Aufgaben zum EM-Spielball

Eine XXL-Version des offiziellen Spielballs zur EM 2024 ist seit Dezember 2023 in Leipzig stationiert.
Der 2,60 Meter hohe Ball ist noch bis zur EM auf dem Vorplatz der Leipziger Volkszeitung am Petersteinweg zu sehen.[1)]

(Quelle: KI generiert)

Dieser XXL-Ball regt zur mathematischen Auseinandersetzung an. Dabei wird ein TI-30X Prio MathPrint™ verwendet. Manche der folgenden Größenangaben basieren auf Vermutungen.

Aufgabe
Ein Fußball der Größe 5, wie er z. B. in der Bundesliga verwendet wird, hat einen Umfang von etwa 70,0 cm und wiegt ca. 450,0 g.
Als Standardabmessungen eines rechteckigen Fußballfeldes nehmen wir hier105,0 m x 68,0 m an[1].

1. Untersuche, wie groß ein Fußballspieler etwa sein müsste, der mit einem XXL-Ball spielen könnte.
2. Berechne, welche Abmessungen ein XXL-Spielfeld haben sollte, auf dem mit diesem Ball gespielt würde.
3. Vergleiche die Flächeninhalte des XXL-Spielfeldes und eines normalen Fußballfeldes. Beschreibe den Zusammenhang der Längenverhältnisse mit dem Verhältnis der Flächeninhalte.
4. Nach Fertigstellung wurde die Oberfläche des XXL-Fußballs mit weißer Farbe grundiert. Die Dicke der Farbschicht beträgt durchschnittlich 2,0 mm. Ein Liter dieser Farbe kostet 16,40 Euro. Berechne den Preis, den man für die gesamte Farbe braucht.
   Hinweise:
   - *Verwende 1 Liter = 1 dm^3.*
   - *Das Farbvolumen kann näherungsweise berechnet werden durch die Annahme, dass die Maßzahl der Kugeloberfläche als Maßzahl der Grundfläche eines Quaders mit der Höhe 2 mm verwendet wird.*

Bei den folgenden Aufgaben wird zu verschiedenen Annahmen über Form oder Material des XXL-Fußballs jeweils eine Aufgabe bearbeitet.

5. Modell 1: Angenommen, ein normaler Fußball und der XXL-Fußball sind aus den gleichen Materialien und in ähnlichen Abmessungen gefertigt. Wie schwer wäre dann der XXL-Fußball?
6. Modell 2: Angenommen, der XXL-Ball ist eine Hohlkugel, die eine Wandstärke von 1,0 cm hat und aus einem Wandmaterial besteht, dass eine Dichte von $0{,}5\ \frac{g}{cm^3}$ besitzt.
   Berechne für diese Annahme die Masse des XXL-Spielballs. (Die Masse der im XXL-Ball eingeschlossenen Luft kann vernachlässigt werden.)

---

[1] Die internationalen Fußballverbände geben in der Regel für Länderspiele die Abmessungen des Fußballfeldes und des Fußballs Intervalle an wie „Länge mindestens 100 m, höchstens 110 m“, „Breite mindestens 64 m höchstens 75 m“. Der Umfang eines Fußballs soll zwischen 68 cm und 70 cm liegen.

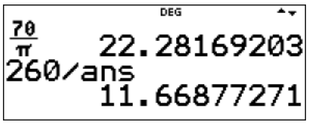
7. Modell 3: Angenommen, der XXL-Fußball ist eine kompakte Kugel (keine Hohlkugel) aus einem leichten, aufgeschäumten Kunststoff mit einem Durchmesser von 2,60 m gefertigt.
   a) Um die Dichte des Materials zu bestimmen, wurden in Stichproben Volumen und Massen des Materials ermittelt, deren Ergebnisse in der Tabelle enthalten sind.

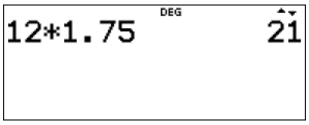
Volumen in cm³	240	150	320	470	80	700	1000
Masse in g	25,0	14,5	31,0	47,4	7,8	67,3	103,2

   Berechne aus den Daten einen Mittelwert für die Dichte des Materials.
   Berechne die Masse dieses XXL-Balls.
   b) Begründe, dass der XXL-Fußball auf Wasser schwimmen könnte.
   c) Berechne seine Eintauchtiefe.

