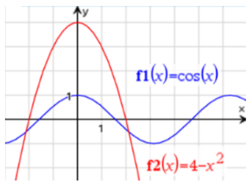
Lösen von Gleichungen mit dem allgemeinen Iterationsverfahren

Für das Lösen linearer oder quadratischer und anderer Gleichungen lernt man in der Schule Lösungsverfahren kennen. Es gibt aber auch Gleichungen, für die im Schulunterricht keine Lösungsverfahren gelehrt werden oder für die keine Lösungsverfahren existieren, die zu eindeutigen Lösungen führen. Das folgende Beispiel soll das veranschaulichen.
Die biquadratische Gleichung $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ lässt sich im Kopf lösen.
Wir substituieren zunächst $z = x^2$ und erhalten $z^2 - 3z + 2 = 0$. Für diese quadratische Gleichung gibt es eine Lösungsformel. Besser noch: Durch Faktorisieren ergibt sich $(z-2) \cdot (z-1) = 0$, also ist $z_1 = 2$ und $z_2 = 1$. Durch Rücksubstitution und Lösen der quadratischen Gleichungen ergeben sich vier und damit alle Lösungen der gegebenen biquadratischen Gleichung: $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$; $x_3 = -1$; $x_4 = 1$.
Ändert man die obige biquadratische Gleichung an einer einzigen Stelle ab zu $\boldsymbol{x^5} - 3x^2 + 2 = 0$, dann funktioniert das Verfahren mit der Substitution nicht mehr.
Für solche Fälle gibt es Verfahren, die zumindest Näherungslösungen ergeben. Ein solches Verfahren, das auch effektiv mit dem wissenschaftlich technischen Taschenrechner (WTR) *TI-30X Plus MathPrint™* realisiert werden kann, wird hier vorgestellt. Die Lösung der Gleichung $\boldsymbol{x^5} - 3x^2 + 2 = 0$ auf einem solchen Wege wird im Beispiel 3 ausführlich erläutert.



Mitunter werden ganzrationale mit transzendenten Funktionen verkettet, auch da helfen häufig bei Berechnungen nur Näherungsverfahren.
Im Beispiel 1 wird dies anhand der Gleichung cos(x) = 4 – x² thematisiert.

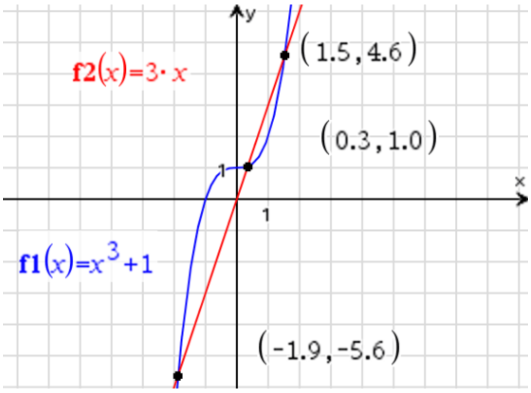
Geometrische oder technische Sachverhalte führen häufig zu mathematischen Modellen, zu deren Lösung Näherungsverfahren notwendig sind.
Im Beispiel 2 wird ein solcher Fall untersucht.

Im Einführungsbeispiel wird das allgemein Iterationsverfahren anhand eines Beispiel ausführlich erläutert und das Verfahren zu einer Handlungsanweisung „verdichtet“.

Im Beispiel 4 gibt es eine Vorschlag zur Verwendung des *TI-30X Plus MathPrint™* bei der Berechnung von Konfidenzintervallen mithilfe des allgemeinen Iterationsverfahrens. Es handelt sich um eine Erweiterung der von Heinz Klaus Strick vorgeschlagenen Verfahren, die in der nebenstehend abgebildeten sehr lesenswerten Broschüre[1] zu finden sind. Die Broschüre ist auf der TI-Materialienseite zu finden.

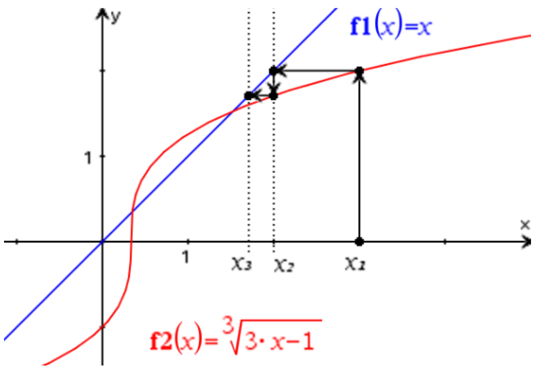
Einführungsbeispiel: Wir untersuchen die Gleichung $x^3 + 1 = 3x$ mit $x \in R$ auf ihre Lösungen.

