 
c (6 BE)	
Lösung	Die Zu- und Abnahme der momentanen Änderungsrate werden durch die 1. Ableitung f' von f beschrieben. Um die möglichen Extremstellen von f' zu erhalten, werden die Nullstellen der 2. Ableitung f'' von f bestimmt. Laut Aufgabenstellung gibt es genau eine Nullstelle x = 5 von f''. Über die Art des Extremums entscheidet das Vorzeichen der 3. Ableitung f''' von f. Wegen $f'''(5) > 0$ hat f' bei x = 5 ein Minimum als einziges Extremum. Der Graph von f ist für $0 \leq x \leq 2{,}5$ monoton steigend, d. h. f' ist in diesem Intervall positiv. Im Intervall $2{,}5 \leq x \leq 18$ ist der Graph von f monoton fallend, als gilt in diesem Teilintervall $f'(x) < 0$. Dem Graphen ist auch zu entnehmen, dass der Anstieg von f im Intervall $0 \leq x \leq 18$ bei x = 0 am größten ist. Die momentane Änderungsrate des Absatzes nimmt zum Zeitpunkt der Produkteinführung am stärksten zu und fünf Monate später am stärksten ab. Lösungsvariante mit Nutzung der grafischen Darstellung. Der Wendepunkte kann mit *Graph analysieren* angezeigt werden. 

<table>
<tr><td>d
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Die Funktion für die momentane Änderungsrate des Absatzes der Smartwatch wird unter einer geeigneten Variablen gespeichert:

$g(x) = 1600x^2 \cdot e^{-0,4x}$
Es ist $g(5) \approx 5413$ und $f(5) \approx 2707$, also ist fünf Monate nach Produkteinführung die momentane Änderungsrate des Absatzes für die Smartwatch größer als die für das Fitnessarmband.</td></tr>
<tr><td>e
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Die Gesamtzahl von ca. 42873 der im ersten Jahr nach Produkteinführung verkauften Smartwatches kann mit dem bestimmten Integral berechnet werden:

$$\int_0^{12} g(x)dx \approx 42\,873$$</td></tr>
<tr><td>f
(3)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Die Funktion, die die Gesamtzahl der verkauften Objekte beschreibt, kann über eine Stammfunktion F bzw. G der momentanen Änderungsrate f bzw. g des Absatzes bestimmt werden. Dabei muss die Integrationskonstante c jeweils so gewählt werden, dass zum Zeitpunkt x = 0 auch der Verkauf mit jeweils null Objekten angesetzt wird.

Über $\int f(x)dx$ erhält man die Menge aller Stammfunktionen
$F(c,x) = -500 \cdot (2x+5) \cdot e^{-\frac{2}{5}x} + c$
Löst man die Gleichung $F(c,0) = 0$ nach c auf, ergibt sich c = 25 000.
Über $\int g(x)dx$ erhält man die Menge aller Stammfunktionen
$G(c,x) = -2000 \cdot (2x^2 + 10x + 25) \cdot e^{-\frac{2}{5}x} + c$</td></tr>
</table>

Löst man die Gleichung $G(c, 0) = 0$ nach c auf, ergibt sich c = 50 000.
Die gemeinsame Darstellung der Funktionen F(25000,x) und G(50000,x) lässt den Schnittpunkt (4,48|13 379) beider Graphen erkennen.



Nach etwa viereinhalb Monaten sind ebenso viele Fitnessarmbänder wie Smartwatches verkauft.

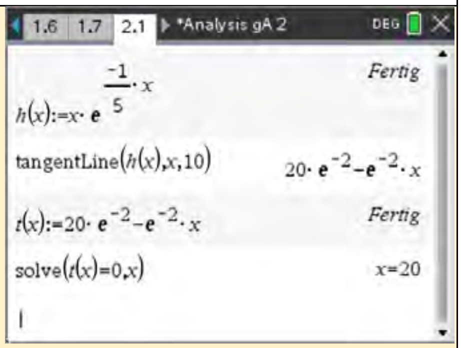


2

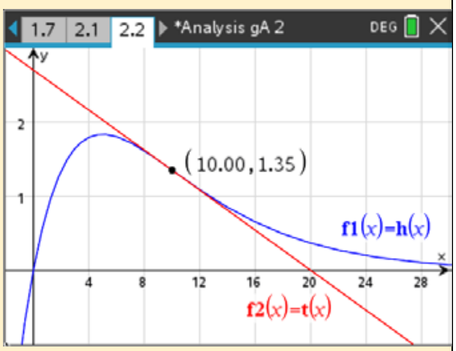
a
(3 BE)

Lösung

Öffnen Sie auf dem TI-Nspire ein neues *Problem* und dort die Anwendung *Calculator.*
Speichern Sie den Funktionsterm von $h(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$ unter einer geeigneten Variablen.
Die Tangentengleichung an den Graphen von h an der Stelle x = 10 kann mit der Anweisung *tangentline(h(x),x,10)* ermittelt werden.
Es ergibt sich $t(x) = -e^{-2} \cdot x + 20 \cdot e^{-2}$.



Die Nullstelle von t(x) erhält man als Lösung der Gleichung t(x) = 0 zu x = 20. Damit ist gezeigt, dass t die x-Achse im Punkt (20|0) schneidet.
Für das Einzeichnen der Tangente können Sie neben dem Punkt (20|0) einen weiteren Punkt berechnen, z. B. $(0|20 \cdot e^{-2}) \approx (0|2{,}7)$. Durch diese beiden Punkte kann dann die Tangente gezeichnet werden.



b
(3 BE)

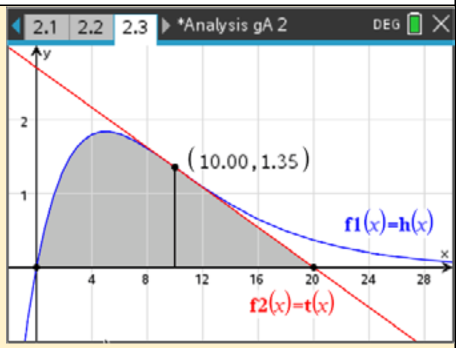
Lösung

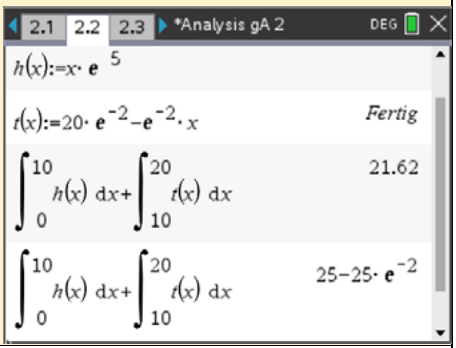
Markieren Sie in der Zeichnung das Flächenstück, das vom Graphen von h, der Tangente t und der x-Achse im Bereich $0 \leq x \leq 20$ eingeschlossen wird.
Für die Berechnung des Inhaltes A dieses Flächenstückes kann das bestimmte Integral verwendet werden:

$A = \int_0^{10} h(x)dx + \int_{10}^{20} t(x)dx$

$A = 25 - \frac{25}{e^2}\ FE$

$$A = \int_0^{10} h(x)dx + \int_{10}^{20} t(x)dx \approx 21{,}62\ FE$$

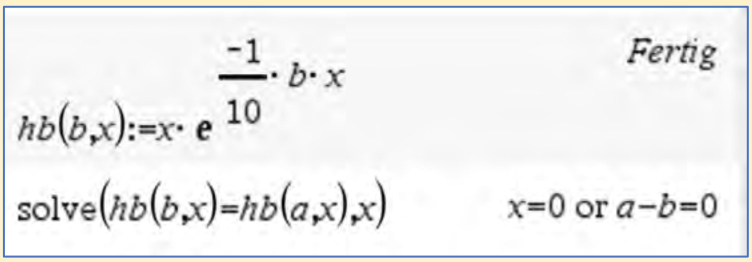


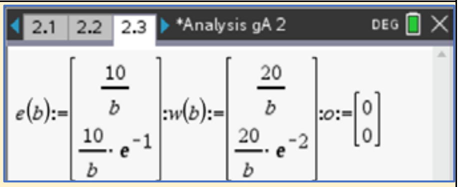


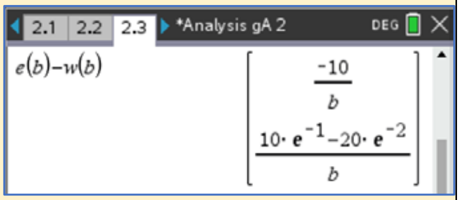
c
(4 BE)

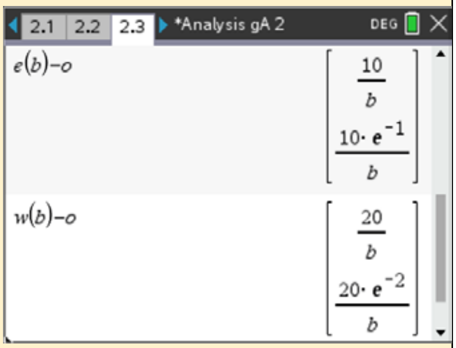
Lösung

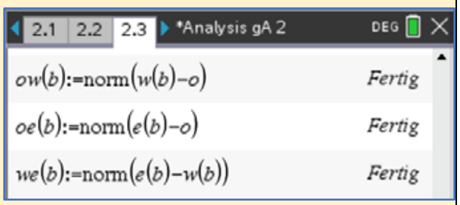
Es soll derjenige Wert von b gefunden werden, für den $h_b(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{10}b \cdot x}$ mit der Funktion $h(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$ übereinstimmt.
Die Funktionsterme sind bis auf die Exponenten gleich.
Der Exponent $-\frac{1}{5}x$ ist für b = 2 gleich dem Exponenten $e^{-\frac{1}{10}b \cdot x}$. Da h(x) zu der Funktionenschar gehört, lässt sich weiter folgern: Für $b \neq 2$ gilt $h(x) = h_b(x) \Leftrightarrow x = 0$ ist. Wegen h(0) = 0 ist der gemeinsame Punkt aller Graphen der Schar der Punkt (0|0).
Variante:

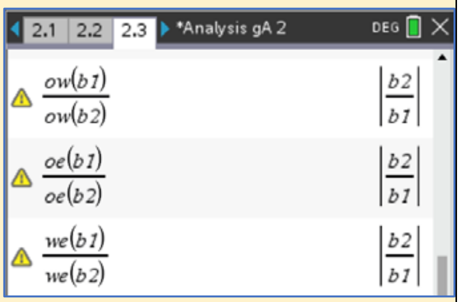


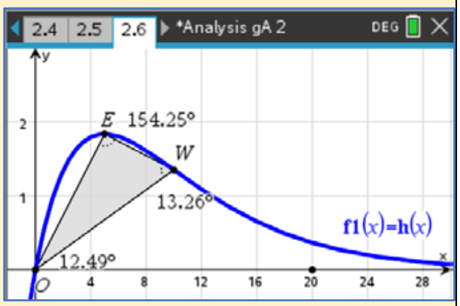
<table>
<tr><td>d
(4 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Ähnlichkeitsnachweise lassen sich auf verschiedene Weisen führen:
• Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Seitenlängen im gleichen Verhältnis stehen.
• Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in ihren Winkeln übereinstimmen.


Der Extrempunkt ist
$E_b\left(\frac{10}{b} \mid \frac{10}{b}\cdot e^{-1}\right)$.
Der Wendepunkt ist
$W_b\left(\frac{20}{b} \mid \frac{20}{b}\cdot e^{-2}\right)$.
Der Koordinatenursprung ist O(0|0).
Definieren Sie die zugehörigen Ortsvektoren auf dem TI-Nspire.
Betrachten Sie die Vektoren, die die Seiten des Dreiecks OE_aW_a bestimmen.




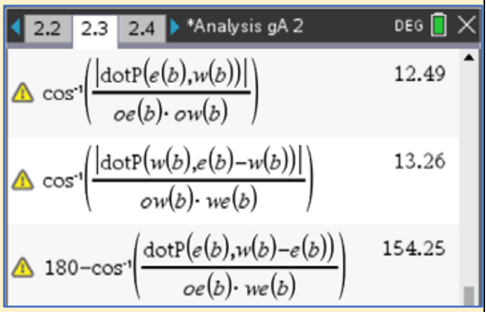
$\overrightarrow{W_bE_b} = \frac{1}{b}\cdot\begin{pmatrix} -10 \\ 10\cdot(e^{-1}-2e^{-2}) \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OE_b} = \frac{1}{b}\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 10\cdot e^{-1} \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OW_b} = \frac{1}{b}\cdot\begin{pmatrix} 20 \\ 20\cdot e^{-2} \end{pmatrix}$


Bildet man die Verhältnisse der Seitenlängen für zwei unterschiedliche Werte b_1 und b_2, dann kürzt sich der von b unabhängige Faktor heraus, d. h. für alle Seitenverhältnisse gilt $\frac{b_1}{b_2}$ (oder $\frac{b_2}{b_1}$).
Darum ist die Aussage über die Ähnlichkeit der Dreiecke richtig.


Alternative Lösung:
Winkelberechnung
mit $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$:
Der Winkel bei E ist ein stumpfer Winkel.
Zu zeigen ist, dass die Winkelgrößen unabhängig von b sind.


</td></tr>
</table>

Bei der Winkelberechnung ist jeweils die Richtung der verwendeten Vektoren zu berücksichtigen.



Innenwinkel bei O:

$$arccos\left(\frac{\overrightarrow{OE}\circ\overrightarrow{OW}}{|\overrightarrow{OE}|\cdot|\overrightarrow{OW}|}\right) \approx 12{,}49°$$

Innenwinkel bei E:

$$180° - arccos\left(\frac{\overrightarrow{OE}\circ\overrightarrow{EW}}{|\overrightarrow{OE}|\cdot|\overrightarrow{EW}|}\right) \approx 154{,}25°$$

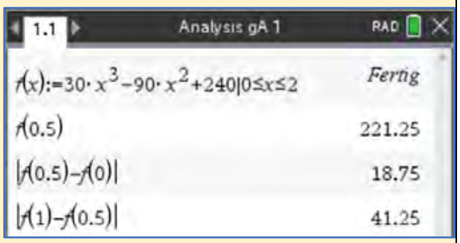
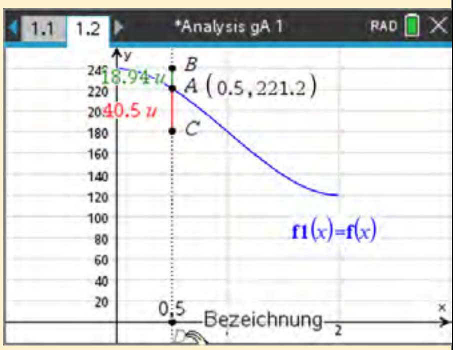
Innenwinkel bei W:

$$arccos\left(\frac{\overrightarrow{OW}\circ\overrightarrow{WE}}{|\overrightarrow{OW}|\cdot|\overrightarrow{WE}|}\right) \approx 13{,}26°$$

Alle Winkel sind unabhängig von b. Alle Dreiecke OW_bE_b sind ähnlich zueinander.

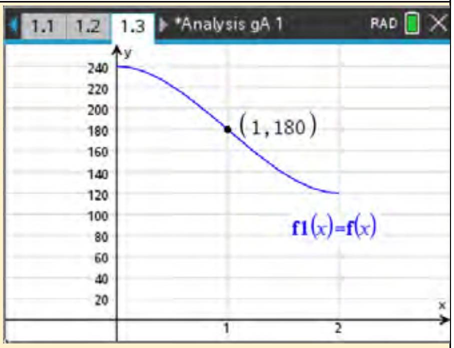
Analysis - erhöhtes Anforderungsniveau

Analysis Aufgabe 1- (erhöhtes Anforderungsniveau)[6]

1	
a (4 BE)	
Lösung	Die Funktion $f(x) = 30x^3 - 90x^2 + 240$ wird mit der Einschränkung $0 \leq x \leq 2$ auf dem TI-Nspire definiert und unter der Variablen f(x) gespeichert. Dann kann im Folgenden immer wieder über diese Variable auf die Geschwindigkeitsfunktion zugegriffen werden. Die Geschwindigkeit nach einer halben Minute kann durch f(0,5) = 221,25 km/h berechnet werden.  Die Abnahme der Geschwindigkeit in der ersten halben Minute wird durch die Differenz f(0,5) – f(0) bestimmt, die in der halben Minute danach durch f(1) – f(0,5). Da nach den Beträgen der Geschwindigkeitsabnahme gefragt ist, erhält man $\|f(0{,}5) - f(0)\| = 18{,}75\ km/h$ sowie $\|f(1) - f(0{,}5)\| = 41{,}25\ km/h$. Damit ist gezeigt, dass die Geschwindigkeit in der ersten halben Minute um einen kleineren Betrag abnimmt als in der zweiten halben Minute. Hinweis: Die Ergebnisse lassen sich auch näherungsweise über die grafische Darstellung der Funktion f bestimmen. 

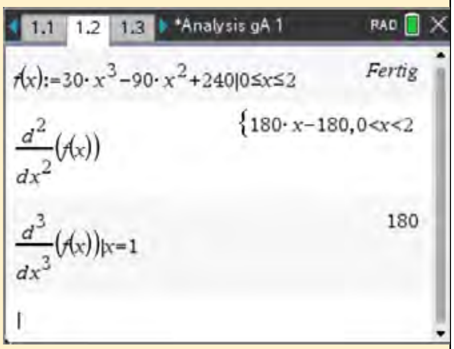
[6] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/abitur/pools2022/mathematik/erhoeht/2022_M_erhoeht_B_6.pdf

<table>
<tr><td>b
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Den Zeitpunkt der stärksten Abnahme der Geschwindigkeit ermittelt man über die Abszisse x des Wendepunktes des Graphen von f. Daraus muss dann noch die Uhrzeit bestimmt werden.
Über die Anwendung Graph analysieren – Wendepunkt erhält man rasch den x-Wert x = 1. Der gesuchte Zeitpunkt ist also 15:01 Uhr.

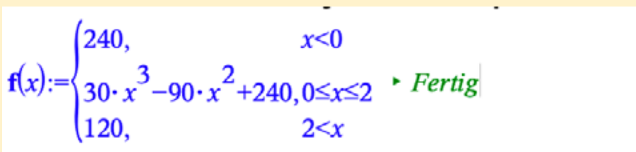


Alternativ kann man die x-Koordinate des Wendepunktes über die Nullstelle der 2. Ableitung von f bestimmen:

Es ist $f''(x) = 180x - 180$.
Diese Funktion hat die Nullstelle x = 1.
Wegen $f'''(x) = 180 > 0$ liegt an der Stelle x = 1 ein Rechts-Links-Wendepunkt vor.
Auch hier ist zu beachten, dass nach dem Zeitpunkt, also der Uhrzeit gefragt wird. Die Abnahme der Geschwindigkeit ist um 15:01 Uhr am größten.