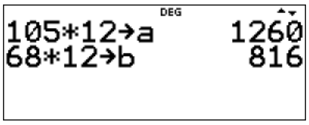
Lösungen

1. Die Durchmesser eines normalen Fußballs sind aus der Angabe des Umfangs berechenbar:
   $u = \pi \cdot d \Longrightarrow d = \frac{u}{\pi}$; hier $d = \frac{70\ cm}{\pi} \approx 22{,}3\ cm$.
   Die Durchmesser eines normalen Fußballs und des XXL-Spielballs stehen im Verhältnis
   $\frac{22{,}3\ cm}{260\ cm} = \frac{1}{11{,}7} \approx \frac{1}{12}$.
   Geht man von einer Durchschnittsgröße von 1,75 m bei einem normalen Fußballspieler aus, dann müsste der XXL-Fußballspieler bei Zugrundelegung des gleichen Größenverhältnisses zwölfmal so groß, also 21 m groß sein: $(1{,}75\ m) \cdot 12 = 21{,}0\ m$.



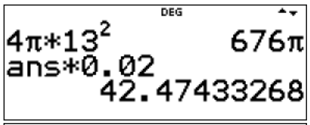


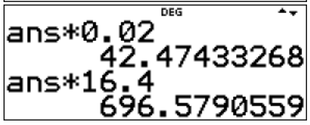
2. Auch auf die Abmessungen des XXL-Spielfeldes müsste dann dieses Größenverhältnis von 1 : 12 angewendet werden.
   Das XXL-Fußballfeld müsste eine Länge von $(105\ m) \cdot 12 = 1260\ m = 1{,}26\ km$ und eine Breite von $(68\ m) \cdot 12 = 816\ m = 0{,}816\ km$ haben.



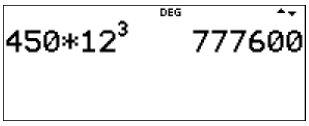
3. Normales Fußballfeld: $(105\ m) \cdot (68\ m) = 7\,140\ m^2$
   XXL-Fußballfeld: $(1260\ m) \cdot (816\ m) = 1\,028\,160\ m^2$
   Verhältnis: $\frac{1\,028\,160\ m^2}{7140\ m^2}$ =144
   Das XXL-Spielfeld wäre 144mal so groß wie ein normales Spielfeld. Das Längenverhältnis $\frac{1}{12}$ geht quadratisch in die Flächeninhalte ein: $\left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{144}$

4. Oberfläche: $A_O = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot (13\ dm)^2 \approx 2124\ dm^2$
   Das Farbvolumen wird näherungsweise berechnet durch:
   Oberfläche mal Dicke: $2124\ dm^2 \cdot 0{,}02\ dm \approx 42{,}5\ dm^3$
   Preis: $42{,}5\ dm^3 \cdot 16{,}4\ \frac{€}{dm^3} \approx 696{,}60\ €$.

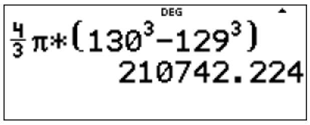


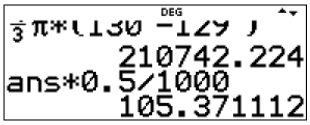


5. Das Längenverhältnis $\frac{1}{12}$ geht kubisch in die Volumina, also auch in die Massen ein: $\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{1728}$. Der XXL-Ball würde ca. $(450\ g) \cdot 1728 = 777\,600\ g = 777{,}6\ kg$ wiegen.



6. Das Volumen der Hohlkugel, genauer gesagt, das Volumen ihrer Wand, hat einen Wert von
   $V = \frac{4}{3}\pi \cdot ((130\ cm)^3 - (129\ cm)^3) \approx 210\,742\ cm^3$.
   Wegen der Dichte $\rho = 0{,}5\ \frac{g}{cm^3}$ gilt für die Masse m des XXL-Spielballs:
   $m = \rho \cdot V = \left(0{,}5\ \frac{g}{cm^3}\right) \cdot (210\,742\ cm^3) \approx 105{,}4\ kg$

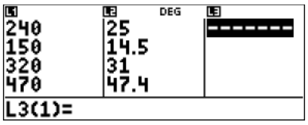


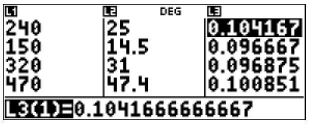


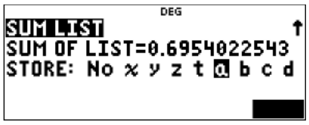
7. a) Mittelwert der Dichte:

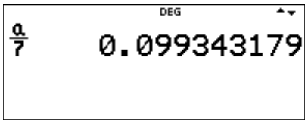
Volumen in cm³	240	150	320	470	80	700	1000
Masse in g	25,0	14,5	31,0	47,4	7,8	67,3	103,2

Mittelwert des Volumens:



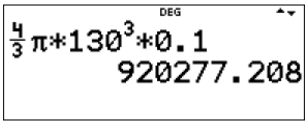






Die durchschnittliche Dichte des geschäumten Kunststoffes liegt bei ca. 0,1 g/cm³.