Zunächst soll eine graphische Lösung vorgestellt werden.
(Hinweis: Die Grafiken wurden mit dem TI-Nspire CX CAS erstellt.)



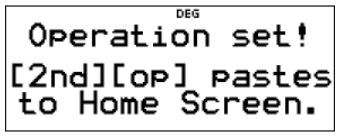
Fasst man jede Seite der Gleichung als Term einer Funktion auf, so lassen sich mögliche Lösungen als Schnittstellen der Funktionsgraphen finden. Im Beispiel sind das die Schnittstellen der Funktion g(x) = x³ + 1 und h(x) = 3x, die näherungsweise zu $x_1 \approx -1{,}9$, $x_2 \approx 0{,}3$ und $x_3 \approx 1{,}5$ aus der Graphik abgelesen werden können. Mehr als drei Lösungen kann eine kubische Gleichung nicht haben.

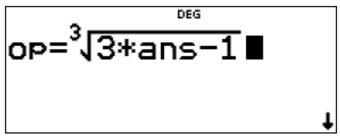
Mit dem WTR lassen sich die Graphen nicht direkt erzeugen, sondern nur über den „Umweg" der Tabellierung von Funktionswerten und einer handschriftlichen Zeichnung. Aber solche grafischen Darstellungen erleichtern das Verständnis des hier betrachteten Näherungsverfahrens und die Auswahl von Startwerten.



Die Lösungen der Gleichung $x^3 + 1 = 5x$ sollen nun durch ein Iterationsverfahren bestimmt werden. Dazu wird die Gleichung umgestellt z. B. zu $x = \sqrt[3]{3x-1}$.
Man berechnet für einen Startwert x_1 den Funktionswert von $h(x_1) = \sqrt[3]{3 \cdot x_1 - 1}$, der als neuer x - Wert x_2 wieder für eine Berechnung eines neuen Funktionswertes $h(x_2)$ dient. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis sich die Werte x_{k+1} und x_k nur noch „wenig" unterscheiden. Auf diese Weise entstehen Folgen von Näherungswerten durch verschiedene, günstig gewählte Startwerte der rekursiven Gleichungen $x_{k+1} = \sqrt[3]{3x_k - 1}$.
Solche Folgen können mit dem WTR *TI-30X Plus MathPrint* mithilfe der Operationen set op und op rasch erzeugt werden. Diese Operationen können geöffnet werden über die Zweitbelegungen der folgenden Tasten:

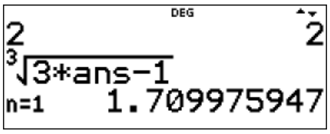
Startwert $x_1 = 2$
Öffnen Sie set op und tragen Sie den Iterationsterm ein. Verwenden Sie anstelle von x_k die ans-Anweisung („letzte Antwort" = answer), damit dort immer der letzte berechnete Wert bzw. „in der ersten Runde" der Startwert zur Berechnung des nächstfolgenden Wertes verwendet wird.

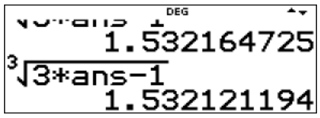


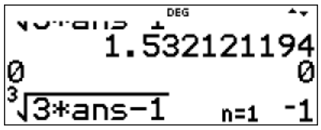


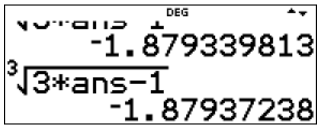
[2nd] [×] [2nd] [$x^{\square}$] [3] [▸] [3] [×] [2nd] [(−)] [−] [1] [▸]

Schließen Sie mit [enter] die Eintragung ab.





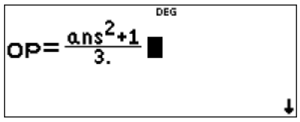




Geben Sie den Startwert 2 ein und schließen Sie mit [enter] ab.
Öffnen Sie op. [2] [enter] [2nd] [)]
Drücken Sie nun mehrfach [enter]. Nach etwa zehnmal [enter] (zehn „Iterationsschritten") ändert sich bereits die vierte Nachkommastelle nicht mehr. Man kann deshalb davon ausgehen, dass $x_1 \approx 1{,}5321$ eine Näherungslösung der Gleichung ist.

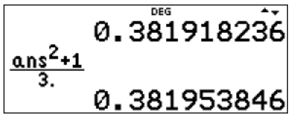
Startwert $x_2 = 0$:
Geben Sie den Startwert 0 ein und schließen Sie mit [enter] ab.
Öffnen Sie op. [0] [enter] [2nd] [)]
Drücken Sie nun mehrfach [enter]. Nach etwa neunmal [enter] (neun „Iterationsschritten") ändert sich bereits die vierte Nachkommastelle nicht mehr. Man kann deshalb davon ausgehen, dass $x_2 \approx -1{,}8793$ eine weitere Näherungslösung der Gleichung ist.