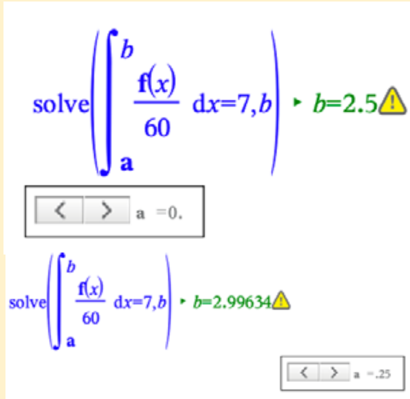


</td></tr>
<tr><td>c
(5 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Den zu ermittelnden Zeitraum, der zwischen 14:59 Uhr und 15:03 Uhr liegen soll, kann man z. B. durch systematisches Probieren mit dem bestimmten Integral mit flexibler Untergrenze a ≥ -1 und zu bestimmender Obergrenze b bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass die Zeitangabe in Minuten in Stunden umzurechnen ist. Eine Minute entspricht $\frac{1}{60}$ Stunden. Um das gesamte Intervall von 14:59 Uhr bis 15:03 Uhr untersuchen zu können, muss die Funktion f neu definiert werden.



Damit kann das gesamte Intervall mit einem Schieberegler durchmustert werden.
</td></tr>
</table>

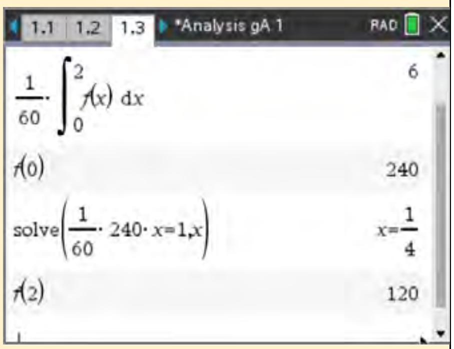
Man erhält z. B. für a = 0 (15:00 Uhr) als rechte Intervallgrenze b $\approx 15{:}02{:}30$ Uhr.



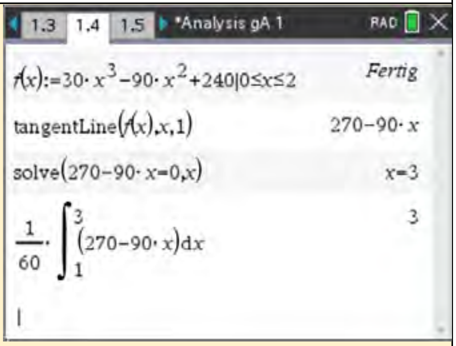
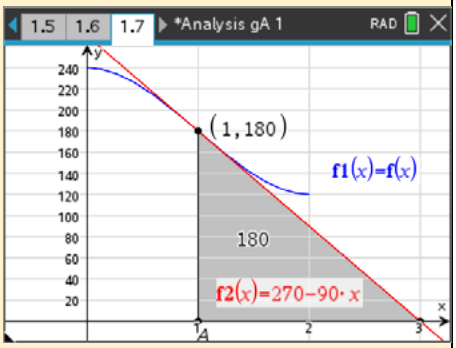
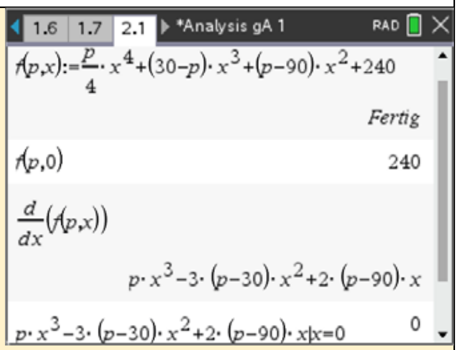
Der späteste Zeitpunkt ergibt sich für a ≈ 0,25 mit 15:00:15 Uhr, damit die rechte Intervallgrenze noch vor 15:03 Uhr liegt.

Hinweis: Die Aufgabe verlangt nur die Angabe eines möglichen Intervalls, es genügt also z. B. das Angeben einer Lösung, z. B. auch mit folgendem Ansatz:

Lösungsvariante



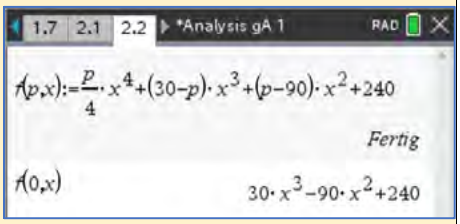
Für den Zeitraum von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr wird der zurückgelegte Weg über das bestimmte Integral berechnet.
Der von 15:00 Uhr bis 15:02 Uhr zurückgelegt Weg ist
$\frac{1}{60} \cdot \int_0^2 f(x)dx = 6\ km.$
Der zu insgesamt 7 km fehlende Weg von 1 km Länge muss also in der Minute vor 15:00 Uhr oder in der Minute nach 15:02 Uhr liegen.
In der Minute vor 15:00 Uhr fährt der ICE mit f(0) = 240 km/h. dann schafft er in einer Minute $\frac{240}{60} = 4\ km$. Für einen Kilometer braucht er dann eine viertel Minute. Um insgesamt eine Strecke von 7 km zurückzulegen, wäre z. B. der Zeitraum von 14:59:45 Uhr bis 15:02 Uhr ausreichend.
In der Zeit nach 15:02 Uhr fährt der ICE noch mit f(2) = 120 km/h, also halb so schnell wie kurz vor 15:00 Uhr. Er braucht deshalb nach 15:02 Uhr für den einen Kilometer doppelt so viel Zeit wie vor 15:00 Uhr, also eine halbe Minute.
Um insgesamt eine Strecke von 7 km zurückzulegen, wäre z. B. auch der Zeitraum von 15:00 Uhr bis 15:02:30 Uhr ausreichend.
Schließlich ließe sich der eine an 7 km fehlende Kilometer auch aufteilen auf Zeiträume sowohl vor 15:00 Uhr als auch nach 15:02 Uhr, so dass sich weitere Möglichkeiten ergeben. Aber es braucht ja nur ein solcher Zeitraum angegeben zu werden.

d (4 BE)	
Lösung	Wenn sich die Abnahme der Geschwindigkeit von 15:01 Uhr an nicht mehr ändern würde, dann müsste von dort an die Geschwindigkeitsfunktion geradlinig der Tangente an den Graphen von f im Punkt P(1|f(1)) folgen. Die Gleichung dieser Tangente kann mit der Anwendung *Analysis – Tangententerm* bestimmt werden: $y(x) = 270 - 90x$. Die Nullstelle der Tangente ist x = 3. Der im Zeitraum von 15:01 bis 15:03 Uhr zurückgelegte Weg ist unter Berücksichtigung der notwendigen Zeiteinheit $\frac{1}{60} \cdot \int_1^3 (270 - 90x)dx = 3\ km.$ Die Aussage ist also richtig.  
e (2 BE)	
Lösung	Öffnen Sie auf dem TI-Nspire ein neues *Problem*, damit es nicht zu Überschneidungen mit bisherigen Definitionen kommt. Speichern Sie den Funktionsterm $f_p(x) = \frac{p}{4}x^4 + (30-p)x^3 + (p-90)x^2 + 240$ unter der Variablen f(p,x) ab.  Um zu prüfen, ob sich die Funktionen $f_p(x)$ hinsichtlich der Geschwindigkeiten nach 15:00 Uhr ohne Sprung beschreiben lassen, wird gezeigt, dass $f_p(0) = 240$ ist, also gleich der konstanten Geschwindigkeit vor 15:00 Uhr. Um zu prüfen, ob sich die Funktionen $f_p(x)$ hinsichtlich der momentanen Änderungsrate der Geschwindigkeiten nach 15:00 Uhr ohne Sprung beschreiben lassen, wird gezeigt, dass $f_p{}'(0) = 0$ ist, also gleich der momentanen Änderungsrate der konstanten Geschwindigkeit vor 15:00 Uhr. Beide Bedingungen sind erfüllt.

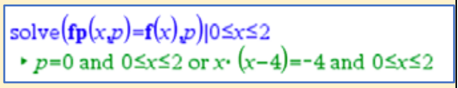
f (4 BE)	

Lösung

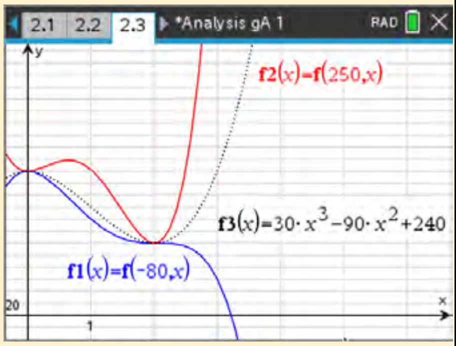
Damit $f_p(x) = \frac{p}{4}x^4 + (30-p)x^3 + (p-90)x^2 + 240$ mit dem Term der Funktion $f(x) = 30x^3 - 90x^2 + 240$ übereinstimmt, muss der erste Summand von $f_p(x)$ „verschwinden".
Dies ist nur für p = 0 der Fall.
Mit p = 0 stimmen auch die anderen Koeffizienten von $f_p(x)$ mit denen von $f(x)$ überein.



Lösungsvariante:
Man kann auch die Gleichung $f_p(x) = f(x)$ nach p lösen und erhält das gleiche Ergebnis.



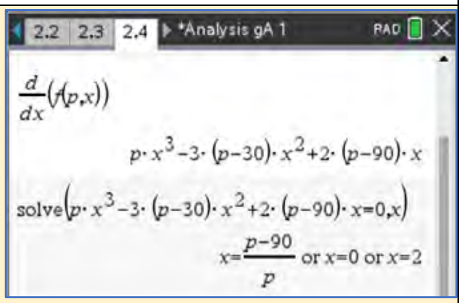
Die grafische Darstellung der Funktionen $f_{-80}(x)$ und $f_{250}(x)$ zeigt, dass letztere ein lokales Maximum im Intervall [0; 2] annimmt. Dies entspricht nicht dem stetig abnehmenden Geschwindigkeitsverlauf der Funktion $f(x)$. Nur $f_{-80}(x)$ könnte den Geschwindigkeitsverlauf passend beschreiben.



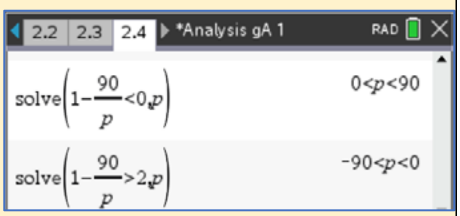
g (4 BE)	

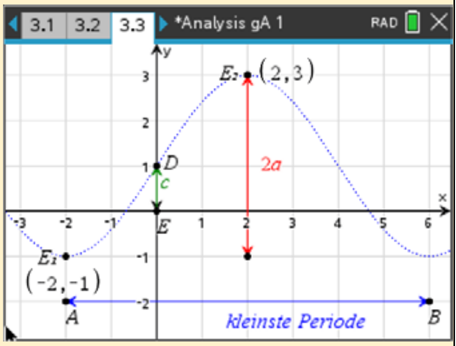
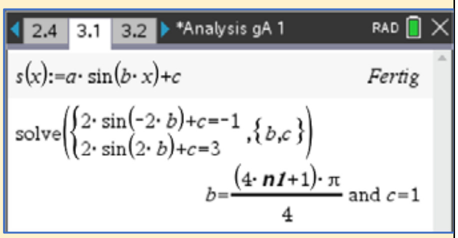
Lösung

Die Nullstellen von $f_p{}'(x)$ geben Auskunft über mögliche Extremstellen von $f_p(x)$.
Die Nullstellen der 1. Ableitung sind in den Informationen der Aufgabenstellung enthalten.
Damit keine Extrema im Intervall (0; 2) auftauchen, muss die Nullstelle $x_3 = 1 - \frac{90}{p}$ entweder links von x = 0 oder rechts von x = 2 liegen.



Zu lösen sind die Ungleichungen $1 - \frac{90}{p} < 0$ und $1 - \frac{90}{p} > 2$.
Für 0 < p < 90 und für -90 < p < 0 existieren keine Extrema im Intervall 0 ≤ x ≤ 2. Alle Funktionen, die diese Bedingungen erfüllen, kämen als mathematisches Modell für den Geschwindigkeitsverlauf in Frage.

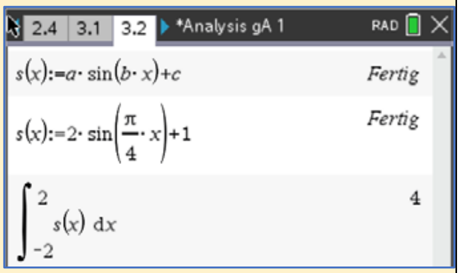


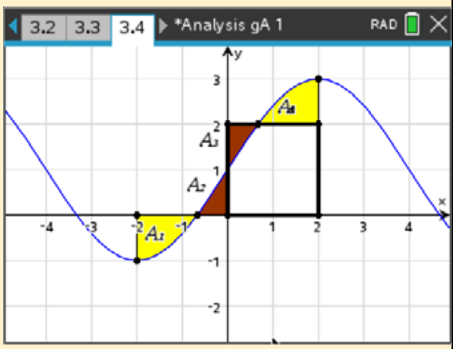
2	
a (4 BE)	
Lösung	Tragen Sie die Punkte E_1(-2|-1) und E_2(2|3) in ein Koordinatensystem ein. Nehmen Sie an, Sie kennen nun anhand der Lage dieser beiden Extrempunkte den Graphen von s(x). Da sie zwei direkt aufeinanderfolgende Extrempunkte des Graphen von $s(x) = a \cdot \sin(bx) + c$ sein sollen,  muss die Summe der Abstände von E_1 und E_2 zur x - Achse das Zweifache der Amplitude a sein: 2a = 4 führt auf a = 2. Das nach rechts gehend nächste lokale Minimum liegt bei (6|-2). Der Abstand der benachbarten lokalen Minima ist 8, also ist die kleinste Periode $\frac{2\pi}{b} = 8$. Daraus folgt $b = \frac{\pi}{4}$. Schließlich ist zu erkennen, dass die Kurve gegenüber dem Graph von $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ um eine Einheit nach oben verschoben ist, also gilt c = 1. Alternative Lösung: Wenn man einen der Parameter a, b oder c kennt, können die beiden anderen auch über ein Gleichungssystem ermittelt werden. Das wird hier am Beispiel a = 2 gezeigt. Aus den Koordinaten von E_1 und E_2 und a = 2 ergibt sich ein Gleichungssystem zur Bestimmung von b und c:  $\begin{cases} 2 \cdot \sin\big(b \cdot (-2)\big) + c = -1 \\ a \cdot \sin(b \cdot 2) + c = 3 \end{cases}$ Die Lösungen dieses Systems sind c = 1 und $b = \frac{(4k+1) \cdot \pi}{4}$, wobei k eine ganzzahlige Zählvariable ist. Mit k = 0 ergibt sich $b = \frac{\pi}{4}$. $s(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 1$ Zur Selbstkontrolle zeichnet man den Graphen der Funktion s(x) und prüft, ob die Punkte E_1 und E_2 auf dem Graphen liegen und benachbarte Extrempunkte sind (siehe Abbildung oben).

b
(6 BE)

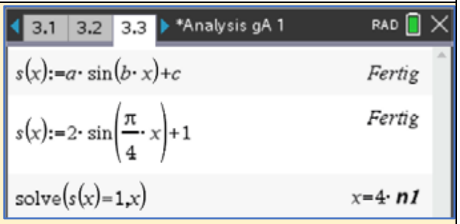
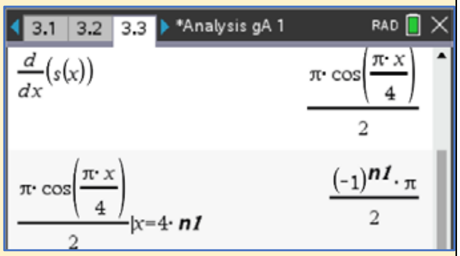
Lösung

$\int_{-2}^{2} s(x)dx = 4$



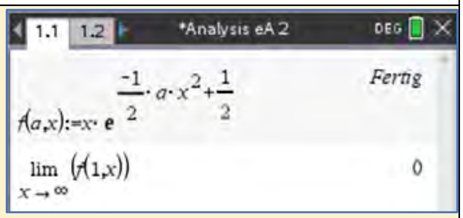


Der Graph von s ist symmetrisch bezüglich des Punktes (0|1), da die Funktion f(x) = sin(x) symmetrisch zum Ursprung ist und s aus f durch Verschiebung um eine Einheit entlang der y-Achse nach oben hervorgeht. Damit haben die Flächenstücke A_1 und A_4 den gleichen Flächeninhalt. Wegen des unterschiedlichen Vorzeichens der zugehörigen Integrale addieren sich diese beiden Integrale zu null. Die Flächenstücke A_2 und A_3 sind ebenfalls gleich groß. Man kann sich A_2 um (0;1) um 180° gedreht denken, sodass dieses Flächenstück mit A_3 zur Deckung kommt. Damit entspricht der Wert des Integrals $\int_{-2}^{2} s(x)dx$ dem Flächeninhalt des dick umrahmten Quadrates mit der Seitenlänge 2.
Der Flächeninhalt hat die Größe 4 FE.

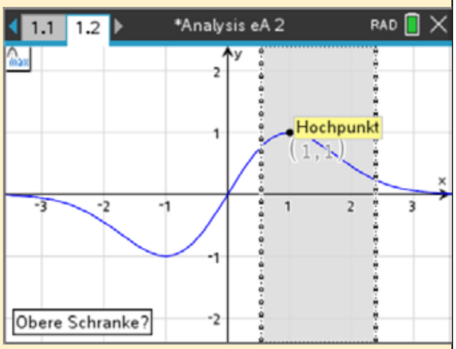
c (2 BE)	
Lösung	Den bisherigen Überlegungen lässt sich entnehmen, dass die Wendepunkte die y-Koordinate 1 haben. Die zugehörigen x-Koordinaten ergeben sich aus der Lösung von  s(x) = 1 zu $x = k \cdot 4$ mit $k \in \mathbb{Z}$, also sind alle x-Koordinaten der Wendepunkte ganze Zahlen. Die Steigungen in den Wendepunkten ergeben sich durch die Funktionswerte der 1. Ableitung von s(x) an den Stellen $x = k \cdot 4$.  Es ist $s'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ und $s'(4k) = \frac{\pi}{2} \cdot (-1)^k$. Je nachdem, ob k geradzahlig oder ungeradzahlig ist, ergibt sich also die Steigung $\frac{\pi}{2}$ bzw. $-\frac{\pi}{2}$.
d (3 BE)	
Lösung	Die Wendepunkte von s(x) haben nach der Teilaufgabe 2c die Koordinaten W(4k|1) mit $k \in \mathbb{Z}$. Die Steigung der Geraden durch einen Wendepunkt W und den Punkt P(2022|2022) lässt sich durch den Differenzenquotienten ermitteln: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2022-1}{2022-4k} = \frac{2021}{2022-4k}$. Da k eine ganze Zahl ist, sind alle Steigungen als Quotienten zweier ganzer Zahlen selbst rationale Zahlen. In Teilaufgabe 2c wurde aber gezeigt, dass die Steigungen in den Wendepunkten den Wert $\pm\frac{\pi}{2}$ haben. Da π aber keine rationale Zahl ist, hat keine Tangente in einem Wendepunkt von s(x) einen Anstieg, der eine rationale Zahl ist. Keine der Geraden durch einen Wendepunkt W und den Punkt P kann also Tangente in einem der Wendepunkte sein.