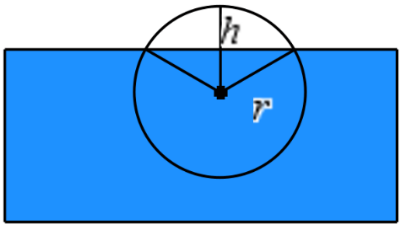
$m = V \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi \cdot (130\ cm)^3 \cdot 0{,}1\ \frac{g}{cm^3} \approx 920\,277\ g \approx 920{,}2\ kg.$



Der XXL-Fußball würde 920,2 kg wiegen.

b) Der XXL-Fußball könnte trotz des hohen Gewichtes schwimmen, weil seine Dichte viel kleiner ist als die Dichte des Wassers.

c) Nach Archimedes gilt, dass das Gewicht eines schwimmenden Körpers gleich dem Gewicht der von ihm verdrängten Wassermenge ist.



Wenn das Volumen der Kugel mit V und ihre Dichte mit ρ_K bezeichnet wird, dann ist ihr Gewicht $G_K = g \cdot \rho_K \cdot V$. [2)]
Der Auftrieb, den die Kugel durch das Wasser erfährt, lässt sich berechnen durch
$F_A = g \cdot \rho_W \cdot V_u$.
Dabei gilt:
g: Erdbeschleunigung; ρ_W: Dichte von Wasser;
V_u:Volumen des eingetauchten Kugelabschnittes

Wenn die Kugel ins Wasser gesetzt wird, dann stellt sich ein Gleichgewichtszustand her.
Es gilt: $G_K = F_A$, also $\rho_K \cdot V = \rho_W \cdot V_u$. Daraus folgt $\frac{V_u}{V} = \frac{\rho_K}{\rho_W}$ (Gleichung (1)).

Mit V_O wird der obere, aus dem Wasser ragende Kugelabschnitt mit der Höhe h bezeichnet.

Man erhält mit $V = V_u + V_O$:
$\frac{V_u}{V} = \frac{V - V_O}{V} = 1 - \frac{V_O}{V}$ (Gleichung (2)).
Gleichsetzen von (1) und (2) ergibt: $1 - \frac{V_O}{V} = \frac{\rho_K}{\rho_W}$ (Gleichung (3)).

V_O hat die Form einer eines Kugelabschnittes.
Für dessen Volumen gilt $V_O = \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3r - h)$.
Für das Kugelvolumen gilt $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.
Die beiden Gleichungen (1) und (2) werden in (3) eingesetzt:

$$1 - \frac{\frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3r - h)}{\frac{4}{3}\pi \cdot r^3} = \frac{\rho_K}{\rho_W}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{3h^2}{4r^2} + \frac{h^3}{4r^3} = \frac{\rho_K}{\rho_W}$$

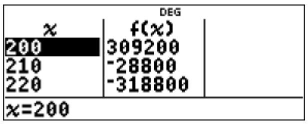
Einsetzen der gegebenen Größen r = 130 und $\frac{\rho_K}{\rho_W} = \frac{0{,}1}{1} = 0{,}1$ führt auf
$1 - \frac{3 \cdot h^2}{4 \cdot 130^2} + \frac{h^3}{4 \cdot 130^3} = 0{,}1$. Nach Multiplikation mit $4 \cdot 130^3$ ergibt sich

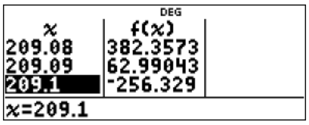
$$4 \cdot 130^3 - 3 \cdot 130 \cdot h^2 + h^3 = 0{,}1 \cdot 4 \cdot 130^3$$

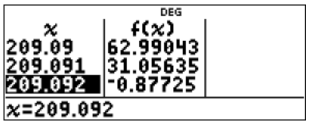
Am einfachsten ist die Anwendung einer tabellarischen Darstellung zum Lösen der Gleichung $4 \cdot 130^3 - 3 \cdot 130 \cdot h^2 + h^3 = 0{,}1 \cdot 4 \cdot 130^3$.