Versucht man, mit weiteren Startwerten zwischen 0 und 1 die dritte Lösung zu finden, die nach dem grafischen Verfahren bei ca. x = 0,3 liegen muss, so gelangt man mit der bisher verwendeten Iterationsgleichung immer wieder zu den bisher bekannten Lösungen. Es ist deshalb sinnvoll, die Ausgangsgleichung $x^3 + 1 = 3x$ anders zu einer iterationsfähigen Gleichung umzustellen, z. B. zu $x = \frac{x^3+1}{3}$ bzw. $x_{k+1} = \frac{x_k^2+1}{3}$. Mit set op die Iterationsvorschrift eingegeben. Die Variable x_k wird wieder durch ans ersetzt.



[2nd] [×] [clear] [▭/▭] [2nd] [(−)] [x^2] [+] [1] [⏷] [3] [·] [⏵]

Der Dezimalpunkt hinter der Zahl 3 im Nenner wurde gesetzt, damit die Ergebnisse als Dezimalzahlen zurückgegeben werden.
Mit [enter] wird die Eingabe der Iterationsvorschrift abgeschlossen. Nun geht es wie oben beschrieben weiter mit den Schritten



1. Startwert eingeben und .[enter]. drücken.
2. op öffnen und wiederholt [enter] drücken, bis sich das Resultat „stabilisiert".

Mit dem **Startwert $x_3 = 0$** ergibt sich $x_3 \approx 0{,}3819$. Damit sind alle Lösungen gefunden.

[enter] [0] [enter] [2nd] [)] [enter] [enter] [enter] [enter] [enter] [enter]

Zusammenfassung zum allgemeinen Iterationsverfahren - Handlungsanleitung:[2]

Gegeben sei eine Gleichung f(x) = 0.

Vermutungen über mögliche Lösungen lassen sich z. B. über eine Tabellierung oder grafische Darstellung von f(x) finden.

Die Gleichung f(x) = 0 habe eine Lösung x* im Intervall [a; b].

Um diese Lösung x* zu finden, kann man folgendermaßen vorgehen:

(1) f(x) = 0 umformen zu x = h(x).
(2) Die Iterationsvorschrift $x_{k+1} = h(x_k)$ herstellen.
(3) Einen Startwert aus dem Intervall [a; b] wählen.
(4) Schrittweise $x_1, x_2, x_3, \ldots$ berechnen.

Wenn in der Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ von einer gewissen Stelle k an $x_k \approx x_{k+1}$ gilt, so ist in vielen Fällen x_k eine Näherungslösung von f(x) = 0.

Findet man mit $x_{k+1} = h(x_k)$ eine vermutete Lösung nicht, so kann das Umstellen von f(x) = 0 in eine andere Iterationsform x = g(x) hilfreich sein.

Hinweis:
Wer über Kenntnisse der Differentialrechnung verfügt, kann auch folgenden Satz über die Konvergenz des allgemeinen Iterationsverfahrens interpretieren.

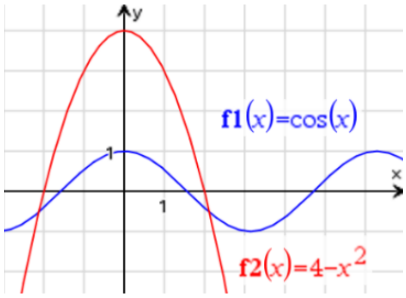
Die Gleichung x = h(x) habe im Intervall [a; b] eine Lösung x*. Wenn h in [a; b] differenzierbar ist und $\lvert h'(x)\rvert \leq q < 1$ für alle $x \in [a; b]$ gilt, dann konvergiert die Folge (x_n) mit $x_{n+1} = h(x_n)$ für jedes $x_0 \in [a; b]$ gegen diese Lösung.

Diese Aussage kann mithilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung bewiesen werden. Darauf wird hier nicht eingegangen.

Weitere Beispiele:

(1) Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung cos(x) = 4 – x² mit $x \in R$.

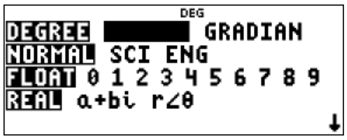
Inhaltliche Vorüberlegungen:
Beide Seiten können als Terme der bekannten elementaren Funktionen f(x) = cos(x) bzw. g(x) = 4 – x² interpretiert werden. Ihre Graphen lassen sich per Hand rasch skizzieren. Beide Funktionen sind symmetrisch zur y-Achse. Ihre Schnittstellen entsprechen den Lösungen der gegebenen Gleichung. Mehr als insgesamt zwei Schnittstellen können nicht existieren. Kennt man die Koordinate x_1 der Schnittstelle im Intervall [2; 3], dann kennt man wegen der Symmetrie auch die der anderen Schnittstelle $x_2 = -x_1$.