Analysis Aufgabe 2 - (erhöhtes Anforderungsniveau)[7]

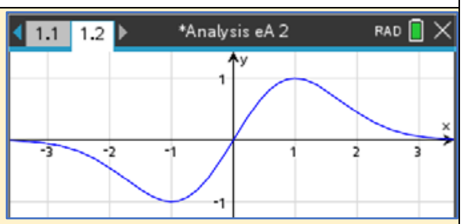
<table>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>a
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>



Definieren Sie die Funktion $f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot x^2 + \frac{1}{2}}$ auf Ihrem MMS-Rechner und speichern Sie den Funktionsterm unter einer geeigneten Variablen ab.
Da die Koordinaten des Hochpunktes H von f_1 nur angegeben werden sollen, lassen sie sich auch über die grafische Darstellung der Funktion zu H(1|1) ermitteln.



Für den Nachweis der einzigen Nullstelle können Sie den Satz vom Nullprodukt verwenden:
Die Funktion $f_1(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}}$ hat den Wert null, wenn einer der Faktoren null ist. Der Exponentialterm $e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}}$ ist für keinen reellen Wert von x null, also kann nur der erste Faktor x = 0 sein. Also gibt es genau eine Nullstelle von f_1.
Der Grenzwert für $x \to \infty$ von f_1 ist null: $\lim\limits_{x \to \infty} f_1\,(\mathrm{x}) = 0$.
</td></tr>
<tr><td>b
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>



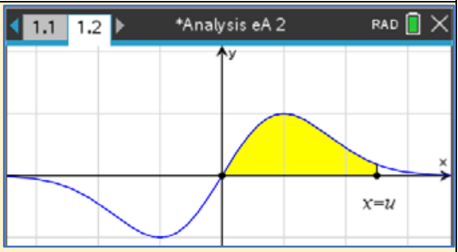
Aus den Ergebnissen der Teilaufgabe 1a und unter Verwendung der Grafikfunktion des TI-Nspire ist die Lösung rasch zu erstellen. Der dargestellte Graph kann zur Funktion f1 gehören.
</td></tr>
</table>

[7] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/abitur/pools2022/mathematik/erhoeht/2022_M_erhoeht_B_7.pdf

c
(3 BE)

Lösung

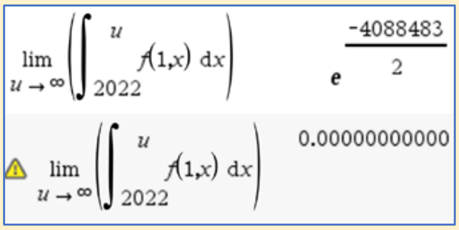
Für jede reelle Zahl u größer als 2022 schließt der Graph von f mit der x - Achse und der Geraden x = u ein Flächenstück ein, das vollständig oberhalb der x – Achse liegt. Dessen Flächeninhalt wird näherungsweise durch



$$F_1(u) - F_2(0) \approx \int_0^{2022} f_1(x)dx$$

berechnet.

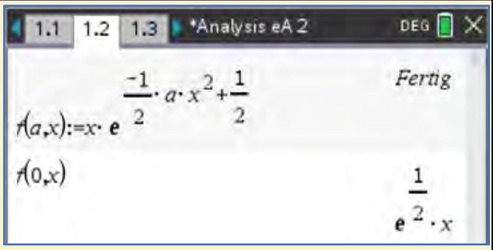
Hinweis: Der Graph von f1 nähert sich für $x \to \infty$ asymptotisch „von oben" gegen die x-Achse, sodass der Inhalt der Fläche zwischen Graph und x-Achse in den Grenzen von x = 2022 und x = u > 2022 fast null ist.



d
(2 BE)

Lösung

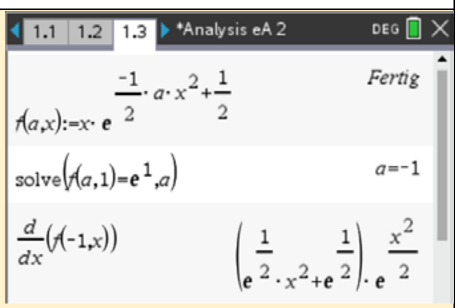
Für a = 0 erhält man die Gleichung $f_0(x) = e^{\frac{1}{2}} \cdot x$. Das ist die Gleichung einer Ursprungsgeraden mit der Steigung $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ und dem Schnittpunkt (0|0) mit der y-Achse (und der x-Achse).

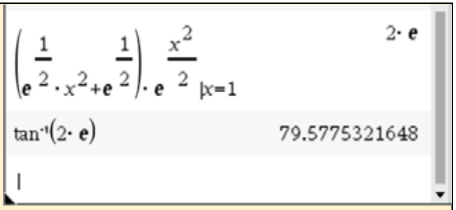
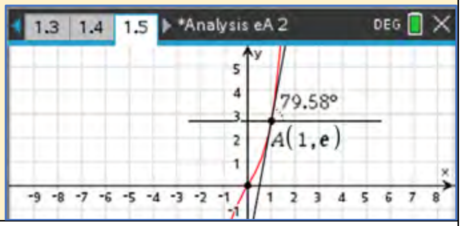
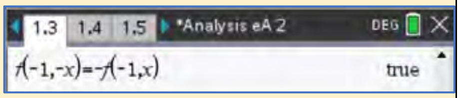
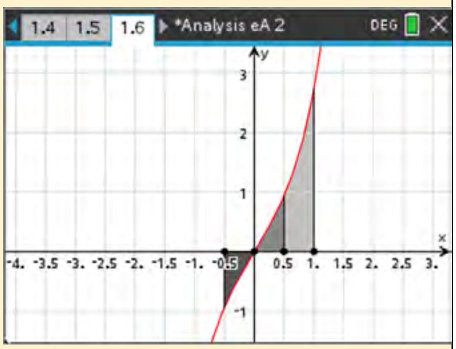


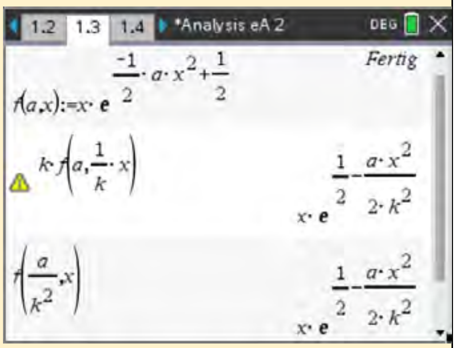
e
(4 BE)

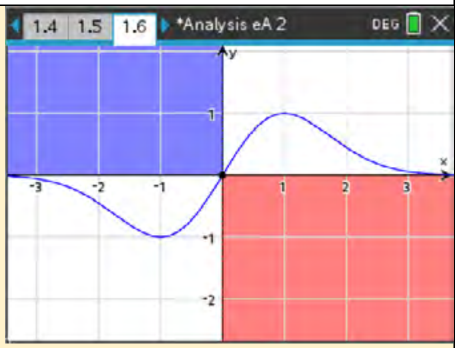
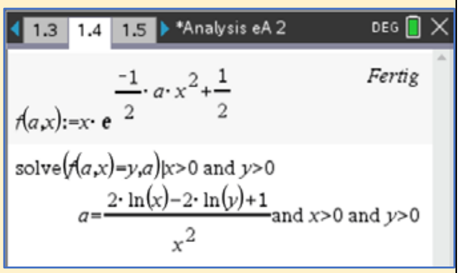
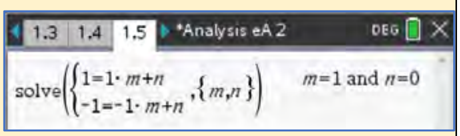
Lösung

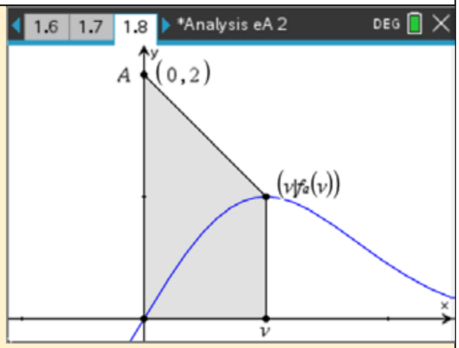
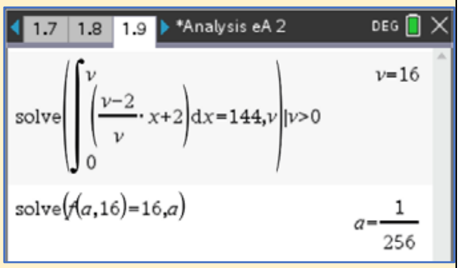
Lösen Sie die Gleichung $f_a(1) = e$ nach a auf. Beachten Sie, dass hier e für die Eulersche Zahl steht. Verwenden Sie deshalb nicht die Buchstabentaste $\boxed{\text{E}}$, sondern die Funktionstaste $\boxed{e^x}$ zur Eingabe von e. Man erhält a = –1 als Ergebnis.



	Die Steigung des Graphen an der Stelle x = 1 erhält man über die 1.Ableitung der Funktion $f_{-1}(x)$ an der Stelle x = 1: $f'_{-1}(1) = 2e$. Mit $\varphi = \arctan(2e) \approx 79{,}6°$ ergibt sich der Anstiegswinkel. Eine Selbstkontrolle auf grafischem Wege ist möglich.	 
f (2 BE)		
	Wegen $f_{-1}(-x) = -f_{-1}(x)$ ist der Graph von f_{-1} punktsymmetrisch zum Ursprung. Deshalb haben die beiden Flächenstücke, die der Graph von f_{-1} mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen x = –0,5 bzw. x = 0,5 einschließt, gleichen Inhalt. Die zugehörigen bestimmten Integrale besitzen aber entgegengesetzte Vorzeichen, weil sie auf verschiedenen Seiten der x - Achse liegen, daher ergänzen sich diese Teilflächen zu 0. Daraus folgt, dass die gegebene Integralgleichung richtig ist.	 

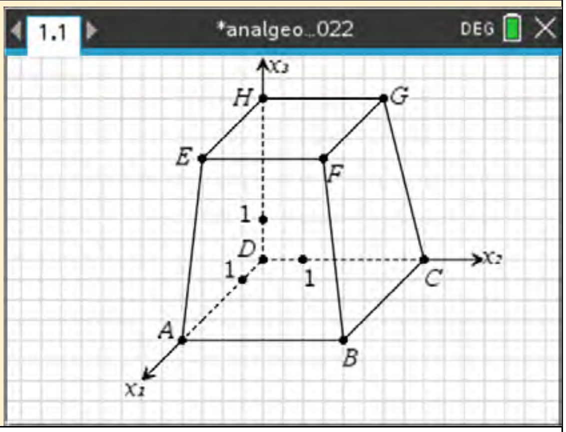
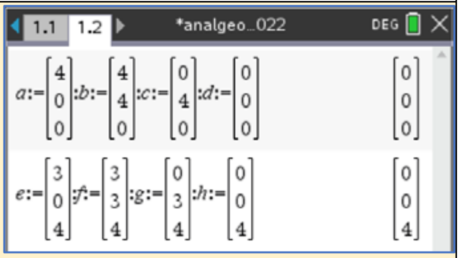
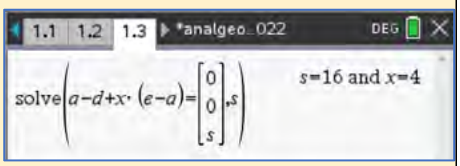
2	
a (3 BE)	
Lösung	$f_a(0) = 0$: Alle Graphen der Funktionenschar haben den Ursprung gemeinsam. $f_a'(0) = f_0'(0)$: Alle Graphen der Schar haben im Ursprung den gleichen Anstieg. $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \vee x = 0$: Keiner der Graphen hat außer dem Ursprung einen weiteren Punkt mit einem anderen Graphen der Schar gemeinsam.
b (3 BE)	
Lösung	Eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor k erfolgt durch einen Vorfaktor k vor dem Funktionsterm. Eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor k wird durch den Vorfaktor $\frac{1}{k}$ vor dem Argument x verursacht.  Führt man diese beiden Vorfaktoren ein, so ergibt sich $k \cdot f_a\left(\frac{1}{k} \cdot x\right) = x \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{k^2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}}$ $k \cdot f_a\left(\frac{1}{k} \cdot x\right) = f_{\frac{a}{k^2}}(x)$ Der Graph von $f_{\frac{a}{k^2}}(x)$ gehört ebenfalls zur Schar, weil $\frac{a}{k^2}$ für k > 0 ebenfalls eine beliebige reelle Zahl ist.
c (5 BE)	
Lösung	Nach Aufgabe 1d ist der Graph von $f_a(x)$ für a = 0 mit $f_0(x) = e^{\frac{1}{2}} \cdot x$ die Gleichung einer Ursprungsgeraden, d. h. es gibt keine Wendestelle. Für $a \neq 0$ gilt nach dem Satz vom Nullprodukt: $$(a \cdot x^2 - 3) \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{3}{a}$$ Für a < 0 hat die Gleichung $x^2 = \frac{3}{a}$ keine reelle Lösung, die gegebene Gleichung hat genau eine Lösung, also besitzt $f_a(x)$ genau eine Wendestelle. Für a > 0 hat die Gleichung $x^2 = \frac{3}{a}$ zwei reelle Lösungen, die gegebene Gleichung hat drei Lösungen, also besitzt $f_a(x)$ drei Wendestellen.

d (5 BE)	
Lösung	Die Punkte P(x|y) mit $x \cdot y < 0$ liegen im 2. oder 4. Quadranten.  Der Term $e^{-\frac{1}{2}\cdot a\cdot x^2+\frac{1}{2}}$ ergibt für alle reellen Zahlen x und alle reellen Zahlen a einen positiven Wert. Somit hängt das Vorzeichen von $f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}a\cdot x^2+\frac{1}{2}}$ nur vom Faktor x ab: Wenn x > 0 ist, gilt $f_a(x) > 0$, alle zugehörigen Punkte liegen im 1. Quadranten. Wenn x < 0 ist, gilt $f_a(x) < 0$, alle zugehörigen Punkte liegen im 3. Quadranten. Damit gilt $x \cdot y \geq 0$ für alle Punkte der Graphen der Schar, keiner dieser Punkte liegt also im 2. oder 4. Quadranten. Für Punkte x > 0 und y > 0 liegen alle Punkte im 1. Quadranten. Stellt man die Gleichung $f_a(x) = y$ unter den Bedingungen x > 0 und y > 0 nach a um, so ergibt sich die Gleichung $a = \frac{2\ln(x)-2\ln(y)+1}{x^2}$. Zu jedem Punkt (x|y) gibt es unter diesen Bedingungen genau einen Wert von a. 
e (3 BE)	
Lösung	Die Aussage „Alle Extrempunkte der Graphen der Schar liegen auf einer Geraden" kann man als wahr voraussetzen. Wenn alle Extrempunkte auf ein und derselben Geraden liegen, genügt es doch, zwei dieser Extrempunkte zu kennen, um die Gleichung der Geraden zu bestimmen. Aus der Teilaufgabe 1a sind die Koordinaten des Extrempunktes von f_1 mit H(1|1) bekannt. Aus der Teilaufgabe 1f ist bekannt, dass der Graph von f_1 punktsymmetrisch zum Ursprung ist, also gibt es einen zweiten Extrempunkt auf dem Graphen von f_1 mit den Koordinaten G(-1|-1). Die laut Aufgabenstellung existierende Gerade für die Extrempunkte muss also auch die Punkte H und G enthalten. Die Punkte H und G bestimmen die Gerade y = x. 

f (5)	
Lösung	Da die Hochpunkte auf der Geraden y = x liegen, gilt $f_a(v) = v$. Die Gerade durch die Punkte (v|v) und (0|2) hat die Gleichung $y = \frac{v-2}{v} \cdot x + 2$. Für den Flächeninhalt A_V des Vierecks gilt $$A_V = \int_0^v \left(\frac{v-2}{v} \cdot x + 2\right) dx = 144$$ Daraus wird v = 16 berechnet. Gefragt ist aber der Parameter a. Zu seiner Berechnung wird wegen $f_a(v) = v$ die Gleichung $f_a(16) = 16$ nach a gelöst. Ergebnis: $a = \frac{1}{256}$   Alternativer Lösungsweg: Die Flächenberechnung kann auch elementar erfolgen. Das Viereck ist ein Trapez, von dem die Längen der parallelen Seiten mit 2 und v sowie die Höhe v bekannt sind: $A_V = \frac{v+2}{2} \cdot v = 144$. Weiter, wie schon beschrieben.

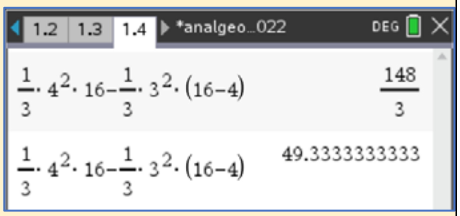
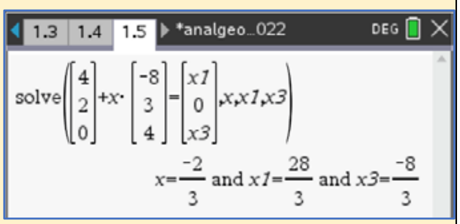
Analytische Geometrie - grundlegendes Anforderungsniveau

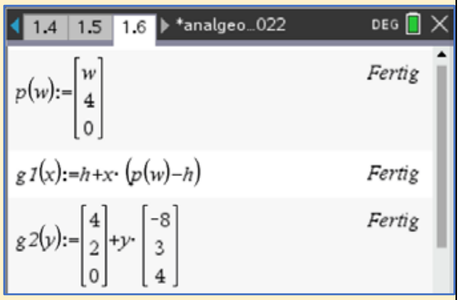
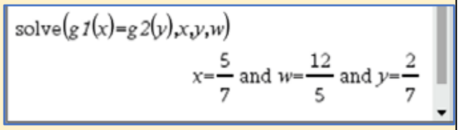
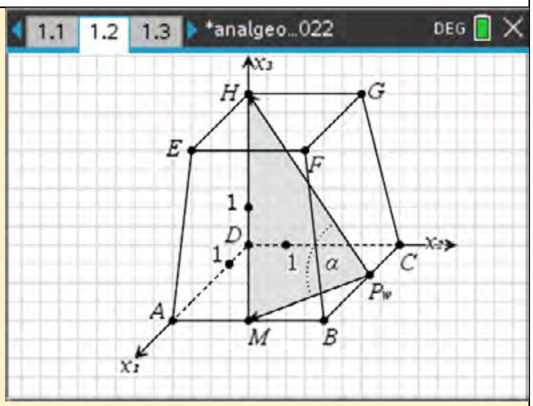
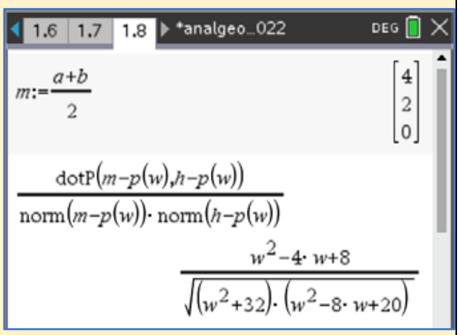
Analytische Geometrie Aufgabe 1 - (grundlegendes Anforderungsniveau)[8]

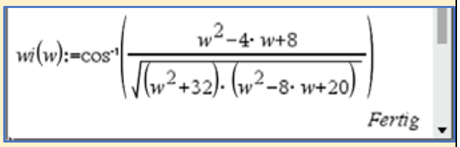
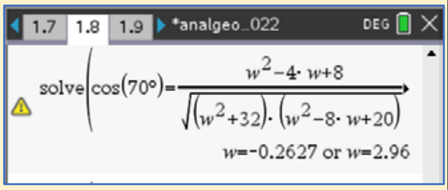
1	
a (3 BE)	
Lösung	Achten Sie auf die Verkürzung der Einheiten in x_1-Richtung. Das Schrägbild kann natürlich auf Papier gezeichnet werden. 
b (3 BE)	
Lösung	Die Spitze S(0|0|s) muss, wie der Punkt H, auf der x_3-Achse liegen. Außerdem liegt S auf der Geraden g durch die Punkte A und E. Die Gleichung für g ist $\vec{x} = \overrightarrow{DA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AE}$. Setzt man die Koordinaten dieser Punkte in die Gleichung $\overrightarrow{DA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}$ ein, und löst die entstehende Vektorgleichung dann ergibt sich s = 16.  

