

Veranschaulichung von Gesetzmäßigkeiten beim Hintereinanderausführen von zwei bzw. drei Achsenspiegelungen mit der Applikation Geometry

Wolfgang Häfner

Das Ziel dieses Beitrags ist es, Gesetzmäßigkeiten, die sich bei einer Verkettung von zwei bzw. drei Achsenspiegelungen ergeben, so zu demonstrieren, dass das Verständnis der Zusammenhänge und damit entsprechende Beweise unterstützt werden.

Was die Beweise selbst betrifft, kann man zahlreiche Quellen nutzen.

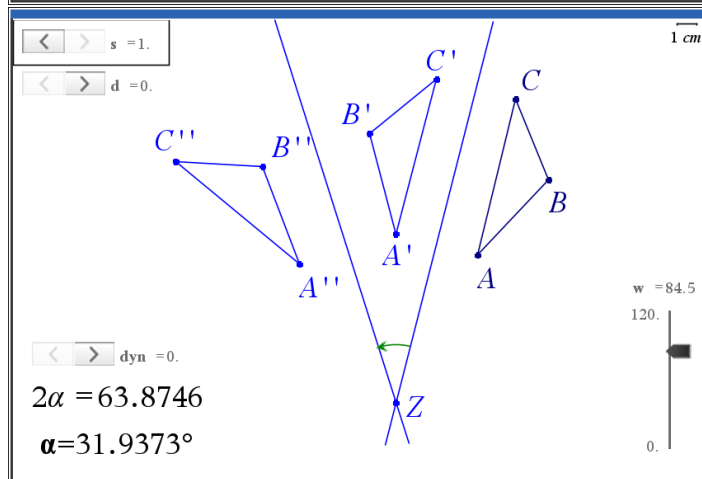
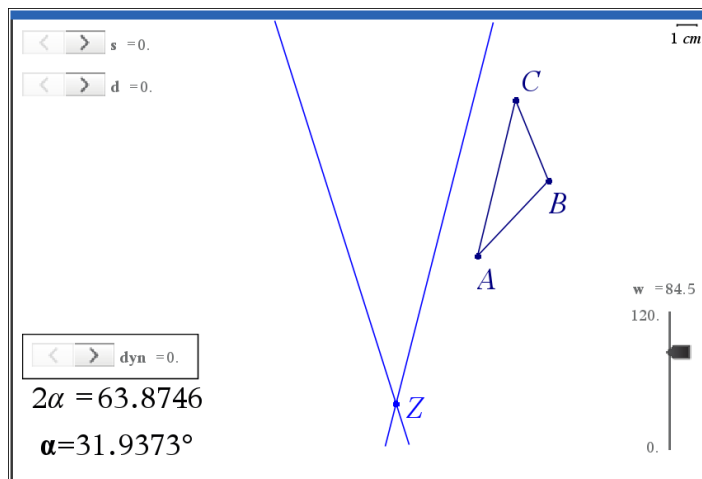
Mit dem Beitrag werden auch die zugehörigen TI-Nspire-Dateien veröffentlicht (Spiegelung_2.tns, Spiegelung_3.tns), weil hier nicht an deren Erstellung, sondern deren Nutzung gedacht ist.

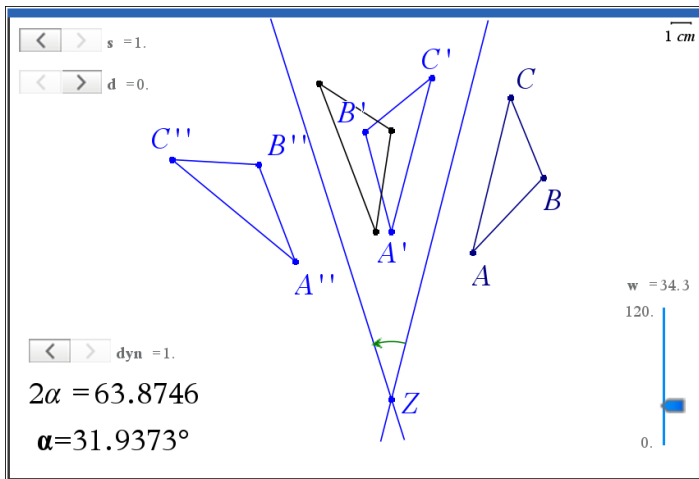
Die Idee zu diesem Beitrag entwickelte ich, als ich einer Studentin für das Grundschullehramt bei der Vorbereitung einer Klausur half. Bis dahin wusste ich nicht genau, womit sich künftige Grundschullehrer in ihrem Studium beschäftigen.

1. Hintereinanderausführung von zwei Achsenspiegelungen

Die Veranschaulichungen zu dieser Problematik sind in der Datei Spiegelung_2.tns zu finden.