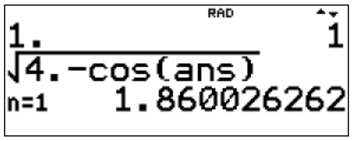
Eine Iterationsvorschrift herstellen, z. B.: $\cos(x) = 4 - x^2 \Longrightarrow x_{k+1} = \sqrt{4 - \cos(x_k)}$

Den Rechner auf Bogenmaß (RAD) einstellen.

[mode] [▶] [enter]

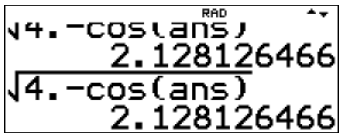


Unter set op die Iterationsvorschrift eingeben, mit [enter] abschließen, dann den Startwert 1. (als Dezimalzahl) eingeben, mit [enter] abschließen und op aktivieren.

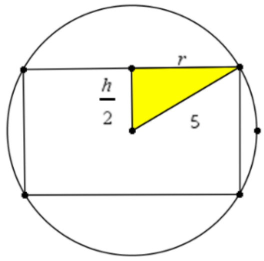


[2nd] [×] [2nd] [x^2] [4] [·] [−] [cos] [2nd] [(−)] [)] [▶] [enter] [1] [·] [enter] [2nd] [)]

Nach mehrfachem Drücken von [enter] stabilisiert sich der Wert auf $x_1 \approx 2{,}13$. Damit ist $x_2 = -\,x_1 \approx -2{,}13$.
Dies sind Näherungslösungen der gegebenen Gleichung.



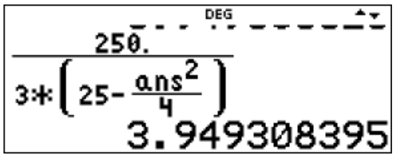
(2) Einer Kugel mit dem Radius von 5,0 cm ist ein Zylinder einbeschrieben, dessen Volumen halb so groß ist wie das der Kugel. Welche Abmessungen kann der Zylinder haben (auf Hundertstel genau)?[3]



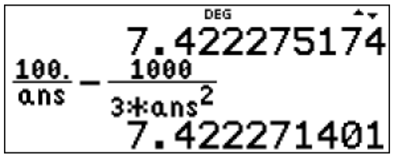
Inhaltliche Vorüberlegung:
Die Abbildung zeigt einen Achsenschnitt von Kugel und einbeschriebenen Zylinder. Es muss zwei Lösungen geben, denn der Zylinder kann breit und flach oder schmal und hoch sein.
Der Grundkreisradius des Zylinders sei r und seine Höhe sei h.
Dann gilt in dem farbig hervorgehobenem rechtwinkligen Dreieck der Satz des Pythagoras: $5^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$. Daraus ergibt sich $r^2 = 25 - \frac{h^2}{4}$ (*).

Das Kugelvolumen ist wegen $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$: $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot (5\ cm)^3 = \frac{500}{3}\pi\ cm^3$.
Für das Zylindervolumen gilt einerseits $V_{Zylinder} = \frac{1}{2} \cdot V_{Kugel} = \frac{250}{3}\pi\ cm^3$.
Andererseits gilt $V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h$.
Durch Gleichsetzen ergibt sich $\frac{250}{3}\pi = \pi \cdot r^2 \cdot h$ (bei Vernachlässigung der Einheiten).
Einsetzen (*) führt zu $\frac{250}{3}\pi = \pi \cdot \left(25 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot h \Rightarrow h_{k+1} = \frac{250}{3\cdot\left(25-\frac{h_k^2}{4}\right)}$.

Letztere Gleichung verwenden wir als Iterationsvorschrift.
Die Höhe h liegt im Intervall $0 < h < 10$. Aus diesem Intervall wird der Startwert gewählt.
Mit dem Startwert 2,5 erhält man mit dieser Iterationsvorschrift nach einigen Iterationsschritten den Näherungswert $h_1 \approx 3{,}95\ cm$.



Für die zweite Lösung braucht es eine andere Iterationsvorschrift, z. B. folgt aus $\frac{250}{3}\pi = \pi \cdot \left(25 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot h$ u. a. auch $h_{k+1} = \frac{100}{h_k} - \frac{1000}{3\cdot h_k{}^2}$.