---

[8] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/abitur/pools2022/mathematik/grundlegend/2022_M_grundlege_1.pdf

c (3 BE)	
Lösung	Das Volumen der Pyramide ABCDS wird berechnet durch $V_1 = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$. Die Grundfläche A_G ist hier das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 4 LE. Als Höhe h kann die Länge der Strecke $\lvert\overline{DS}\rvert = 16\ LE$ verwendet werden (h ist senkrecht zur Grundfläche). Subtrahiert man von diesem Volumen V_2 der kleineren Pyramide EFGHS, so erhält man das Volumen des Stumpfes. Die Grundfläche A_G ist hier das Quadrat EFGH mit der Seitenlänge 3 LE. Als Höhe h kann die Länge der Strecke $\lvert\overline{HS}\rvert = (16-4)\ LE$ verwendet werden (h ist senkrecht zur Grundfläche). $V_{Stumpf} = V_1 - V_2 = \frac{1}{3} \cdot (4\ LE)^2 \cdot 16\ LE - \frac{1}{3} \cdot (3\ LE)^2 \cdot 12\ LE = \frac{148}{3} VE$ $V_{Stumpf} \approx 49{,}3\ VE$ 
d (3 BE)	
Lösung	Schnittpunkt von Gerade j: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-8\\3\\4\end{pmatrix}$ mit der x_1x_3-Ebene: Alle Punkte der x_1x_3–Ebene haben die Koordinaten $(x_1\lvert 0\rvert x_3)$. Der Schnittpunkt ist durch Lösen des Gleichungssystems $\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}-8\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\0\\x_3\end{pmatrix}$ zu berechnen. Der Durchstoßpunkt hat die Koordinaten $\left(\frac{28}{3}\lvert 0\rvert -\frac{8}{3}\right)$. 

e (3 BE)	
Lösung	Den Ortsvektor von $P_w(w\|4\|0)$ speichern. Die Gleichung $g1(x)$ für die Gerade durch H und P_w aufstellen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} w \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$  Die Gleichung g2(y) für die Gerade j mit der Gleichung von $g1(H,P_w)$ gleichsetzen und dieses Gleichungssystem lösen. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} w \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  Es ergibt sich $x = \frac{5}{7}; y = \frac{2}{7}$ und $w = \frac{12}{5}$.
f (5 BE)	
Lösung	Der Winkel zwischen $\overrightarrow{P_wM}$ und $\overrightarrow{P_wH}$ wird in der Abbildung mit α bezeichnet.  Der Punkt M als Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ hat die Koordinaten M(4|2|0). Der Winkel α zwischen den Vektoren $\overrightarrow{P_wM} = \begin{pmatrix} 4-w \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{P_wH} = \begin{pmatrix} -w \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ lässt sich mit der Formel $\alpha(w) = arccos\left(\frac{\overrightarrow{P_wM} \circ \overrightarrow{P_wH}}{\|\overrightarrow{P_wM}\| \cdot \|\overrightarrow{P_wH}\|}\right)$ bestimmen.  Der Term wird gespeichert unter wi(w)und zusammen mit y = 70(°) grafisch dargestellt. Der Schnittpunkt beider Graphen liegt bei ca. (2,96|70°). Der Darstellung lässt sich entnehmen, dass der Winkel α für

	$0 \leq w < 2{,}96$ größer als 70° ist. Alternativer Lösungsweg: Die Gleichung $\cos(70°) = \frac{\overrightarrow{P_wM} \circ \overrightarrow{P_wH}}{\lvert\overrightarrow{P_wM}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{P_wH}\rvert}$ wird gelöst. Es ergeben sich die Lösungen $w_1 \approx -0{,}2627$ und $w_2 \approx 2{,}96$. Aus dem Verlauf der Kosinusfunktion lässt sich schließen, dass die Kosinuswerte mit zunehmender Winkelgröße kleiner werden, also kommt nur das Intervall $0 \leq w < 2{,}96$ für Winkel größer als 70° in Frage.   

<table>
<tr><td>b
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>

Wir definieren zunächst den Startvektor und die Übergangsmatrix im *Calculator*.

$v:=\begin{bmatrix}100\\110\\425\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}100\\110\\425\end{bmatrix}$

$m:=\begin{bmatrix}0.45 & 0.1 & 0.07\\0.28 & 0.6 & 0.18\\0.27 & 0.3 & 0.75\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0.45 & 0.1 & 0.07\\0.28 & 0.6 & 0.18\\0.27 & 0.3 & 0.75\end{bmatrix}$

Die Verteilung nach drei Jahren erhält man, indem die Übergangsmatrix dreimal auf die jeweilige Zustandsverteilung angewendet wird, d. h.

$$\overrightarrow{v_3} = M^3 \cdot \overrightarrow{v_0}$$

$m^3 \cdot v \qquad \begin{bmatrix}81.50155\\204.1987\\349.29975\end{bmatrix}$

Dies bedeutet $\overrightarrow{v_3} \approx \begin{pmatrix}82\\204\\349\end{pmatrix}$.

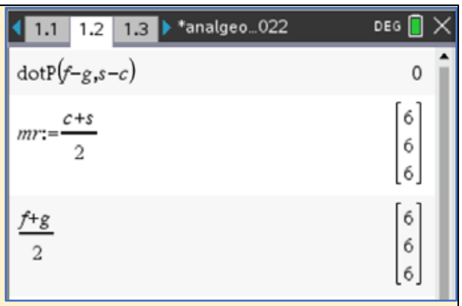
</td></tr>
<tr><td>c
(4 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>

Die Grenzmatrix G existiert nur dann, wenn es eine stabile Verteilung $\vec{v}$ gibt, so dass

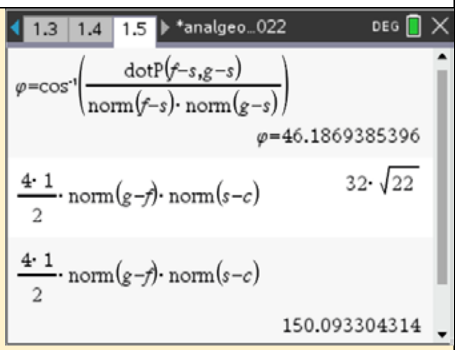
$M \cdot \vec{v} = \vec{v}$ ist, wobei wir für den Zustandsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix}x\\y\\1-x-y\end{pmatrix}$ annehmen. Dies bedeutet, dass wir die Anteile in den einzelnen Wäldern berechnen: „x entspricht dem Anteil in Wald A, y dem Anteil im Wald B und für den Wald C ergibt sich daher 1-x-y“.

</td></tr>
</table>

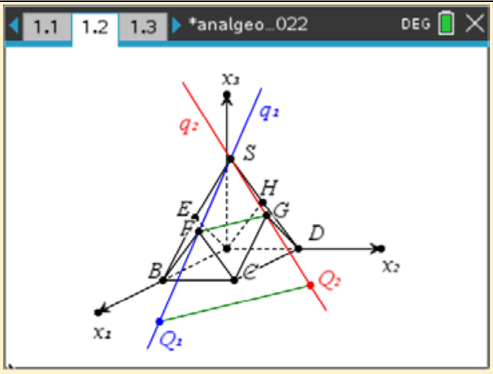
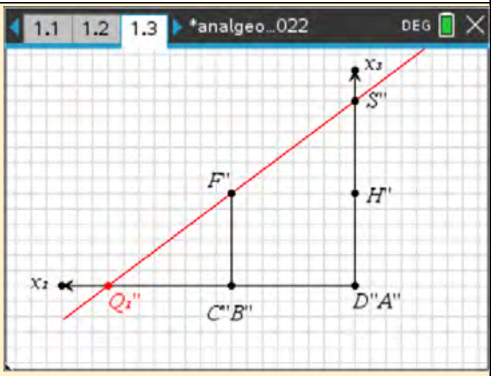
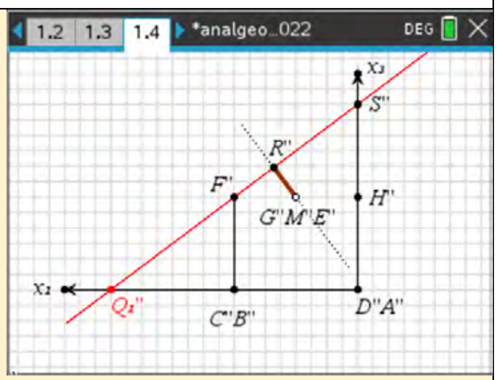
<table>
<tr><td></td><td>
Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander:
$\overrightarrow{FG} \circ \overrightarrow{CS} = 0$
Die Diagonalen halbieren einander, weil sie den gleichen Mittelpunkt haben:
$\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OS}}{2} = \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}$ und $\frac{\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG}}{2} = \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}$

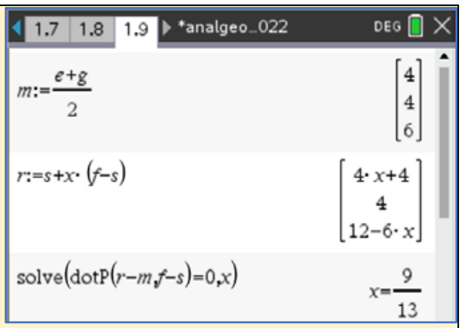
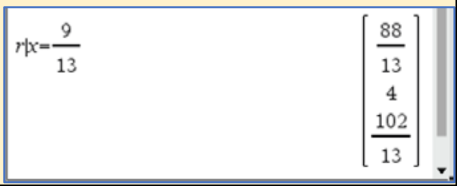


</td></tr>
<tr><td>c
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Die Ebene M_1: $x_1 = 8$ ist eine Ebene, die parallel zur x_2x_3-Ebene im Abstand 8 LE verläuft. Sie enthält z. B. die Punkte B, C und F und ist keine Symmetrieebene des Kirchendachs.
Die Ebene M_3: $x_3 = 6$ ist eine Ebene, die parallel zur x_1x_2-Ebene im Abstand 6 LE verläuft. Sie enthält z. B. die Punkte E, F, G und H und ist keine Symmetrieebene des Kirchendachs, weil der untere Teil kein Spiegelbild des oberen Teiles ist.
Die Ebene M_2: $x_1 - x_2 = 0$ ist eine Ebene, ist senkrecht zur x_1x_2-Ebene und verläuft entlang der Winkelhalbierenden der x_1-Achse und der x_2-Achse. Sie enthält z. B. die Punkte A, C und S und ist eine Symmetrieebene des Kirchendachs.
</td></tr>
<tr><td>d
(5 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Der Innenwinkel der Raute CGSF bei S wird von den Vektoren $\overrightarrow{SF}$ und $\overrightarrow{SG}$ eingeschlossen.
Seine Größe kann berechnet werden durch
$\varphi = arccos\left(\frac{\overrightarrow{SF}\circ\overrightarrow{SG}}{|\overrightarrow{SF}|\cdot|\overrightarrow{SG}|}\right) \approx 46{,}2°$.



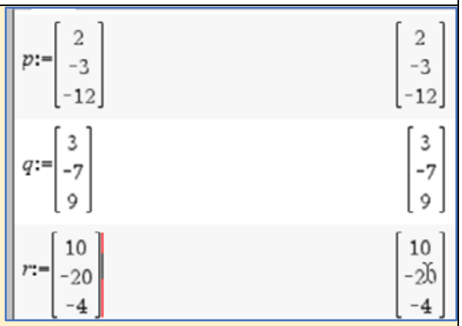
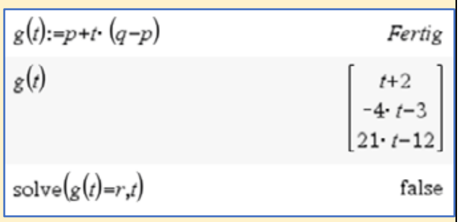
Zur Dachfläche gehören laut Aufgabenstellung die vier zueinander kongruenten rautenförmigen Flächen. Der Flächeninhalt einer Raute kann u. a. durch das halbe Produkt der Längen ihrer zwei Diagonalen berechnet werden. Deshalb ergibt sich für die gesamte Dachfläche der Flächeninhalt zu
$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{FG}| \cdot |\overrightarrow{CS}| = 32 \cdot \sqrt{22}\, FE \approx 150\, m^2$.
</td></tr>
</table>

e (3 BE)	
Lösung	  Schaut man von der Seite senkrecht auf die x_1x_3-Ebene, dann wird klar, dass der Punkt F“ in der Mitte der Strecke $\overline{S''Q_1''}$ liegt, weil auch H“ auf halber Höhe der Strecke $\overline{D''S''}$ liegt (Strahlensatz). Die Strecke $\overline{SQ_1}$ ist also doppelt so lang wie die Strecke $\overline{SF}$. Analog kann man schließen, dass die Strecke $\overline{SQ_2}$ auch doppelt so lang wie die Strecke $\overline{SG}$ ist. Demzufolge bilden die Geraden q_1 und q_2 mit den Strecken $\overline{FG}$ und $\overline{Q_1Q_2}$ eine Strahlensatzfigur und es gilt $\overline{FG} \parallel \overline{Q_1Q_2}$ sowie $\lvert\overline{Q_1Q_2}\rvert = 2 \cdot \lvert\overline{FG}\rvert$. Das Verhältnis des Abstandes von Q_1 zu Q_2 zum Abstand von F zu G ist 2 : 1.
f (5 BE)	
Lösung	 Schaut man von der Seite senkrecht auf die x_1x_3-Ebene, dann sieht man vom Modell des Stahlträgers, der E und G verbindet, nur einen Punkt. Dieser Punkt ist also Bildpunkt von E, G und dem Mittelpunkt M des Stahlträgers. Der Mittelpunkt M von $\overline{EG}$ hat die Koordinaten M(4|4|6). Der Punkt R liegt auf der Geraden q_1: $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OS} + x \cdot \overrightarrow{SF}$

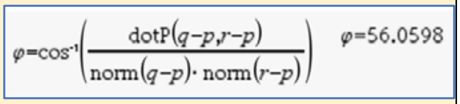
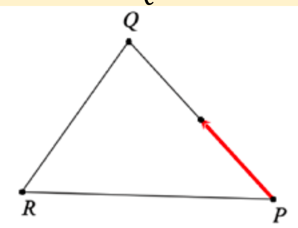
	Da $\overrightarrow{MR}$ orthogonal zu $\overrightarrow{SF}$ sein muss, um möglichst kurz zu sein~~,~~ muss das Skalarprodukt beider Vektoren null sein. Aus diesem Ansatz ergibt sich $x = \frac{9}{13}$. Setzt man diesen Wert in die Gleichung $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OS} + x \cdot \overrightarrow{SF}$ ein, ergeben sich die Koordinaten des Punktes R: $R\left(\frac{88}{13}\middle\|4\middle\|\frac{102}{13}\right)$	 

Analytische Geometrie - erhöhtes Anforderungsniveau

Analytische Geometrie/Lineare Algebra A1 Aufgabe 1- (erhöhtes Anforderungsniveau)[10]

1	
a (2 BE)	
Lösung	Speichern Sie die Ortsvektoren der gegebenen Punkte unter geeigneten Variablen ab. P, Q und R liegen nicht auf einer Geraden, wenn z. B. der Punkt R nicht auf der Geraden g(PQ) liegt. Die Gleichung der Geraden g durch die Punkte P und Q ist  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 21 \end{pmatrix}.$ Sie wird unter der Variablen g(t) gespeichert. Um den Nachweis zu erbringen, dass der Punkt R nicht auf der Geraden g liegt, wird geprüft, ob der Ortsvektor von R das Gleichungssystem $\overrightarrow{OR} = g(t)$ erfüllt:  $\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 21 \end{pmatrix}$ Da das Gleichungssystem keine Lösung besitzt, liegt R nicht auf der Geraden g.

[10] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/abitur/pools2022/mathematik/erhoeht/2022_M_erhoeht_B.pdf

<table>
<tr><td>b
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Der Innenwinkel im Punkt P wird von den Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ eingeschlossen.
Seine Größe kann berechnet werden durch
$\varphi = arccos\left(\frac{\overrightarrow{PQ}\circ\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{PR}|}\right) \approx 56°.$

</td></tr>
<tr><td>c
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Abbildung 1: Alle Punkte, deren Ortsvektoren sich in der Form $\overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + \mu \cdot \overrightarrow{PR}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ und $\mu = 0$ darstellen lassen, liegen auf der Strecke $\overline{PQ}$. So erhält man z. B. für $\lambda = 0.5$ den Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ und für $\lambda = 1$ den Ortsvektor zum Punkt Q.


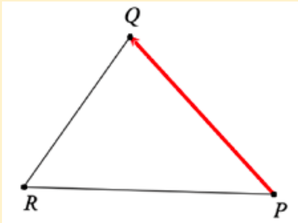
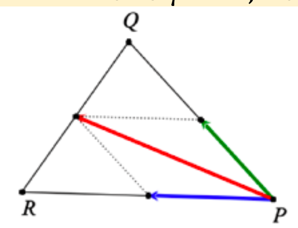
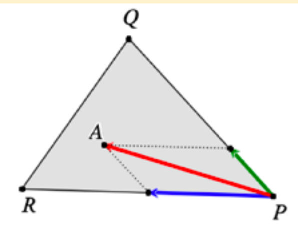
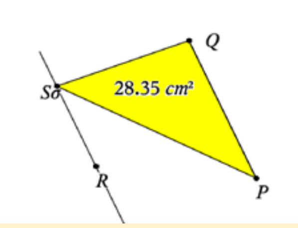
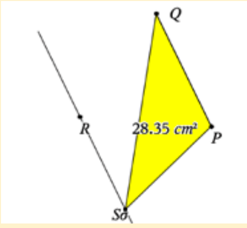


Abbildung 2: Alle Punkte, deren Ortsvektoren sich in der Form $\overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + \mu \cdot \overrightarrow{PR}$ mit $0 \leq \lambda + \mu \leq 1$ und $\lambda, \mu \geq 0$ darstellen lassen, gehören zum Dreieck PQR. Die Eckpunkte des Dreiecks erhält man mit P: $\lambda, \mu = 0$, R: $\lambda = 0$ und $\mu = 1$ und Q wie in Abbildung 1.
Gilt $\lambda + \mu = 1$, so erhält man alle Punkte der Strecke $\overline{RQ}$, so z. B. für $\lambda = 0.5$ und $\mu = 0{,}5$ den Mittelpunkt der Strecke $\overline{RQ}$.