Das Ermitteln der Lösungen der Gleichung ist gleichbedeutend mit dem Bestimmen der Nullstellen der Funktion $f(h) = h^3 - 390 \cdot h^2 + 3{,}6 \cdot 130^3$.

Dazu werden die Funktionswerte im Intervall $0 \leq h \leq 260$ tabelliert. Man beginnt mit einer Schrittweite von 10 cm und schaut, in welchem Intervall ein Vorzeichenwechsel stattfindet. Durch weitere Verfeinerungen der Schrittweite lässt sich ein Intervall für die Nullstelle weiter eingrenzen.





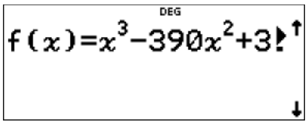


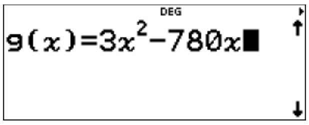
Im Intervall [209,091; 209,092] liegt vermutlich eine Nullstelle, d.h. der oberhalb der Wasseroberfläche liegende Kugelabschnitt des XXL-Fußballs hat eine Höhe von etwa 209,1 cm.
Der XXL-Fußball würde bis zu einer Höhe von etwa 260 cm – 209,1 cm = 50,9 cm in Wasser eintauchen.

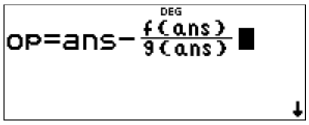
Alternative 1:
Das Newtonsche Näherungsverfahren kann zum Lösen der Gleichung
$4 \cdot 130^3 - 3 \cdot 130 \cdot h^2 + h^3 = 0{,}1 \cdot 4 \cdot 130^3$ verwendet werden:

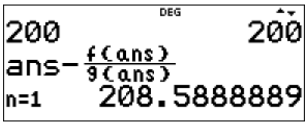
$f(h) = h^3 - 390 \cdot h^2 - 0{,}1 \cdot 4 \cdot 130^3 + 4 \cdot 130^3$
$f(h) = h^3 - 390 \cdot h^2 + 3{,}6 \cdot 130^3$
$f'(h) = 3h^2 - 780 \cdot h$

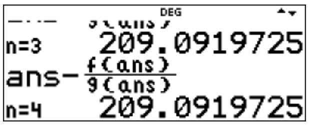
Newtonsches Näherungsverfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ mit Startwert x_0
Mit dem TI-30X Prio MathPrint™:







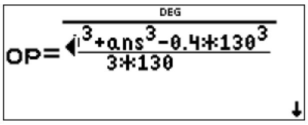


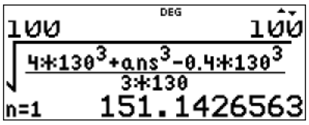


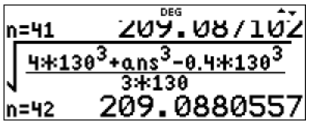
Das Newtonverfahren mit dem Startwert 200 ergibt als Lösung bereits nach wenigen Schritten $h \approx 209{,}1\ cm$.

Der XXL-Fußball würde bis zu einer Höhe von etwa 260 cm – 209,1 cm = 50,9 cm in Wasser eintauchen.

Alternative 2:
Um das allgemeine Iterationsverfahren anwenden zu können, wird die Gleichung in eine Form $h = \varphi(h)$ gebracht, z. B. auf $h = \sqrt[2]{\frac{4 \cdot 130^3 + h^3 - 0{,}4 \cdot 130^3}{3 \cdot 130}}$.
Mit dem TI-30X Prio MathPrint™ wird das allgemeine Iterationsverfahren mithilfe der Optionen ∑ und ∏ realisiert.







Das allgemeine Iterationsverfahren mit dem Startwert 100 ergibt als Lösung $h \approx 209{,}1\ cm$.

Der XXL-Fußball würde bis zu einer Höhe von etwa 260 cm – 209,1 cm = 50,9 cm in Wasser eintauchen.

Quellen

1) https://www.lvz.de/lokales/leipzig/em-2024-in-leipzig-der-spielball-kommt-und-rollt-als-xxl-version-auf-den-lvz-vorplatz-S5NFWL6ZYNCILCXJBR6EKYQH4A.html; zuletzt eingesehen am 18.06.2024
2) http://www.hjcaspar.de/hpxp/mpart/dateien/textdateien/kugel.htm, zuletzt eingesehen am 18.06.2024

Autor:
Dr. Wilfried Zappe