Mit dem Startwert 5 erhält man hier die Näherungslösung $h_2 \approx 7{,}42\ cm$.
Mit (*) lassen sich die zugehörigen Grundkreisradien berechnen: $r_1 \approx 4{,}59\ cm$; $r_2 \approx 3{,}35\ cm$

Hinweis: Der Umstand, dass nicht jede Iterationsvorschrift alle Näherungswerte liefert, hat mit der vorn erwähnten Konvergenzbedingung zu tun. Es braucht mitunter viel Ausdauer, um verschiedene Iterationsvorschriften zu erstellen und auszuprobieren. Die Verwendung von set op und op erleichtert dies aber ungemein. Im nächsten Beispiel wird das besonders deutlich.

(3) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2$.

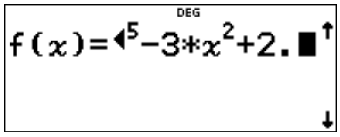
Inhaltliche Vorüberlegungen:

- Es handelt sich um eine ganzrationale Funktion 5. Grades. Sie kann höchstens fünf reelle Nullstellen haben.
- Weil der Koeffizient für die höchste Potenz von x positiv ist, gehen die Funktionswerte für $x \to \infty$ gegen $+\infty$ und für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$
- Die Berechnung einiger Funktionswerte hilft, Vermutungen über Intervalle zu finden, in denen Nullstellen liegen könnten. Für die Berechnung wird die Tabellierfunktion des WTR
  TI-30X Plus MathPrint genutzt. Dieses Verfahren wird zunächst genauer erklärt. Leser, die das kennen, können diesen Abschnitt überspringen.

Hinweise zum Erstellen einer Funktionswertetabelle mit dem WTR *TI-30X Plus MathPrint*:

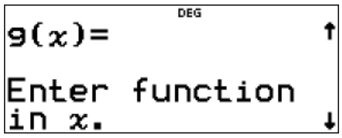
Drücken Sie die Taste [table] und dann die Taste [1] Add/Edit Func.
[table][1]

Es öffnet sich das Fenster zum Eingeben der Funktionsvorschrift. Geben Sie dabei einen der Koeffizienten als Dezimalzahl mit Dezimalpunkt ein, damit die Funktionswerte als Dezimalzahlen zurückgegeben werden.

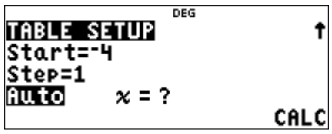


[table][1][x^{yzt}_{abcd}][$x^{\square}$][5][▶][−][3][×][x^{yzt}_{abcd}][x^2][+][2][·]

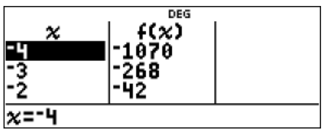
Nach dem Drücken von [enter] erscheint die Aufforderung zur Eingabe einer zweiten Funktionsvorschrift für eine Funktion g. Diese Aufforderung wird mit [enter] übersprungen.



Sie gelangen zum TABLE SETUP. Das wird ausgefüllt mit dem Startwert
 - 4 und der Schrittweite 1. Mit den Cursortasten gehen Sie auf CALC.
[enter][enter][(−)][4][▼][▼][▼]



Wiederum mit [enter] öffnet sich dann die Wertetabelle mit den Anfangswerten. Mit den Cursortasten können Sie in der Tabelle „blättern“.

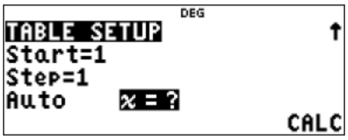


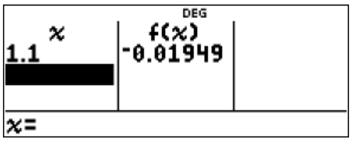
Nun zurück zum Iterationsverfahren.
Zunächst erfolgt eine Interpretation der berechneten Werte.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-1070	-268	-42	-2	2	0	22	218	978

Es muss im Intervall [-1; 0] wegen des Vorzeichenwechsels der Funktionswerte und der Stetigkeit der Funktion $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2$ eine Nullstelle x_1 geben. Die Stelle $x_2 = 1$ wird direkt als Nullstelle angezeigt. Danach wird in der Tabelle kein Vorzeichenwechsel mehr angezeigt. Entweder ist bei $x_2 = 1$ eine Berührung der x-Achse (doppelte Nullstelle) vorhanden oder die Funktion nimmt im Intervall (1; 2) noch negative Funktionswerte an, so dass dort eine dritte Nullstelle x_3 existiert.