Für $0 < \lambda + \mu < 1$ erhält man alle weiteren Punkte, die im Dreieck liegen. So z. B. für $\lambda = 0.3$ und $\mu = 0{,}5$ den hier dargestellten Punkt A im Dreieck.

</td></tr>
</table>

d (3 BE)	
Lösung	Die Punkte S_σ liegen auf einer Parallelen zu PQ durch R. Damit stimmen die Dreiecke PQR und PQS_σ in der Seite PQ und der Länge der zugehörigen Höhe überein. Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe sind flächengleich. Hinweis: Eine Kontrolle ist mit selbst gewählten Werten im Geometriefenster möglich.  
2	
a (2 BE)	
Lösung	80 % der Fahrräder, die sich am Ende eines Tages im Bereich A befinden, sind auch am Ende des nächsten Tages im Bereich A. Jedes Fahrrad, das am Ende eines Tages im Bereich C ist, befindet sich am Ende des nächsten Tages in einem der drei Bereiche A, B oder C.
b (2 BE)	
Lösung	Die gleichmäßige Verteilung am Ende eines Montags wird als Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 800 \\ 800 \\ 800 \end{pmatrix}$ gespeichert, wie auch die Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Da nach dem Zustand am Ende eines Freitags gefragt wird, muss die Übergangsmatrix viermal auf den Zustandsvektor angewendet werden, also $M^4 \cdot \vec{v}$ bestimmt werden.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Es sind also am Ende eines Freitags ca. 1170 Fahrräder im Bereich A.

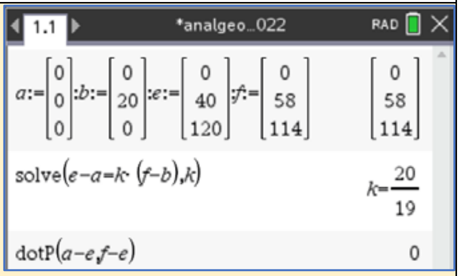
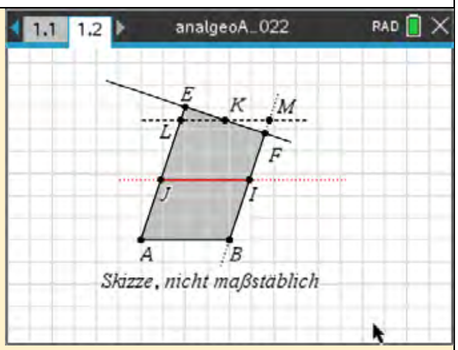
$m:=\begin{bmatrix}0.8 & 0 & 0.4\\ 0 & 0.6 & 0.3\\ 0.2 & 0.4 & 0.3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0.8 & 0 & 0.4\\ 0 & 0.6 & 0.3\\ 0.2 & 0.4 & 0.3\end{bmatrix}$
$v:=\begin{bmatrix}800\\800\\800\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}800\\800\\800\end{bmatrix}$
$m^4\cdot v$ $\begin{bmatrix}1170.24\\562.32\\667.44\end{bmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td>c
(3 BE)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Lösung</td>
<td>Mit $\vec{v_n} = M^n \cdot \vec{v_0}$ und
$M^n \cdot \vec{v_0} = M^n \cdot (r \cdot \vec{x} + s \cdot \vec{y} + t \cdot \vec{z}) = r \cdot M^n \cdot \vec{x} + s \cdot M^n \cdot \vec{y} + t \cdot M^n \cdot \vec{z}$
lässt sich folgern:
Da $M \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ gilt, folgt $r \cdot M^n \cdot \vec{x}=\vec{o}$.
Da $M \cdot \vec{y} = 0{,}7 \cdot y$ gilt, folgt $s \cdot M^n \cdot \vec{y} = s \cdot 0{,}7^n \cdot \vec{y}$.
Da $M \cdot \vec{z} = \vec{z}$ gilt, folgt $t \cdot M^n \cdot \vec{z} = t \cdot \vec{z}$ und damit gilt
$\vec{v_n} = s \cdot 0{,}7^n \cdot \vec{y} + t \cdot \vec{z}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>d
(3 BE)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Lösung</td>
<td>Das Lösen der Vektorgleichung $\vec{v_0} = (r \cdot \vec{x} + s \cdot \vec{y} + t \cdot \vec{z})$ liefert $s = \frac{b_0}{7}$ und t =160.
(Hinweis: Der Wert r wird nicht benötigt.)

$v0$ $\begin{bmatrix}800\\b0\\1600-b0\end{bmatrix}$
$\text{solve}(v0=r\cdot x+s\cdot y+t\cdot z,r,s,t)$
$r=\frac{4\cdot(b0-840)}{7}$ and $s=\frac{b0}{7}$ and $t=160$

Damit ergibt sich für die Anzahl der Fahrräder im Bereich A am Ende des Tages n mit der in Aufgabenteil c nachgewiesenen Beziehung $\vec{v_n} = s \cdot 0{,}7^n \cdot \vec{y} + t \cdot \vec{z}$:</td>
</tr>
</table>

	$a_n = 1280 - \frac{4\cdot(0,7)^n\cdot b_0}{7}$.	$s\cdot(0.7)^n\cdot y+t\cdot z \mid s=\frac{b0}{7}$ and $t=160$ $\begin{bmatrix} 1280-\frac{4\cdot(0.7)^n\cdot b0}{7} \\ \frac{3\cdot(0.7)^n\cdot b0}{7}+480 \\ \frac{(0.7)^n\cdot b0}{7}+640 \end{bmatrix}$
e (4 BE)		
Lösung	Für $b_0 = 0$ gilt $a_n = 1280 > 800$. Für $b_0 > 0$ ist der Wert für a_n am größten für n = 1 (da n > 0 sein muss). Folglich muss $a_1 = 1280 - \frac{4\cdot 0,7\cdot b_0}{7} \geq 800$ gelten. Aus der Ungleichung folgt $b_0 \leq 1200$. $a(n,b0):=1280-\frac{4\cdot(0.7)^n\cdot b0}{7}$ *Fertig* solve$(a(1,b0)\geq 800,b0)$ $b0\leq 1200.$ Damit befanden sich am Ende des genannten Dienstags im Bereich B höchstens 1200 Fahrräder. Hinweis: Es ist auch eine Lösung durch systematisches Probieren denkbar: $a(1,0)$ 1280. $a(1,100)$ 1240. $a(1,1000)$ 880. $a(1,1300)$ 760. $a(1,1200)$ 800. $a(1,1201)$ 799.6	

Analytische Geometrie/Lineare Algebra A2- Aufgabe 1 - (erhöhtes Anforderungsniveau)[11]

1	
a (3 BE)	
Lösung	 Speichern Sie die Ortsvektoren der gegebenen Punkte unter geeigneten Variablen ab. Wenn das Viereck ABFE ein Trapez ist, dann muss es zwei gegenüberliegende, parallele Seiten besitzen. Der Zeichnung nach kämen dafür die Seiten $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ in Frage. Die rechnerische Überprüfung bestätigt diese Annahme. Es gilt $\overrightarrow{AE} = \frac{20}{19} \cdot \overrightarrow{BF}$, die Vektoren $\overrightarrow{AE}$ und $\overrightarrow{BF}$ sind parallel. Dies trifft also auch auf die Seiten $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ zu. Wenn das Viereck ABFE im Punkt E einen rechten Winkel besitzt, dann muss das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{EA}$ und $\overrightarrow{EF}$ den Wert 0 haben. Dies ist der Fall, also liegt bei E ein rechter Winkel vor.
b (4 BE)	
Lösung	 Liegen die Punkte L und M auf den Geraden g(AE) bzw. g(BF) und verläuft die Gerade g(LM) parallel zu $\overline{AB}$ durch den Mittelpunkt K von $\overline{EF}$, so sind die Dreiecke ELK und FMK kongruent und damit flächengleich. Deshalb ist der Flächeninhalt des Vierecks ABFE genau so groß wie der Flächeninhalt des Parallelogramms ABML. Betrachtet man $\overline{AB}$ als Grundseite des Parallelogramms, so ist die Höhe des Parallelogramms gleich dem z-Wert von K, der wiederum der Mittelwert der z-Werte von E und F ist. Legt man nun eine zu $\overline{AB}$ parallele Gerade g(JI) in das Viereck ABFE, so ist die Teilfläche ABJI ebenfalls ein Parallelogramm mit der Grundseite $\overline{AB}$. Wenn dann der Abstand von g(JI) halb so groß ist, wie der Abstand von K zu $\overline{AB}$, dann ist der Flächeninhalt des Parallelogramms ABIJ halb so groß wie der des Parallelogramms ABML, das ja flächengleich zum Viereck ABFE ist.

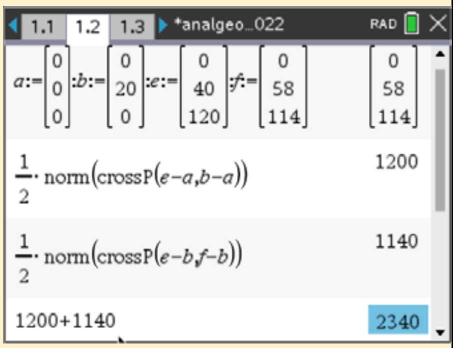
[11] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/abitur/pools2022/mathematik/erhoeht/2022_M_erhoeht_B_2.pdf

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Alternativer Lösungsweg:

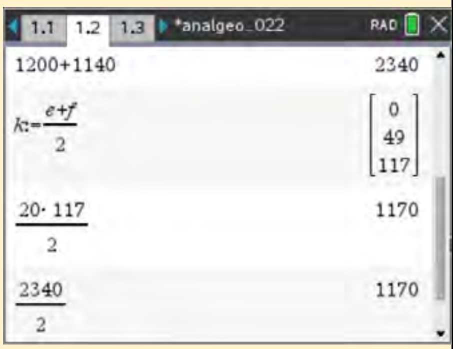
Der Flächeninhalt des Vierecks ABFE wird als Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ABE und BFE z. B. mithilfe des Vektorprodukts berechnet.

$\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{BE}\right|+\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BF}\right| =$
$2340\ FE$



Die z-Koordinate des Mittelpunktes K (z = 117) der Strecke $\overline{EF}$ wird über das arithmetische Mittel der Ortsvektoren von F und E berechnet.

$\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}\right)=\begin{pmatrix}0\\49\\117\end{pmatrix}$



Die horizontale Linie zerlegt das Viereck ABFE in zwei Teile, von denen das untere Teil ein Parallelogramm ist. Dessen Höhe ist also $h=\frac{117}{2}\ LE$. Die Strecke $\overline{AB}$ hat eine Länge von 20 LE.
Der Flächeninhalt dieses unteren Teils ergibt sich zu
$\left|\overline{AB}\right|\cdot h=20\cdot\frac{117}{2}=1170\ FE.$
Das ist gerade die Hälfte von 2340 FE, dem Flächeninhalt des Vierecks ABFE.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

c
(3 BE)

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

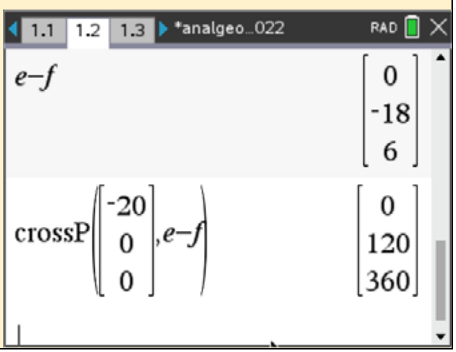
Lösung

</td>
<td>

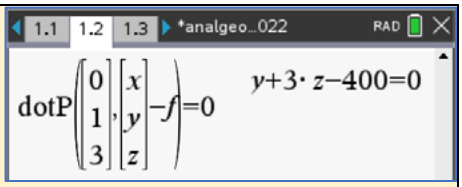
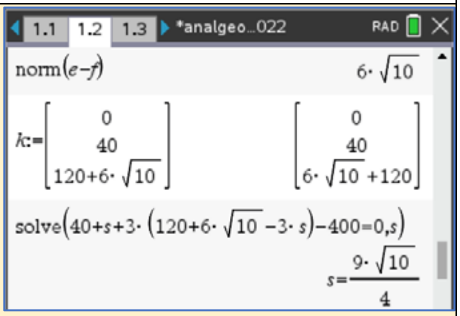
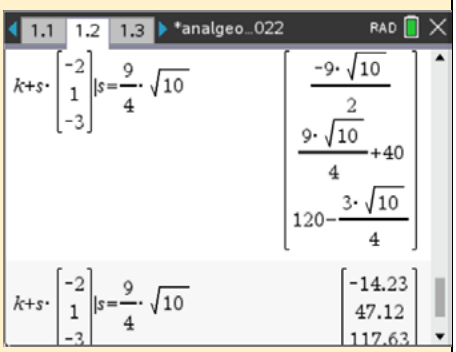
Der Normalenvektor der Ebene, in der die Punkte E, F, G und H liegen, kann mit dem Vektorprodukt bestimmt werden:

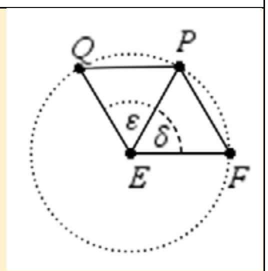
$$\overrightarrow{FG}\times\overrightarrow{FE}=\begin{pmatrix}-20\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-18\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\120\\360\end{pmatrix}=120\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$$

Als Normalenvektor kann $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ verwendet werden.



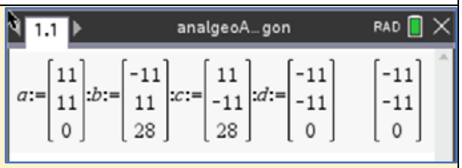
</td>
</tr>
</table>

	Die Koordinatenform der Ebene wird mit $\vec{n} \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OF}\right) = 0$ bestimmt. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 58 \\ 114 \end{pmatrix}\right] = 0$ führt auf $y + 3z - 400 = 0$ (Übereinstimmung mit dem Kontrollergebnis) 
d (5 BE)	
Lösung	Der Punkt K entsteht durch Drehung von $\overrightarrow{EF}$ um E, bis K senkrecht über E steht. Die x- und die y-Koordinaten von K stimmen dann mit denen des Punktes E überein. Die z-Koordinate von K ist um den Betrag von $\overrightarrow{EF}$ $(6 \cdot \sqrt{10}\ LE)$ größer als die z-Koordinate von E. Die Koordinaten von K sind $K\left(0\vert 40\vert 120 + 6 \cdot \sqrt{10}\right)$.  Die Gerade durch K mit dem gegebenen Richtungsvektor hat die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 120 + 6 \cdot \sqrt{10} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Setzt man die y- und z-Koordinaten dieser Geradengleichung in die Ebenengleichung $y + 3z - 400 = 0$ ein, lässt sich die Größe des Parameters s für den Schnitt von Gerade und Ebene bestimmen. Man erhält $s = \frac{9}{4} \cdot \sqrt{10}$. Setzt man diesen Wert von s in die Geradengleichung ein, so ergeben sich die Koordinaten des Schattenpunktes K‘. $\overrightarrow{OK'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 120 + 6 \cdot \sqrt{10} \end{pmatrix} + \frac{9}{4} \cdot \sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OK'} \approx \begin{pmatrix} -14{,}23 \\ 47{,}12 \\ 117{,}63 \end{pmatrix}$ Da die Angaben auf Zentimeter genau sind, kann man auf ganze Zentimeter runden: $\overrightarrow{OK'} \approx \begin{pmatrix} -14 \\ 47 \\ 118 \end{pmatrix}$ 

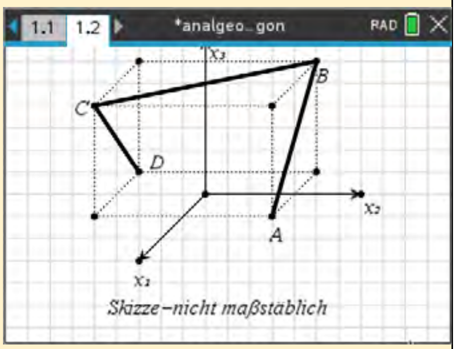
e (2 BE)	
Lösung	Die Karte liegt auf der Deckseite des Betonkörpers, wenn z. B. der Punkt F(0|58|114) die Ebenengleichung von $E_a\colon a \cdot y + z = 40a + 120$ erfüllt. Durch Einsetzen der Koordinaten von F in diese Ebenengleichung wird der Wert des Parameters $a = \frac{1}{3}$ bestimmt. $a \cdot 58 + 114 = 40a + 120 \Longrightarrow 18a = 6 \Longrightarrow a = \frac{1}{3}$
f (3 BE)	
Lösung	Die aufgeklappte Karte wirft dann keinen Schatten auf die Deckfläche, wenn die Karte parallel zu den Sonnenstrahlen steht. In diesem Fall müssen der Richtungsvektor der Sonnenstrahlen und der Normalenvektor der Ebene E_a orthogonal zueinander sein, d. h. ihr Skalarprodukt hat den Wert 0, wenn a = 3 ist: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3$
g (5 BE)	
Lösung	 Die Punkte F, P und Q haben den gleichen Abstand von E, d. h. die Seiten $\overline{EF}$, $\overline{EP}$ und $\overline{EQ}$ sind gleich lang. Die Punkte P und Q liegen in der gleichen Höhe z über dem Erdboden (der xy-Ebene). Da P und Q in ihren x- und z-Koordinaten übereinstimmen, wird ihr Abstand allein durch die Differenz $y_1 - y_2$ ihrer y-Koordinaten bestimmt. Nach Aufgabenstellung gilt $\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 - 58 \\ z - 114 \end{pmatrix} \right\| = y_1 - y_2.$ Andererseits ist $\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 - 58 \\ z - 114 \end{pmatrix} \right\|$ der Abstand von F und P. Die Strecken $\overline{FP}$ und $\overline{PQ}$ sind deswegen gleich lang. Nach Kongruenzsatz sss sind die Dreiecke EFP und EPQ kongruent. Deshalb stimmen die Winkel δ und ε überein (Skizze). Damit ist gezeigt, dass die Strecken $\overline{EF}$ und $\overline{EQ}$ einen doppelt so großen Winkel einschließen, wie die Strecken $\overline{EF}$ und $\overline{EP}$.

Analytische Geometrie/Lineare Algebra A2- Aufgabe 2 (erhöhtes Anforderungsniveau)[12]

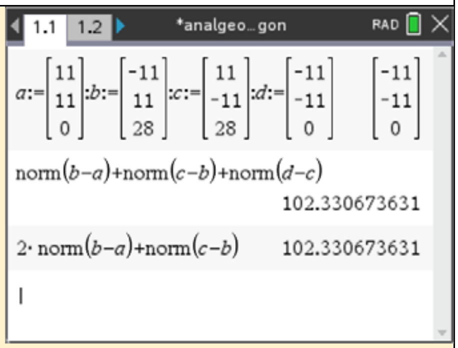
<table>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>a
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Zunächst sollten die Ortsvektoren der Punkte A(11|11|0), B(-11|11|28), C(11|-11|28) und D(-11|-11|0) unter geeigneten Variablen gespeichert werden.



Die Punkte B und C liegen symmetrisch bezüglich der x_3-Achse, weil die x_3-Koordinaten übereinstimmen und sich die x_1-Koordinaten und die x_2-Koordinaten nur in ihrem Vorzeichen unterscheiden.



</td></tr>
<tr><td>b
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>
Die Länge des Streckenzuges ergibt sich aus der Summe der Beträge der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CD}$ zu ca. 102 m.