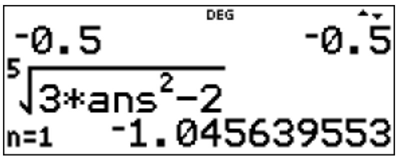
Das lässt sich rasch überprüfen, indem man im TABLE SETUP nicht Auto, sondern x=? wählt und dann z. B. für x = 1.1 den Funktionswert bestimmt. Der ist $f(1{,}1) \approx -0{,}02 < 0$, also haben wir einen Vorzeichenwechsel und demzufolge noch eine weitere Nullstelle im Intervall (1; 2). Da der Funktionswert f(1,1) nahe bei null liegt, muss auch die Nullstelle in der Nähe von x = 1,1 liegen.

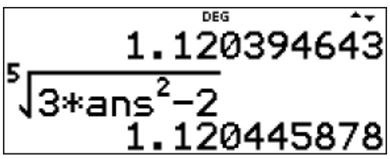




Für x < - 2 scheinen die Funktionswerte gegen $-\infty$ zu gehen, für x > 2 gegen $+\infty$. Da kann man sich sogar sicher sein, denn wenn es in diesen Bereichen weitere Nullstellen gäbe, dann müssten es jeweils zwei sein (wegen der Vorüberlegung, dass die Funktionswerte für $x \to \infty$ gegen $+\infty$ und für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ gehen). Das wären in der Summe aber mindestens sieben Nullstellen, also mehr als fünf, was nicht sein kann, weil eine ganzrationale Funktion 5. Grades höchstens fünf Nullstellen haben kann.

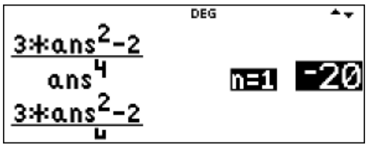
Eine Iterationsvorschrift herstellen: $x^5 - 3x^2 + 2 = 0 \Longrightarrow x_{k+1} = \sqrt[5]{3{x_k}^2 - 2}$
Startwert aus [-1; 0] wählen, z. B. $x_1 = -0{,}5$.
Zahlenfolge mit dem WTR erzeugen (siehe Einführungsbeispiel):

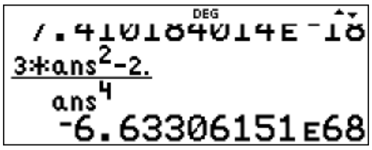




Nach etwa 40 (!) Iterationsschritten kommt man auf die oben vermutete Nullstelle x_3 im Intervall (1; 2) mit $x_3 \approx 1{,}12$, nicht aber auf die Nullstelle im Intervall [-1; 0].

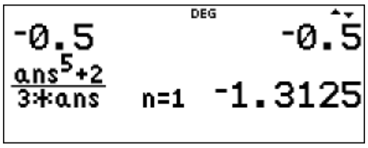
Deshalb wird eine andere Iterationsformel gebildet: $x^5 - 3x^2 + 2 = 0 \Longrightarrow x_{k+1} = \frac{3{x_k}^2-2}{{x_k}^4}$ und wieder mit dem Startwert x = - 0,5 versucht, die Nullstelle im Intervall [-1; 0] „einzufangen“:





Dies bringt auch keinen Erfolg, denn die Zahlenfolge ergibt immer kleiner werdende negative Werte.

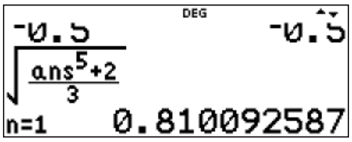
Neuer Versuch mit neuer Iterationsformel: $x^5 - 3x^2 + 2 = 0 \Longrightarrow x_{k+1} = \frac{x_k{}^5+2}{3 \cdot x_k}$

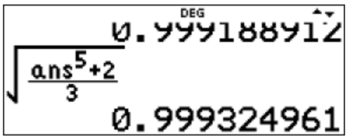


Die Zahlenfolge liefert rasch unendlich große Zahlen, also ebenfalls ein Misserfolg.

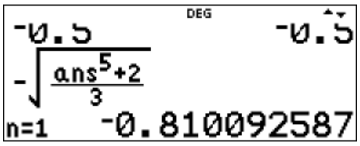
Noch zwei weitere Iterationsformeln: $x^5 - 3x^2 + 2 = 0 \Longrightarrow x_{k+1} = \sqrt{\frac{x_k{}^5+2}{3}}$ bzw. $x_{k+1} = -\sqrt{\frac{x_k{}^5+2}{3}}$

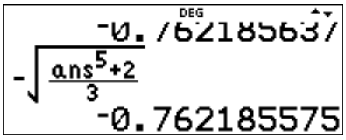
Die erste bringt mit dem Startwert x = - 0,5 einen Näherungswert für die Nullstelle $x_2 = 1$.