Alternativ kann ausgenutzt werden, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ als Diagonalen zweier gegenüber liegender Quaderseiten gleiche Länge besitzen:
$2 \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| \approx 102\ m$
</td></tr>
</table>

[12] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/abitur/pools2022/mathematik/erhoeht/2022_M_erhoeht_B_3.pdf

c
(3 BE)

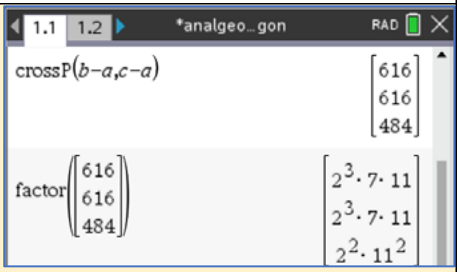
Lösung

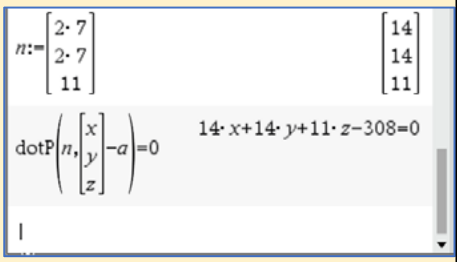
Eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C in Koordinatenform lässt sich z. B. über die Normalenform
$\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{x_0}) = 0$ ermitteln.

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 616 \\ 616 \\ 484 \end{pmatrix} = 44 \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix};$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \vec{x_0} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich als Gleichung für die Ebene E:
$14x_1 + 14x_2 + 11x_3 - 308 = 0.$

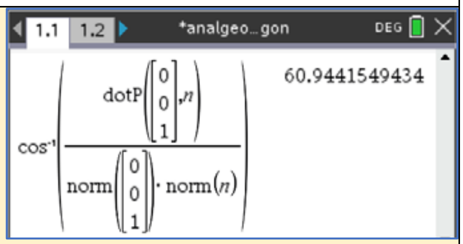




d
(5 BE)

Lösung

Die x_1x_2-Ebene hat den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, die Ebene E hat den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$.



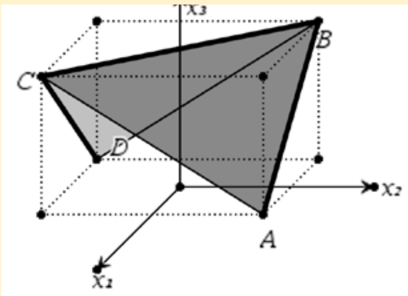
Der Winkel zwischen beiden Ebenen entspricht dem Winkel zwischen ihren Normalenvektoren. Der Winkel φ kann berechnet werden über

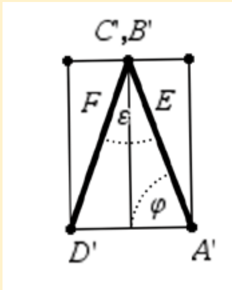
$$\varphi = arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}\right|}\right) \approx 61°.$$

Betrachtet man den Quader entlang des Vektors

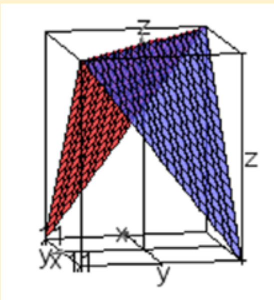
$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -22 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix} = 22 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann sieht man die Spurgeraden der Ebenen E und F in den Quaderseitenflächen, in denen die Punkt C und D bzw. A und B liegen, als Strecken. In dem (virtuellen) gleichschenkligen Dreieck D'A'C' erkennt man den Winkel φ als einen der Basiswinkel. Der Winkel zwischen den Ebenen E und F ist der

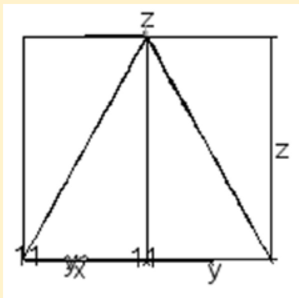
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Winkel ε an der Spitze dieses Dreiecks. Für ihn gilt nach dem Innenwinkelsatz $\varepsilon = 180° - 2 \cdot \varphi$.

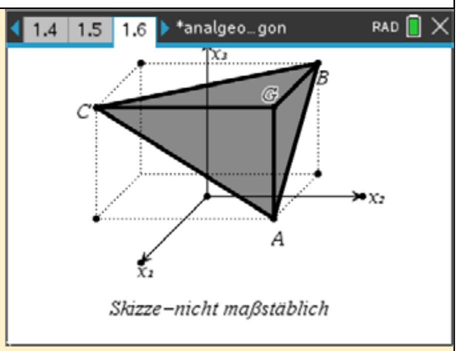




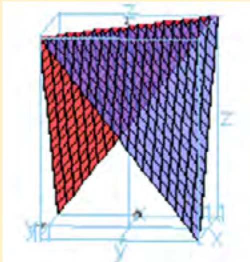
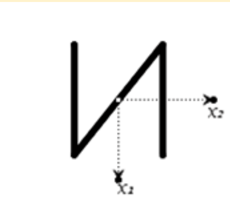
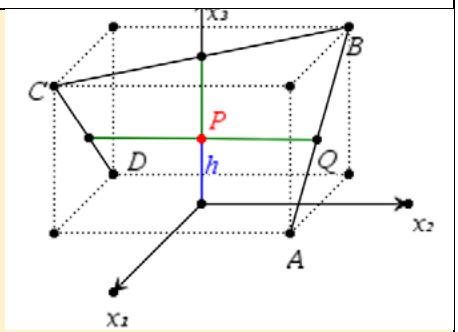
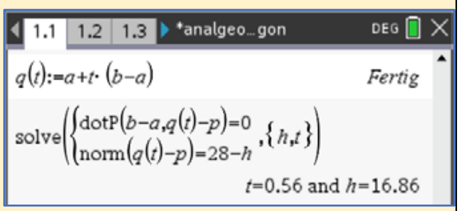
Hinweis: Das Vorstellungsvermögen lässt sich unterstützen, indem man die Gleichung für F bestimmt und die Ebenen E und F in der 3D-Darstellung anzeigen lässt. Diese lässt sich drehen, sodass man die Ansicht von „schräg vorn“, parallel zur x_1x_2-Ebene anschaulich erkennen kann.





</td>
</tr>
<tr>
<td>e
(4 BE)</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Lösung</td>
<td>


Die Ebene E durch die Punkte A, B und C schneidet von dem Quader einen Tetraeder ABCG ab (siehe Skizze).
Betrachtet man die Seitenfläche, die die Punkte A und B enthält, als die Grundfläche A_G des Quaders und die Seite $\overline{CG}$ sowohl als Höhe h des Tetraeders als auch des Quaders, dann gilt für das Volumen V_T des Tetraeders $V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{6} \cdot A_G \cdot h$. Das Volumen des Quaders ist $V_Q = A_G \cdot h$.
Für den Restkörper ergibt sich das Volumen $V_R = V_Q - V_T = \frac{5}{6} \cdot A_G \cdot h$.
Für das Verhältnis der Volumina erhält man damit $\frac{V_T}{V_R} = \frac{1}{5}$.
</td>
</tr>
</table>

. **f** (4 BE)	
Lösung	Unter Verwendung des Hinweises in der Teilaufgabe d lässt sich erkennen, dass die Abb. 4 z. B. durch den Vektor  $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -22 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix} = 22 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Blickrichtung entsteht. Die Abbildung 3 entsteht, wenn man in Richtung der y-Achse auf den Quader schaut, also z. B. in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Eine Betrachtung von oben führt zu folgender schematischer Darstellung: 
g (4 BE)	
Lösung	 $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}; t \in [0; 1]$ beschreibt die Lage von Q auf der Strecke $\overline{AB}$. Ist die Gleichung $\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{AB} = 0$ erfüllt, dann steht $\overrightarrow{PQ}$ senkrecht zu $\overrightarrow{AB}$. Der Betrag von $\overrightarrow{PQ}$ gibt dann den Abstand von P zu $\overline{AB}$ an. Dieser Abstand muss mit dem Abstand 28 – h von P zu $\overline{BC}$ übereinstimmen. Hinweis: Die Lösung des Gleichungssystems ergibt $t \approx 0{,}56$ und $h \approx 16{,}86$. Diese Lösung war aber in der Aufgabenstellung nicht verlangt. 

Stochastik - grundlegendes Anforderungsniveau

Stochastik – Aufgabe 1 (grundlegendes Anforderungsniveau)[13]

1	
a (3 BE)	
Lösung	Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Pakete mit dem Ziel B. X ist binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,07. Gesucht sind $P(X=9)\approx 0{,}104$ und $P(X<9)\approx 0{,}734$. binomPdf(100,0.07,9) 0.104015 binomCdf(100,0.07,0,8) 0.733966
b (3 BE)	
Lösung	Der Erwartungswert ist $E(X)=100\cdot 0{,}07=7$. Die gesuchte prozentuale Abweichung vom Erwartungswert, wenn genau 9 Pakete das Ziel B erreichen, berechnet sich mit $\frac{9-7}{7}\approx 29\ \%$.
c (3 BE)	
Lösung	Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Pakete mit dem Ziel C. Y ist binomialverteilt mit n = 20 und p = x. Es gilt $P(X=0)=54\ \%$. Hiermit lässt sich p $\approx 3\ \%$ ermitteln. nSolve(binomPdf(20,x,0)=0.54,x=0.1) 0.03034 $\text{solve}((1-p)^{20}=0.54,p)\mid p\le 1$ $p=0.03034$ Lösungsvariante: Da Y binomialverteilt ist, gilt: $P(Y=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ gesucht ist derjenige Wert von p, für den gilt: $P(Y=0)=\binom{20}{0}\cdot p^0\cdot(1-p)^{20}=0{,}54$, d. h. $(1-p)^{20}=0{,}54$ Auch hier erhält man p $\approx 3\ \%$.

13 https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/abitur/pools2022/mathematik/grundlegend/2022_M_grundlege_9.pdf

d (2 BE)	
Lösung	Der Term $0{,}9^{14} \cdot \sum_{i=0}^{3} \binom{6}{i} \cdot 0{,}1^{i} \cdot 0{,}9^{6-i}$ kann in zwei Teile zerlegt werden: $0{,}9^{14}$: Beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass von 14 Paketen 14 nicht das Ziel A besitzen. $\sum_{i=0}^{3} \binom{6}{i} \cdot 0{,}1^{i} \cdot 0{,}9^{6-i}$: Beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass von 6 weiteren Paketen höchstens drei das Ziel A haben. Da beide Teilterme multiplikativ verknüpft sind, bedeutet dies, dass man 20 Pakete betrachtet, von denen die ersten (oder letzten) 14 nicht das Ziel A und von den restlichen 6 Paketen höchstens drei das Ziel A haben.
e (3 BE)	
Lösung	Mit den Bezeichnungen S: „Das ausgewählte Paket ist schwer." Z: „Das ausgewählte Paket hat das Ziel A." und den gegebenen Informationen: P(Z) = 10 %, P(S) = 5 % und P(S∩ Z) $= 0{,}8$ % (da 8 % von den Paketen mit dem Ziel A, die 10% aller Pakete ausmachen, zu schwer sind) ergibt sich die folgende Vierfeldertafel.

	S	$\bar{S}$	
Z	**0,8 %**	9,2 %	**10 %**
$\bar{Z}$	4,2 %	85,8 %	90 %
	5 %	95 %	100 %

f (3 BE)	
Lösung	Der Anteil der schweren Pakete ist unter denjenigen mit dem Ziel A mit 8% anders als unter allen Paketen (5 %). Damit sind die Ereignisse S und Z stochastisch abhängig. Die beiden betrachteten Anteile stimmen nicht überein.

g (3 BE)	
Lösung	Der Anteil der Pakete mit dem Ziel A beträgt 10 %, das Ziel B haben 7 % aller Pakete. Da 8 % der Pakete mit dem Ziel A und 2 % der Pakete mit dem Ziel B zu schwer sind, folgt, dass mehr als 5 % der Pakete mit dem Ziel A oder B zu schwer sind. Der Anteil der schweren Pakete unter denjenigen, die weder das Ziel A noch das Ziel B haben, ist also kleiner als 5 %. Hinweis: Man kann diese Überlegung im Kopf verifizieren: Beispiel: Von 10000 Paketen sind 5 % zu schwer, also 500. Von den 1000 Paketen, die nach A gehen, sind 80 zu schwer. Von den 700 Paketen, die nach B gehen, sind 14 zu schwer. 18 + 14 = 32 > 25 (5 % von 500).

Stochastik - Aufgabe 2 (grundlegendes Anforderungsniveau)[14]

1

a (3 BE)

Lösung

Mit B: Personen mit Pkw-Fahrerlaubnis, die in Bioläden einkaufen und E: Personen mit Pkw-Fahrerlaubnis, die sich für den Kauf eines Elektroautos interessieren, folgt mit den gegebenen Daten:

P(E) = 47,5 %, P(B) = 43,4 % und P($\bar{E} \cap \bar{B}$) $= 34{,}7$ %.

	E	$\bar{E}$	
B	25,6 %	17,8 %	**43,4 %**
$\bar{B}$	21,9 %	**34,7 %**	56,6 %
	47,5 %	52,5 %	100 %

b (2 BE)

Lösung

Die Aussage ist richtig, da P($E \cap B$) $=$ 25,6 % größer ist als P($\bar{E} \cap B$) $=$ 17,8 %.

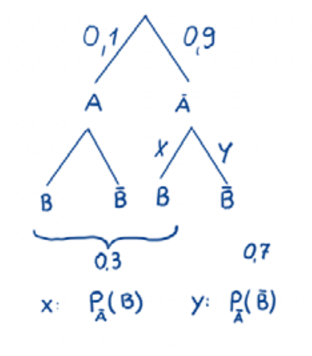
c (3 BE)

Die Zufallsgröße X: „Personen interessieren sich nicht für den Kauf eines Elektroautos“ ist binomialverteilt, es gilt: $X \sim B_{30;0.525}$.
Damit diese Anzahl mindestens doppelt so groß ist, wie die Anzahl derjenigen, die sich für den Kauf eines Elektroautos interessieren, ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 20)$ zu bestimmen.

```
binomCdf(30,0.525,20,30)        0.08424
```

Es ergibt sich $P(X \geq 20) \approx 8{,}4$ %.

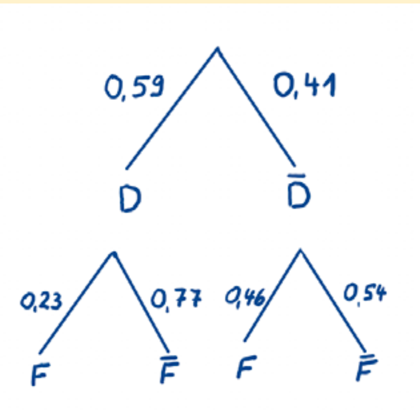
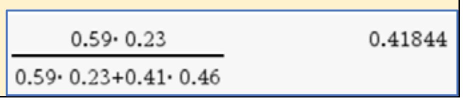
[14] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/abitur/pools2022/mathematik/grundlegend/2022_M_grundlege_10.pdf

2	
a (1 BE)	
Lösung	Es ist sinnvoll, auch mit Blick auf Teilaufgabe b, ein Baumdiagramm anzulegen. A: Ausstattungsmerkmal A; B: Ausstattungsmerkmal B; Gegeben sind P(A) = 0,1 sowie, dass 30 % mindestens eines der Merkmale A oder B besitzen. Daraus folgt $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}7$, d. h., dass 70% keines der beiden Merkmale aufweisen. 
b (4 BE)	
Lösung	Gesucht ist $P_{\bar{A}}(B) = x$. Da die beiden Merkmale unabhängig voneinander auftreten, gilt: Wegen $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}7$ und P($\bar{A}$) = 0,9 $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}7}{0{,}9} = \frac{7}{9}$ Da $P_{\bar{A}}(B) = 1 - P_{\bar{A}}(\bar{B})$ gilt, folgt $P_{\bar{A}}(B) = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$. Lösungsvariante: Für die Wahrscheinlichkeit „Das Fahrzeug weist mindestens eines der beiden Merkmale auf, gilt auch: P(A) + $P(\bar{A} \cap B) = 0{,}3$, d. h. 0,1 + 0,9 · x = 0,3. Man erhält auch so x = $\frac{2}{9}$.
c (3 BE)	
Lösung	Für das Zufallsexperiment gilt, dass zehn Elektroautos des Herstellers zufällig ausgewählt werden. Der Term weist daraufhin, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E mittels des Gegenereignisses $\bar{E}$ berechnet wird, da dafür gilt: P(E) = 1 – P($\bar{E}$). Zu $P(\bar{E}) = 10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^9 + 0{,}7^{10}$ gehören die beiden Ereignisse genau ein Auto bzw. kein Auto hat mindestens eines der beiden Merkmale. Ereignis E: „Unter den zehn ausgewählten Autos weisen mindestens zwei eines der beiden Merkmale A oder B auf.“

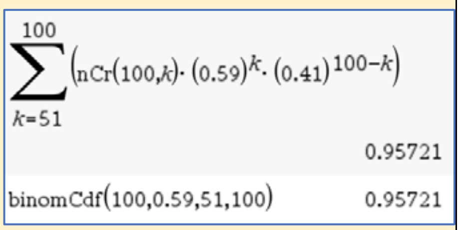
D (4 BE)	
Lösung	Der betrachtete Vorgang stellt ein Ziehen ohne Zurücklegen dar. Das gesuchte Ereignis D kann mit dem Gegenereignis $\overline{D}$ beschrieben werden. Es gilt P(D) = 1 – P($\overline{D}$). $\overline{D}$: Keines der ersten drei untersuchten Autos weist das Merkmal A auf. Wenn n die Anzahl der Autos unter den 10 Autos ist, die das Merkmal A haben, dann beschreibt 10 – n die Anzahl der Autos, die es nicht haben. Dann gilt: P(D) = $1-\left(\frac{10-n}{10}\cdot\frac{9-n}{9}\cdot\frac{8-n}{8}\right)\geq 0{,}9$ Es müssen also mindestens fünf der untersuchten zehn Autos das Merkmal A aufweisen. $\text{solve}\left(1-\frac{10-n}{10}\cdot\frac{9-n}{9}\cdot\frac{8-n}{8}\geq 0.9,n\right)$ $n\geq 4.75972$

Stochastik - erhöhtes Anforderungsniveau

Stochastik - Aufgabe 1 (erhöhtes Anforderungsniveau)[15]

1	
a (3 BE)	
Lösung	D: „Eine Person hat Datenschutzbedenken." F: „Eine Person nutzt ein Fitnessarmband." Gegeben sind P(D) = 0,59 und damit auch P($\overline{D}$) = 0,41. Weiterhin gegeben ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_D(F)$ = 0,23 und damit auch $P_D(\overline{F})$ = 0,77. Wegen $P(\overline{D} \cap F) = 0{,}19$ und P($\overline{D}$) = 0,41 gilt $P_{\overline{D}}(F) = \frac{P(\overline{D} \cap F)}{\mathrm{P}(\overline{D})}$ = $\frac{0{,}19}{0{,}41} = 0{,}46$. Damit ergibt sich $P(\overline{D} \cap \overline{F})$ = 0,54. 
b (3 BE)	
Lösung	Es wird die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_F(D) = \frac{P(F \cap D)}{\mathrm{P}(F)}$ gesucht. $P_F(D) = \frac{P(F \cap D)}{\mathrm{P}(F)} = \frac{0{,}59 \cdot 0{,}23}{0{,}59 \cdot 0{,}23 + 0{,}41 \cdot 0{,}46} \approx 41{,}8\ \%$ 