Aber wir haben immer noch nicht einen Näherungswert für die Nullstelle im Intervall [-1; 0]. Das kann diese Iterationsformel auch nicht liefern, weil die Quadratwurzel keine negativen Werte zurückgibt. Deshalb nun noch ein Versuch mit der Iterationsvorschrift $x_{k+1} = -\sqrt{\frac{x_k{}^5+2}{3}}$:





Nun hat sich die Ausdauer gelohnt:

Die Nullstelle im Intervall [-1; 0] hat den Näherungswert $x_1 \approx -0{,}7621$.

Anmerkung: Da die Nullstelle x = 1 beim Tabellieren gefunden wurde, wäre auch eine Polynomdivision denkbar. Dies führt aber hier nicht zu Rechenerleichterungen.

(4) Konfidenzintervall

In der schon erwähnten Broschüre von Heinz Klaus Strick schreibt er auf Seite 77 u. a. Folgendes:

Arbeitsblätter für den TI-30X Plus MathPrint™ Heinz Klaus Stri

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11
Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit: Konfidenzintervall-Bestimmung	

Beispiel-Aufgabe

Ein doppelter LEGO™-Würfel wurde 500-mal geworfen. 45-mal lag dabei die Seite mit den Noppen nach unten. Bestimmen Sie ein 95 %-Konfidenzintervall für die zugrunde liegende Erfolgswahrscheinlichkeit p.

Erläuterung der Lösung

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % unterscheidet sich ein Stichprobenergebnis vom Erwartungswert μ der zugrunde liegenden, unbekannten Erfolgswahrscheinlichkeit p um höchstens 1,96σ (σ = Standardabweichung).

Unter der Annahme, dass die Bedingung erfüllt ist (was ja in 95 % der Fälle ein brauchbarer Ansatz ist), werden alle p gesucht, welche die Bedingung $|500 \cdot p - 45| \le 1{,}96 \cdot \sigma$ erfüllen.

Gleichwertig zur o. a. Betrags(un)gleichung ist: $500 \cdot p + 1{,}96 \cdot \sigma \le 45$ *oder* $500 \cdot p - 1{,}96 \cdot \sigma \le 45$.

Man kann den links stehenden Term als Funktionsterm auffassen, also $f(x) = 500 \cdot x + 1{,}96 \cdot \sqrt{500 \cdot x \cdot (1-x)}$ bzw. $g(x) = 500 \cdot x - 1{,}96 \cdot \sqrt{500 \cdot x \cdot (1-x)}$ und in den Wertetabellen dieser Funktion nach dem Funktionswert 45 suchen (mit Verfeinerung der Schrittweite).

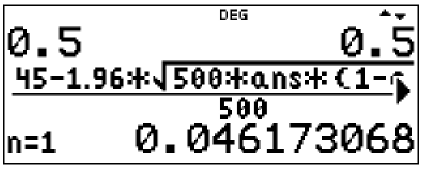
Mithilfe der Möglichkeiten des [table]-Menüs ergibt sich also:

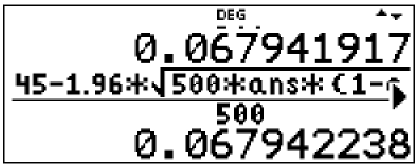
Zu den Ausführungen von Herrn Strick zur Bestimmung des Konfidenzintervalls, die ich hier aus Platzgründen nicht wiedergebe, wird nun die Berechnung mit dem Iterationsverfahren hinzugefügt:

Aus der Ungleichung $500 \cdot p + 1{,}96 \cdot \sigma \le 45$ wird unter Verwendung von $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ mit n = 500 eine iterierfähige Gleichung gemacht:

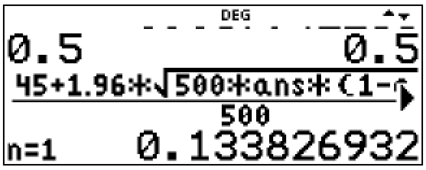
$$p_{k+1} = \frac{45 - 1{,}96 \cdot \sqrt{500 \cdot p_k \cdot (1 - p_k)}}{500}$$

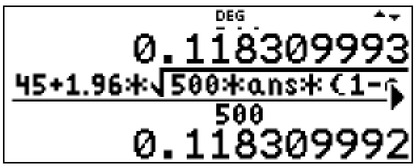
Wegen 0 < p < 1 wird als Startwert z. B. 0,5 gewählt. Mit set op und op ergibt sich folgende Näherungslösung:





Analog verfährt man mit $500 \cdot p - 1{,}96 \cdot \sigma \le 45$ und $p_{k+1} = \frac{45 + 1{,}96 \cdot \sqrt{500 \cdot p_k \cdot (1 - p_k)}}{500}$:





Das Konfidenzintervall wird auch mit dem Iterationsverfahren zu $0{,}0679 \le p \le 0{,}1183$ bestimmt.