[15] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/abitur/pools2022/mathematik/erhoeht/2022_M_erhoeht_B_11.pdf

c (3 BE)	
Lösung	Die Ungleichung 0,23 ≠ 0,59 · 0,23 + 0,19 steht für den Zusammenhang $P_D(F) \neq P(F)$. 0,23 ist der Anteil der Kunden unter allen Kunden mit Datenschutzbedenken, die ein Fitnessarmband nutzen. 0,59 · 0,23 + 0,19 ist der Anteil der Kunden unter allen Kunden, die ein Fitnessarmband nutzen. Da die beiden Anteile nicht übereinstimmen, sind die Ereignisse stochastisch abhängig. Für stochastische Unabhängigkeit müsste $P_D(F) = P(F)$ gelten.
d (2 BE)	
Lösung	Die Zufallsgröße X: „Anzahl der Kunden mit Datenschutzbedenken“ ist binomialverteilt, es gilt: $X \sim B_{100;0.59}$. Es soll P(X > 50) berechnet werden. $P(X > 50) = \sum_{k=51}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0{,}59^k \cdot 0{,}41^{100-k}$ Man kann mit dieser Formel bzw. auch der im MMS definierten Funktion *binomCdf(n,p,a,e)* den gesuchten Wert berechnen.  Es ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von ca. 96 %.
e (3 BE)	
Lösung	Wie schon in Aufgabenteil d gezeigt, gilt a = 0,41 und b = 100 – k. Der gesamte Term 1 – $\sum_{k=51}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0{,}59^k \cdot 0{,}41^{100-k}$ beschreibt das Ereignis: „Höchstens die Hälfte der ausgewählten Kunden hat Datenschutzbedenken".

f (3 BE)	
Lösung	Wenn 2n Kunden ausgewählt werden und keiner von diesen Datenschutzbedenken (p = 0,59) hat, dann gilt hierfür die Wahrscheinlichkeit $p_{2n} = 0{,}41^{2n}$. Für n Kunden gilt damit $p_n = 0{,}41^n$. Gesucht ist ein n damit $p_{2n} = \frac{1}{2} \cdot p_n$ gilt. Das Lösen der Gleichung liefert den Wert n ≈ 0,777421. Da dies keine natürliche Zahl ist, gibt es kein solches n, welches die geforderte Bedingung erfüllt. $\text{solve}\left((0.41)^{2\cdot n} = \frac{1}{2}\cdot(0.41)^n, n\right)$ $n=0.777421$
2	
a (5 BE)	
Lösung	Die Abbildung liefert für p = 0,07 einen Wert zwischen 0,095 und 0,1. Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn höchstens vier Armbänder fehlerhaft sind. Die Zufallsgröße X: „Anzahl der fehlerhaften Armbänder" ist binomialverteilt, es gilt: $X \sim B_{n;0.07}$. Aus der Abbildung ergibt sich, dass P(X $\leq 4 \approx 0.095 \ldots 0.1)$ gelten muss. Durch systematisches Probieren findet man n = 113. binomCdf(n,0.07,0,4) ▸ 0.100712 n =112. binomCdf(n,0.07,0,4) ▸ 0.096593 n =113. binomCdf(n,0.07,0,4) ▸ 0.092621 n =114. Nur für n = 113 ergibt sich mit ca. 9,7 % ein Wert, der der Grafik entspricht.

b (3 BE)	
	Der Händler möchte vermeiden, irrtümlich von einem zu geringen Anteil fehlerhafter Armbänder auszugehen, da dies beispielsweise zu vielen Reklamationen durch Kunden führen könnte. Bei der gewählten Nullhypothese und einem Stichprobenumfang von n = 113 beträgt das Risiko für diesen Irrtum höchstens 9,7 % (siehe Aufgabenteil a) und ist damit gering. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich von einem zu großen Anteil auszugehen, kann dagegen wesentlich größer sein. So würde der Händler z. B. bei einem „wirklichen“ Anteil fehlerhafter Armbänder von p = 0,06 bei dieser Testkonstruktion mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 81 % irrtümlich von einem zu großen Anteil ausgehen. (Fehler 2. Art: $X{\sim}B_{113;0.06}$ P(X > 4) $\approx$ 81 %.) `binomCdf(113,0.06,5,113) ▸ 0.814523`

Stochastik – Aufgabe 2 (erhöhtes Anforderungsniveau)[16]

1	
a (3 BE)	
Lösung	In der Tabelle sind die Werte fett hervorgehoben, die sich direkt aus den gegebenen Angaben ableiten lassen.
b (2 BE)	
Lösung	$\overline{H}$: Service-Hotline nicht angerufen S: Tarif S Zu bestimmen ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{H}}(S)$: $P_{\overline{H}}(S) = \frac{P(\overline{H} \cap S)}{P(\overline{H})} = \frac{0{,}11}{0{,}53} \approx 20{,}8\%$.
c (2 BE)	
Lösung	Es wird nach dem Anteil aller Kunden gefragt, die entweder den Tarif L haben oder die Service-Hotline noch nicht angerufen haben. Aufgrund der Formulierung „entweder oder" kann der gesuchte Anteil mit $P(H \cap L) + P(\overline{H} \cap S) + P(\overline{H} \cap M)$ berechnet werden. In der Tabelle sind die Anteile dargestellt: 10,5 % + 11 % + 27,5 % = 49 %.

Tabelle zu Lösung a:

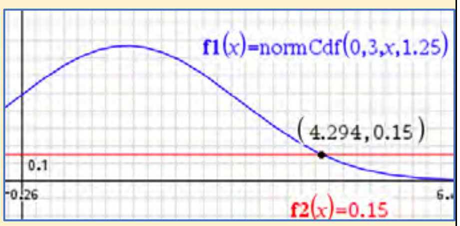
	Tarif S	Tarif M	Tarif L	
Service-Hotline angerufen	9 %	**27,5 %**	10,5 %	**47 %**
Service-Hotline nicht angerufen	**11 %**	27,5 %	14,5 %	53 %
	20 %	55 %	**25 %**	100 %

Tabelle zu Lösung c:

	Tarif S	Tarif M	Tarif L
Service-Hotline angerufen			10,5 %
Service-Hotline nicht angerufen	11 %	27,5 %	

[16] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/abitur/pools2022/mathematik/erhoeht/2022_M_erhoeht_B_12.pdf

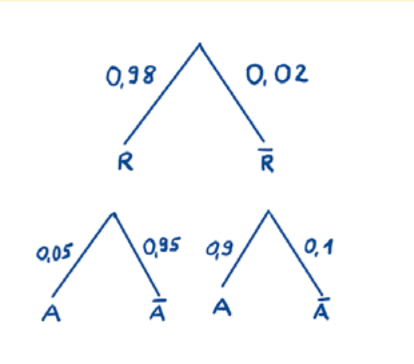
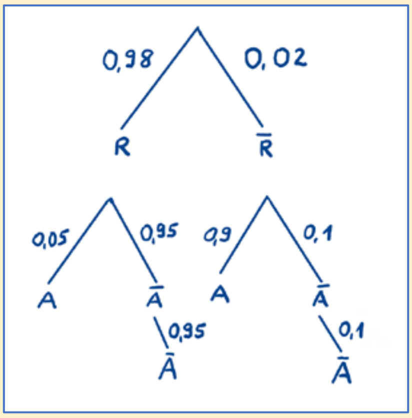
d (3 BE)	
Lösung	Der Term $\sum_{i=470}^{490}\binom{600}{i}\cdot 0{,}8^{i}\cdot 0{,}2^{600-i}$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass mindestens 470 und höchstens 490 der befragten 600 Kunden einen der Tarife M oder L haben (da p(M) + p(L) = 0,55 + 0,25 = 0,8 gilt).
e (4 BE)	
Lösung	X: Anzahl der Kunden mit dem Tarif S und es gilt: $X \sim B_{600;0.2}$. Gesucht wird die größte natürliche Zahl k, für die P(X < k) < 0,25 ist. Durch systematisches Probieren erhält man k = 113. binomCdf(600,0.2,0,k) ▸ 0.223263 — k =112. binomCdf(600,0.2,0,k) ▸ 0.255388 — k =113.
2 (3 BE)	
Lösung	Nimmt man zunächst an, dass die Ziffer 1 viermal vorhanden ist, dann sucht man alle Möglichkeiten, die Ziffern 111159 auf die vorhandenen 6 Positionen zu verteilen. Die Anzahl hierfür berechnet man z. B. mit $\frac{6!}{4!} = 30$. (Permutation mit Wiederholung) Da auch die 5 bzw. die 9 viermal vorhanden sein könnte, gibt es insgesamt 90 mögliche Kombinationen.
3	
a **(4 BE)**	
Lösung	Die größte Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Wartezeit in einem Intervall mit einer Länge von zwei Minuten liegt, ergibt sich für ein symmetrisches Intervall um den Erwartungswert μ. Dabei ist die Größe dieser größten Wahrscheinlichkeit unabhängig von der Lage des Erwartungswerts (was man zumindest an Beispielen überprüfen kann).

	X: Wartezeit mit $X \sim N_{\mu;1,25}$ (1 Minute und 15 Sekunden sind 1,25 Minuten) Gesucht ist z. B. für $\mu = 0$ dann $P(-1 \leq X \leq 1)$ bzw. für $\mu = 1$ $P(0 \leq X \leq 2)$. Mit dem Befehl *normCdf*(a, e, μ, σ) ergibt sich: normCdf(-1,1,0,1.25) 0.576289 normCdf(0,2,1,1.25) 0.576289 Man erhält $P(-1 \leq X \leq 1)$ < 0,6, damit gibt es kein solches Zeitintervall.
b **(4 BE)**	
Lösung	X: Wartezeit mit $X \sim N_{\mu;1,25}$ Gesucht wird zunächst derjenige Erwartungswert μ, für den gilt P(X < 3) = 0,15. Die Lösung kann entweder durch systematisches Probieren normCdf(0,3,m,1.25)|m=4 0.211168 normCdf(0,3,m,1.25)|m=4.2 0.168138 normCdf(0,3,m,1.25)|m=4.3 0.148879 oder aber auch mit dem *nsolve*-Befehl bestimmt werden. Man erhält nSolve(normCdf(0,3,m,1.25)=0.15,m,0.1) 4.29396 $\mu \approx 4{,}29$. Hinweis: auch eine grafische Lösung ist denkbar:  Hiermit kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit P(X ≥ 5) berechnet werden. normCdf(5,∞,4.29396,1.25) 0.286094 Es ergibt sich P(X ≥ 5) ≈ 28,6 %.

Stochastik - Aufgabe 3 (erhöhtes Anforderungsniveau)[17]

1	
a (3 BE)	
Lösung	X: Anzahl der unrunden Bälle und es gilt: $X \sim B_{200;0,02}$. Für den Erwartungswert $E(X) = n \cdot p$ ergibt sich mit n = 200 und p = 0,02 der Wert 4. Gesucht ist damit P(X < 4): binomCdf(200,0.02,0,3) 0.431495 Man erhält P(X < 4) $\approx 43\ \%$.
b (3 BE)	
Lösung	Man kann diesen Zufallsversuch als zweistufig betrachten. Mittels des Gegenereignisses zu: „In mindestens einer dieser beiden Stichproben sind mehr als sechs Bälle unrund“, also: „In beiden Stichproben sind höchstens sechs Bälle unrund“, kann die Berechnung erfolgen. P(Y) = 1 – (P(X≤ 6)$\cdot$ $P(X \leq 6)$) $1-(\text{binomCdf}(200,0.02,0,6))^2$ 0.205338 Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist ca. 20,6 %.

[17] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2022/abitur/pools2022/mathematik/erhoeht/2022_M_erhoeht_B_13.pdf

<table>
<tr><td>c
(3 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>R: „Ein Ball ist rund."
A: Ein Ball wird aussortiert."

</td></tr>
<tr><td>d
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Der Term $0{,}98 \cdot 0{,}05 \cdot 2000$ gibt für 2000 hergestellte Bälle den Erwartungswert für die Anzahl der aussortierten runden Bälle an.
Der Erwartungswert ist 98.</td></tr>
<tr><td>e
(4 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Wenn alle nichtaussortierten Bälle noch einmal kontrolliert werden, ergibt dies folgendes Baumdiagramm:


$\frac{0.02\cdot (0.1)^2}{0.02\cdot (0.1)^2+0.98\cdot (0.95)^2}$ 0.000226

Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit ist dann:

$P_{\bar{A}\cap\bar{A}}(\bar{R}) = \frac{P(\bar{R}\cap\bar{A}\cap\bar{A})}{P(\bar{A}\cap\bar{A})} = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}1^2}{0{,}02\cdot 0{,}1^2 + 0{,}98\cdot 0{,}95^2} \approx 0{,}023\%.$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>a
(2 BE)</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>

Die gegebene Betragsgleichung $|h-p| = c \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$ liefert mit der Stichprobengröße n, der relativen Häufigkeit h und dem Sicherheitsniveau c die Grenzen p_1 und p_2 des Konfidenzintervalls.

Die linke und die rechte Seite der zweiten Gleichung erhält man durch Umformen der Betragsgleichung.

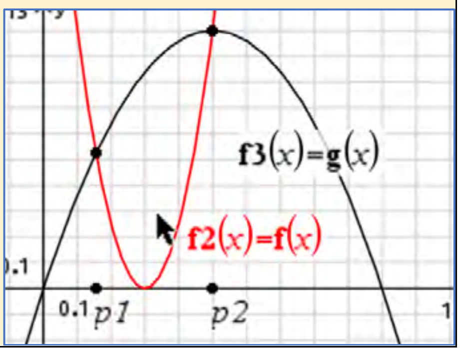
$$\left(|h-p|=c\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)^2 \qquad (h-p)^2=\frac{-c^2\cdot p\cdot(p-1)}{n}$$

$$\left((h-p)^2=\frac{-c^2\cdot p\cdot(p-1)}{n}\right)\cdot n \qquad (h-p)^2\cdot n=-c^2\cdot p\cdot(p-1)$$

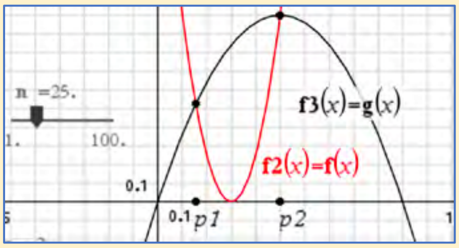
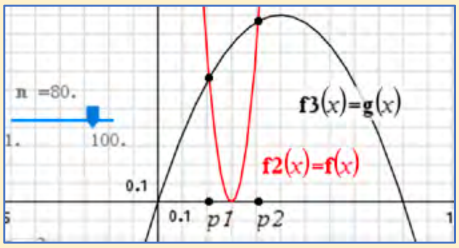
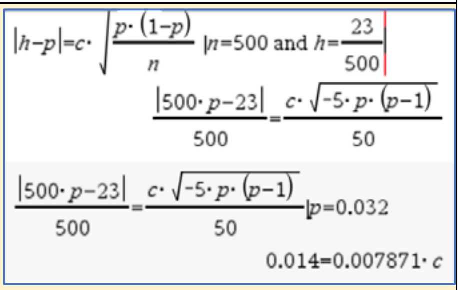
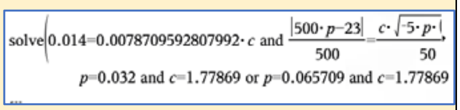
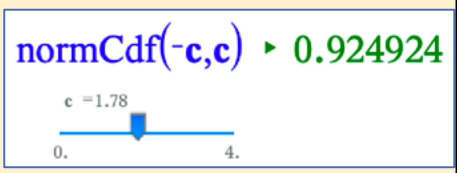
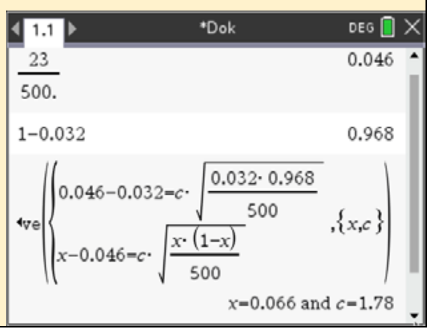
$f(p):=(h-p)^2\cdot n$ *Fertig*

$g(p):=-c^2\cdot p\cdot(p-1)$ *Fertig*

Definiert man dann die linke Seite der letzten Gleichung als Funktion f und die rechte Seite als Funktion g, so ergeben die Abszissen der Schnittpunkte der Graphen von f und g eben die gleichen Lösungen p_1 und p_2, also die Grenzen des Konfidenzintervalls.



</td></tr>
</table>

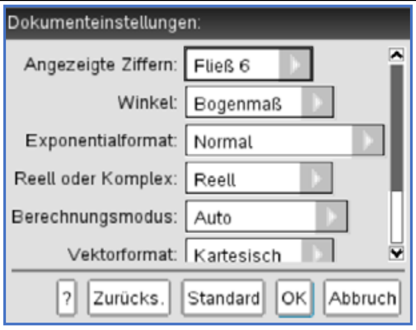
b (4 BE)	
Lösung	Da die Funktion g mit $g(p) = c^2 \cdot p \cdot (1-p)$ unabhängig von n ist, wird bei einem größeren Wert von n nur der Graph f mit $f(p) = n \cdot (h-p)^2$ eine Veränderung erfahren. Vergrößert sich n, so verläuft der Graph von g steiler und der Tiefpunkt bleibt am gleichen Ort. Damit ergibt sich ein kürzeres Konfidenzintervall. Hinweis: eine Kontrolle ist an der Grafik möglich.  
c (4 BE)	
	Durch Einsetzen der gegebenen Werte n = 500, h = $\frac{23}{500}$ und $p_1 = 0{,}032$ in die Betragsungleichung erhält man zunächst die Gleichung $0{,}014 = 0{,}007871 \cdot c$.  Löst man nun das Gleichungssystem aus der obigen Gleichung und der Betragsgleichung, so erhält man den Wert $p_2 \approx 0{,}066$.  Zusätzlich erhält man auch einen Wert $c \approx 1{,}78$ für das Signifikanzniveau, was einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von ca. 92,5 % entspricht.  Lösungsvariante: 

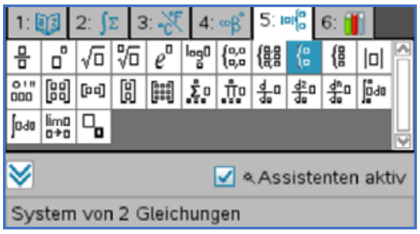
Kompetenzen im Umgang mit dem TI-Nspire™ CX CAS

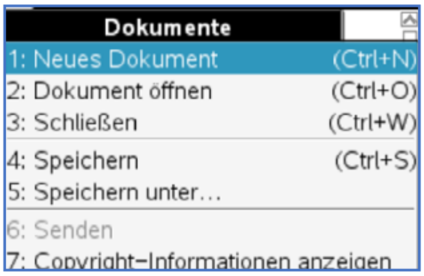
Nachstehend werden zusammenfassend einige grundlegende Kompetenzen im Umgang mit dem CAS-Rechner TI-Nspire™ CX CAS dargestellt. Sie erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

<table>
<tr><th>Der Schüler kann</th><th></th></tr>
<tr><td>
– Einstellungen vornehmen, u. a.:
• Winkelmaß (Grad- und Bogenmaß),
• angezeigte Ziffern,
• Helligkeit des Displays,
– das Betriebssystem aktualisieren,
– den Prüfungsmodus herstellen,
– den Ladezustand überprüfen.

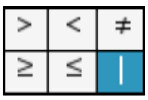
– den Katalog und die Vorlagen nutzen.

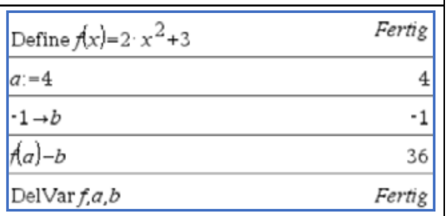
– Dokumente
• anlegen,
• speichern,
• aufrufen,
• löschen,
• in Probleme und Seiten gliedern.
</td><td>


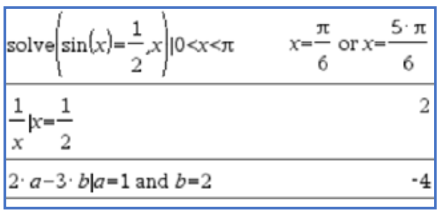




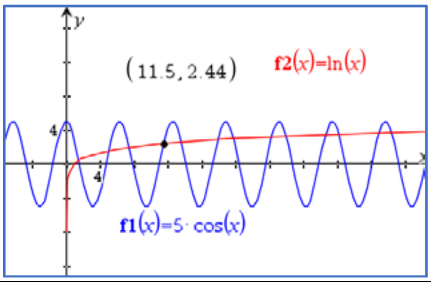
</td></tr>
<tr><td>
– Variablen und Funktionen definieren und löschen.

– den Bedingungsoperator (WITH-Operator) zur Einschränkung von Definitionsbereichen, zum Ersetzen von Variablen u. ä. verwenden.
(Zweitbelegung von ⊟)


</td><td>




</td></tr>
</table>

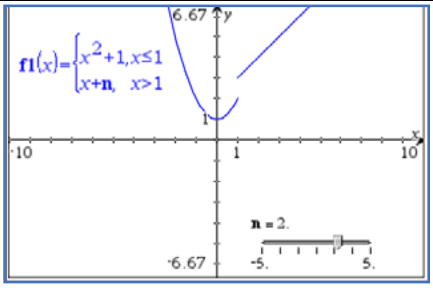
– Terme • berechnen, • umformen, • ausmultiplizieren, • faktorisieren, • in unechte Brüche zerlegen. – das Summenzeichen verwenden.	$\sqrt[3]{0.001}$ → 0.1 $10^{-99}\cdot 1.\mathrm{E}99$ → $1.$ $\frac{a^3-b^3}{a-b}$ → $a^2+a\cdot b+b^2$ $\mathrm{expand}\left((a+b)^3\right)$ → $a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$ $\mathrm{factor}\left(a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3\right)$ → $(a+b)^3$ $\mathrm{expand}\left(\frac{4\cdot x^2+1}{x+1}\right)$ → $\frac{5}{x+1}+4\cdot x-4$ $\sum_{k=1}^{n}\left(k^2\right)$ → $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$
– Gleichungen/Ungleichungen/ Gleichungssysteme mit dem *solve*-Befehl lösen und dabei – die Anzeigen des Rechners richtig interpretieren. – Gleichungen und Ungleichungen mit *nSolve* näherungsweise lösen. (sinnvollen Startwert verwenden) – Gleichungen mit grafischen Verfahren lösen.	$\mathrm{solve}\left(2\cdot x^2-2\cdot x=4,x\right)$ → $x=-1$ or $x=2$ $\mathrm{solve}\left(x^2-4<0,x\right)$ → $-2<x<2$ $\mathrm{solve}\left(\begin{cases}x-y=1\\x+y=2\end{cases},x,y\right)$ → $x=\frac{3}{2}$ and $y=\frac{1}{2}$ $\mathrm{solve}\left(\begin{cases}x-y=1\\x-y=2\end{cases},x,y\right)$ → false $\mathrm{solve}\left(\begin{cases}x-y=1\\x-y=1\end{cases},x,y\right)$ → $x=\boldsymbol{c1}+1$ and $y=\boldsymbol{c1}$ $\mathrm{solve}(\sin(x)=0,x)$ → $x=\boldsymbol{n2}\cdot\pi$ $\mathrm{nSolve}\left(\sin(x)=e^{-x},x,3\right)$ → 3.09636 $\mathrm{nSolve}\left(\sin(x)=e^{-x},x,7\right)$ → 9.4247 
– Ableitungen von Funktionen ermitteln. – bestimmte und unbestimmte Integrale von Funktionen bestimmen.	$\frac{d}{dx}\left(x^2\cdot\sin(x)\right)$ → $x^2\cdot\cos(x)+2\cdot x\cdot\sin(x)$ $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x}\right)$ → $\frac{2}{x^3}$ $\frac{d}{da}\left(b\cdot e^{-2\cdot a}\right)$ → $-2\cdot e^{-2\cdot a}\cdot b$ $\int(x\cdot\ln(x))dx$ → $\frac{x^2\cdot\ln(x)}{2}-\frac{x^2}{4}$ $\int_{-1}^{2}\left(-x^2+4\right)dx$ → 9

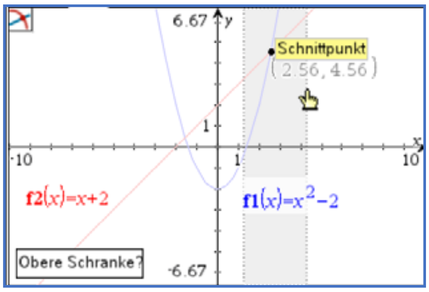
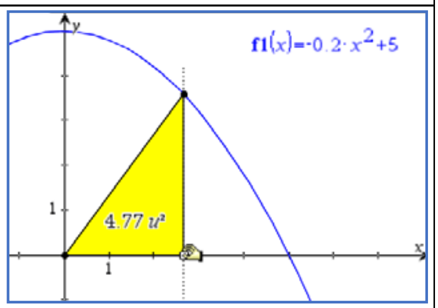
<table>
<tr>
<td>– Grenzwerte von Funktionen ermitteln.

– den Definitionsbereich von Termen/Funktionen ermitteln.

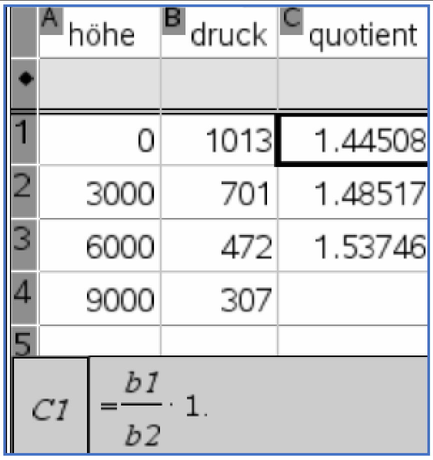
– Volumen von Rotationskörpern ermitteln.</td>
<td>$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$ undef
$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)$ ∞
$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right)$ $-\infty$

$\operatorname{domain}\left(\frac{x-4}{x^2-1},x\right)$ $x\neq -1$ and $x\neq 1$

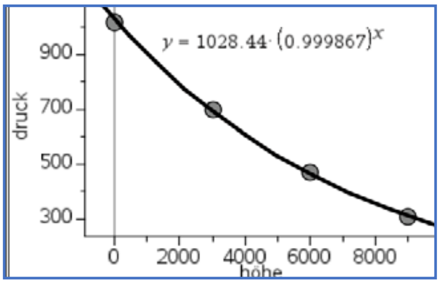
$\pi\cdot\int_0^r x^2\,dx$ $\frac{\pi\cdot r^3}{3}$</td>
</tr>
<tr>
<td>– Graphen zeichnen und dabei ggf.
• geeignete Fenstereinstellungen vornehmen,
• Wertetabellen anzeigen,
• stückweise definierte Funktionen darstellen,
• Funktionenscharen darstellen,
• das Menü Graphen analysieren nutzen,
• Schieberegler verwenden.</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>– einfache geometrische Objekte konstruieren.
– den Zugmodus nutzen.
– Größen messen.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>– Listen
• definieren,
• auswerten.</td>
<td>anzahl:=seq(k,k,2,6,2) {2,4,6}
preis:={1.52,3.99,2.49} {1.52,3.99,2.49}
sum(anzahl·preis) 33.94
mean(preis) 2.66667</td>
</tr>
</table>

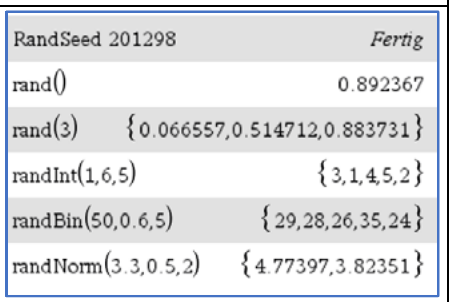
- Tabellen füllen.
- Spalten mit Listen verknüpfen.
- Operationen auf Spalten bzw. Zellen anwenden.



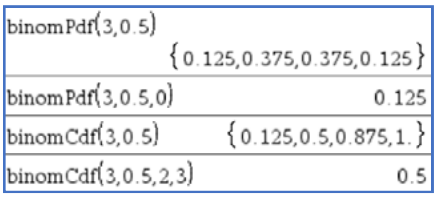
- Diagramme in *Data&Statistics* erstellen.
- Daten mit Regression analysieren.



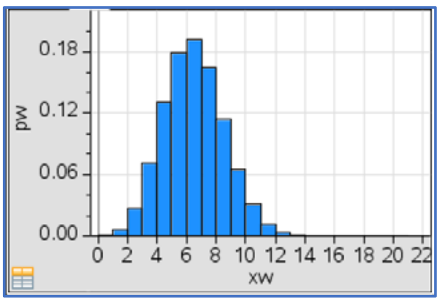
- Zufallszahlen erzeugen.

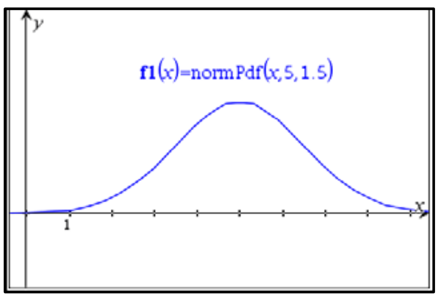


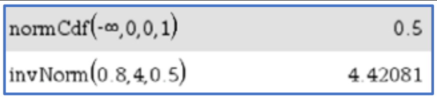
- Wahrscheinlichkeiten binomialverteilter Zufallsgrößen berechnen.

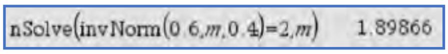


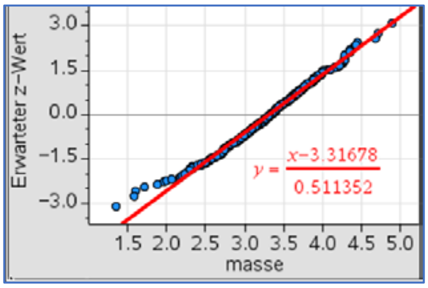
- binomial- und normalverteilte Zufallsgrößen graphisch darstellen.





<table>
<tr>
<td>– Berechnungen im Zusammenhang mit normalverteilten Zufallsgröße rationell durchführen.</td>
<td>


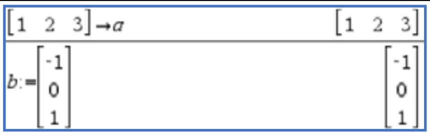


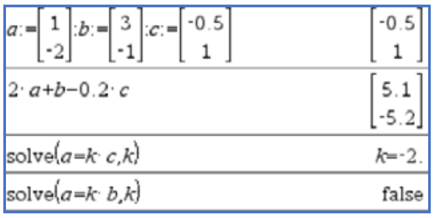
</td>
</tr>
<tr>
<td>– ein Normalwahrscheinlichkeitsdiagramm erstellen und beurteilen</td>
<td>


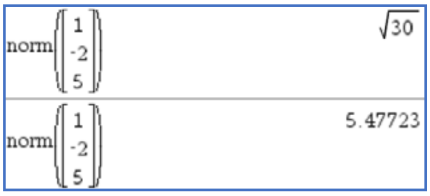
</td>
</tr>
<tr>
<td>– Vektoren als Zeilen- oder Spaltenvektoren eingeben.

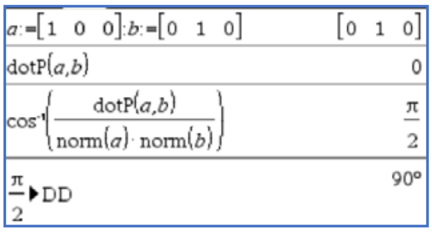
– mit Vektoren rechnen

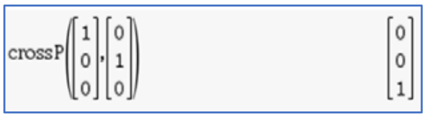
– den Betrag eines Vektors ermitteln.

– das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnen und anwenden.</td>
<td>


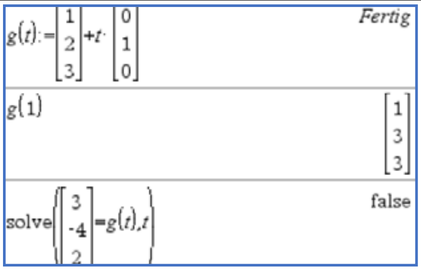
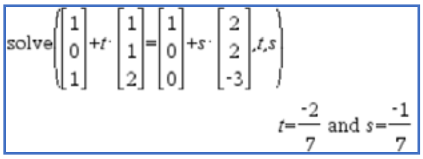
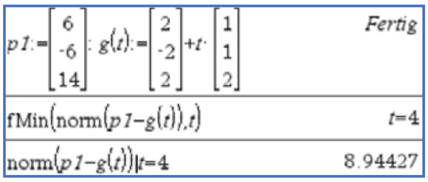
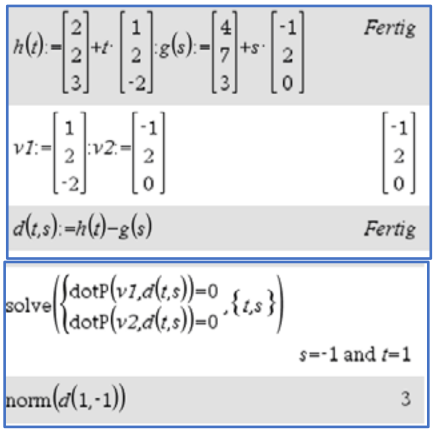
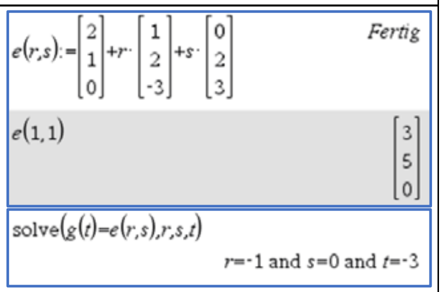
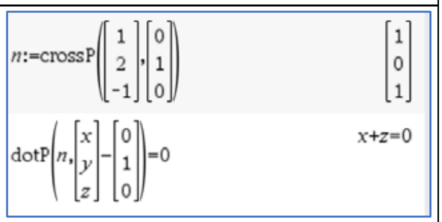






</td>
</tr>
<tr>
<td>– das Vektorprodukt zweier Vektoren berechnen und anwenden.</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

– Geradengleichungen der Form – $\vec{x} = \overrightarrow{p_0} + t \cdot \vec{a}$ als Variable speichern und damit arbeiten. – die gegenseitige Lage von Geraden bzw. Geraden und Koordinatenebenen bestimmen. – Abstand Punkt – Gerade berechnen. – den Abstand windschiefer Geraden berechnen.	   
– Ebenengleichungen in Parameterform als Variable speichern und damit arbeiten.	
– Ebenengleichungen in Normalen- und Koordinatenform erstellen.	

– Matrizen erstellen und mit Matrizen arbeiten.	$m:=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0.2\\ 0.6 & 0 & 0.3\\ 0.4 & 0 & 0.5\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 0.2\\ 0.6 & 0 & 0.3\\ 0.4 & 0 & 0.5\end{bmatrix}$ $m\cdot\begin{bmatrix}120\\ 80\\ 30\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}86.\\ 81.\\ 63.\end{bmatrix}$ $m\cdot m^{-1} \quad \begin{bmatrix}1. & 0. & 0.\\ 0. & 1. & -1.\mathrm{E}{-14}\\ 0. & 0. & 1.\end{bmatrix}$

T³ DEUTSCHLAND

T^3 Teachers Teaching with Technology

Netzwerk
Das T^3 Lehrerfortbildungsnetzwerk richtet sich an Sie, an Lehrerinnen und Lehrer, die sich zum sinnvollen Einsatz digitaler Werkzeuge im MINT-Unterricht austauschen und weiterentwickeln wollen. T^3 Deutschland ist Teil des internationalen T^3 Netzwerks.

Fortbildungen
T^3 Deutschland bietet Ihnen pädagogisch-didaktische Unterstützung in Form von schulinternen Fortbildungen, Online-Seminaren und Tagungen an.

Materialien
Aufgabenbeispiele, Tutorials, Videos und mehr nützliche Materialien für Ihren MINT-Unterricht stellen wir auf der Materialdatenbank kostenlos zur Verfügung.

Der T^3 EduBlog bietet exklusive Interviews, inspirierende Erfahrungsberichte und mehr

Informieren Sie sich. Machen Sie mit!

Nehmen Sie Kontakt zu uns auf unter:
www.t3deutschland.de I info@t3deutschland.de

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

T3 Europe

TI-Nspire™ CX CAS Technologie

Ob Handheld, Software (Win/Mac) oder Tablet (Win/iPad) - alle Produkte sind einzeln oder als integrierte Lösung einsetzbar. Passendes Zubehör unterstützt den fächerübergreifenden Einsatz in Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik (MINT).

www.tinspirecas.de

Praxisorientierte Unterrichtsmaterialien

Nützliche Aufgabenbeispiele für Ihren Unterricht, kostenlose Downloads und Hinweise auf Verlagspublikationen finden Sie auf der TI Materialdatenbank, auch ganz speziell zur TI-Nspire™ CX Technologie.

Schauen Sie mal rein:
TI Materialdatenbank: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

» Nutzen Sie beispielsweise unser kostenloses Ausleihprogramm!

» Ausführliche Produkt- und Serviceinformationen sowie Bezugsquellen finden Sie auf unseren TI Webseiten education.ti.com/de

» Die TI Schulberater unterstützen Sie gerne bei allen Fragen rund um den Einsatz von TI Rechnern im Unterricht: schulberater-team@ti.com

Abonnieren Sie unseren Newsletter!

www.youtube.com/TIedtechDE

education.ti.deutschland

@TIEducationDE

www.t3deutschland.de

education.ti.com

T³ DEUTSCHLAND

Teachers Teaching with Technology™

Texas Instruments