Schlussbemerkung:
Das allgemeine Iterationsverfahren ist für viele Gleichungen eine Chance, überhaupt Lösungen zu finden. Auch wenn es Näherungslösungen sind, so sind sie doch für viele Anwendungen völlig ausreichend. Eine Betrachtung des Verfahrens in der Schule ist auch deshalb sinnvoll, weil mit den inhaltlichen Vorüberlegungen viele wichtige Grundkenntnisse und Grundvorstellungen reaktiviert werden können. Eine Behandlung dieses Verfahrens im Unterricht setzt nicht zwingend Kenntnisse über Differentialrechnung voraus, wie das beim Newtonschen Näherungsverfahren der Fall ist.
Natürlich gibt es heute Software, die solche Gleichungen „auf Knopfdruck" löst. Derartige „blackbox"-Methoden sollten aber doch auch eine gewisse inhaltliche Vorbereitung erfahren, damit man wenigstens eine Grundvorstellung davon hat, was der Computer in diesem Zusammenhang eigentlich machen könnte.
Zum Vergleich blicken wir auf alle im vorliegenden Material untersuchten Beispiele zurück, deren Lösungen hier nun mit einem TI-Nspire CX CAS mit dem solve-Befehl ermittelt wurden.

$$\text{solve}\left(x^3+1=3\cdot x,x\right)$$
$$x=-1.87939 \text{ or } x=0.347296 \text{ or } x=1.53209$$

$$\text{solve}\left(\cos(x)=4-x^2,x\right)$$
$$x=-2.12813 \text{ or } x=2.12813$$

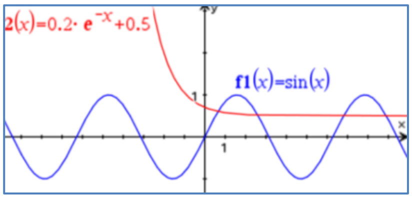
$$\text{solve}\left(\frac{250}{3}\cdot\pi=\pi\cdot\left(25-\frac{h^2}{4}\right)\cdot h,h\right)$$
$$h=-11.3716 \text{ or } h=3.94931 \text{ or } h=7.42227$$

$$\text{solve}\left(x^5-3\cdot x^2+2=0,x\right)$$
$$x=-0.762186 \text{ or } x=1. \text{ or } x=1.12074$$

$$\text{solve}\left(|500\cdot p-45|\le 1.96\cdot\sqrt{500\cdot p\cdot(1-p)},p\right)$$
$$0.067942\le p\le 0.11831$$

Der TI-Nspire CX CAS verfügt auch über den nsolve-Befehl für das näherungsweise Lösen von Gleichungen. Hier muss neben der Lösungsvariablen auch ein Startwert eingegeben werden.

Beispiel:



$$\text{solve}\left(f1(x)=f2(x),x\right)$$
$$x=0.649137 \text{ or } x=2.60077 \text{ or } x=6.80704 \text{ o}\ldots$$

$\text{nSolve}\left(f1(x)=f2(x),x,30\right)$	31.9395
$\text{nSolve}\left(f1(x)=f2(x),x,300\right)$	302.116

Die Gleichung $\sin(x)=0{,}2\cdot e^{-x}+0{,}5$ hat unendlich viele Lösungen. Löst man diese Gleichung mit solve, so werden einige davon angezeigt, die größte bei etwa $x\approx 15{,}2$. Außerdem wird eine Warnung ausgegeben, dass noch mehr Lösungen existieren können. Mit nsolve kann nun gezielt eine Lösung, z. B. in der Nähe von x = 30 (Startwert) gesucht werden. Der Befehl nsolve verwendet ein Näherungsverfahren und findet $x\approx 31{,}9$ als Lösung in der Nähe des Startwertes. Für andere Startwerte werden dann i. a. auch andere Lösungen gefunden. Die Kenntnisse über Näherungsverfahren (z. B: das allgemeine Iterationsverfahren oder das Newtonverfahren) können helfen, solche Zusammenhänge zu verstehen.

Quellenangaben

[1] HeinzKlaus Strick: Arbeitsblätter für den TI-30X Pro MathPrint™, Texas Instruments 2018
https://resources.t3deutschland.de/t3deutsch-home?resource_id=2437&cHash=c0bc3ad1c9d35ad0ee2409c43de4ed92

[2] Hans Bock und Werner Walsch (Hrsg): Mathematik entdecken – verstehen – anwenden - Analysis, Oldenbourg Verlag München 1993, Seiten 52 und 200

[3] Hans Bock und Werner Walsch (Hrsg): Mathematik entdecken – verstehen – anwenden - Analysis, Oldenbourg Verlag München 1993, Seite 59, Nr. 16

Autor:
Dr. Wilfried Zappe