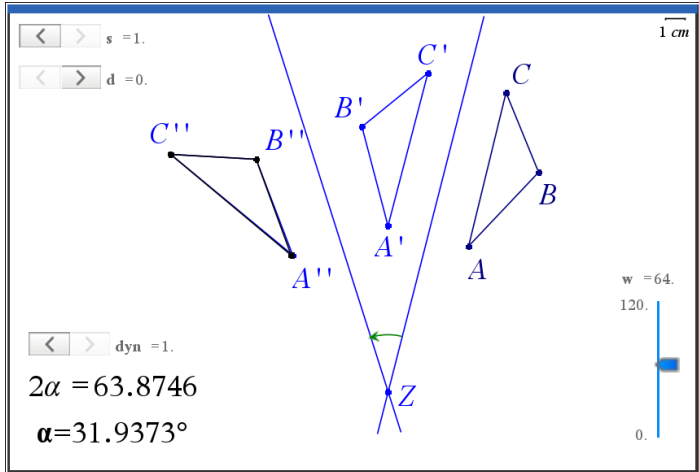
1.1. Die Hintereinanderausführung von zwei Achsenspiegelungen bei sich in Z schneidenden Achsen kann durch eine Drehung um Z ersetzt werden. Dabei ist der Drehwinkel doppelt so groß wie der gerichtete Winkel α zwischen der ersten und der zweiten Spiegelachse.





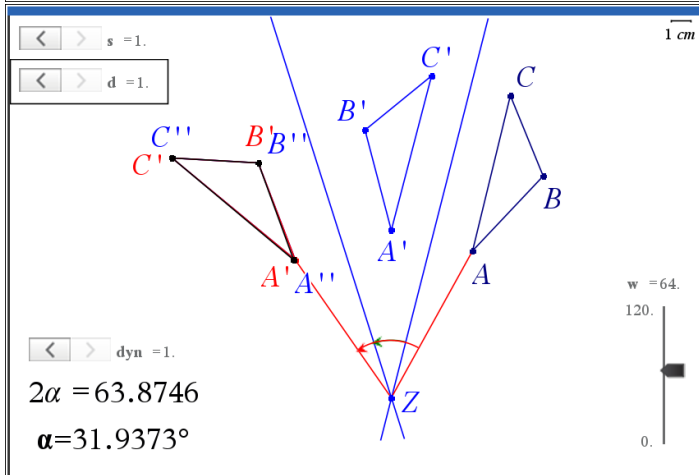
$\text{dyn} = 1.$

$w = 34.3$

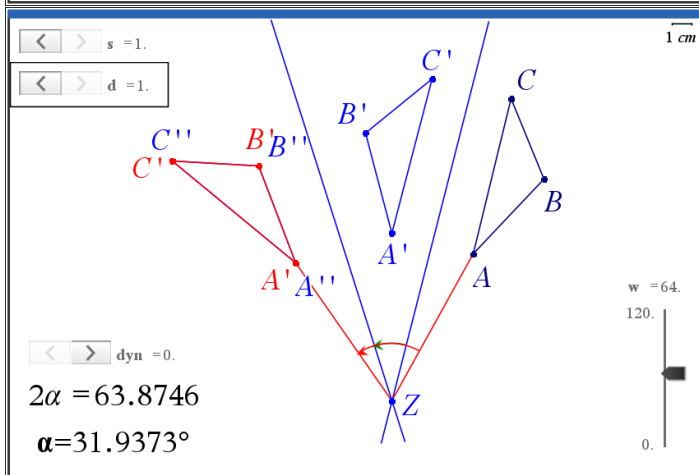


$\text{dyn} = 1.$

$w = 64.$



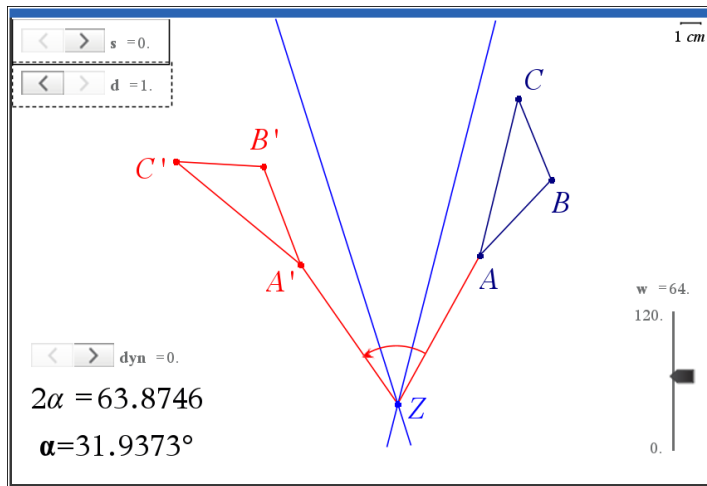
$d = 1.$



$d = 1.$

$\text{dyn} = 0.$





s = 0.
 d = 1.
 dyn = 0.

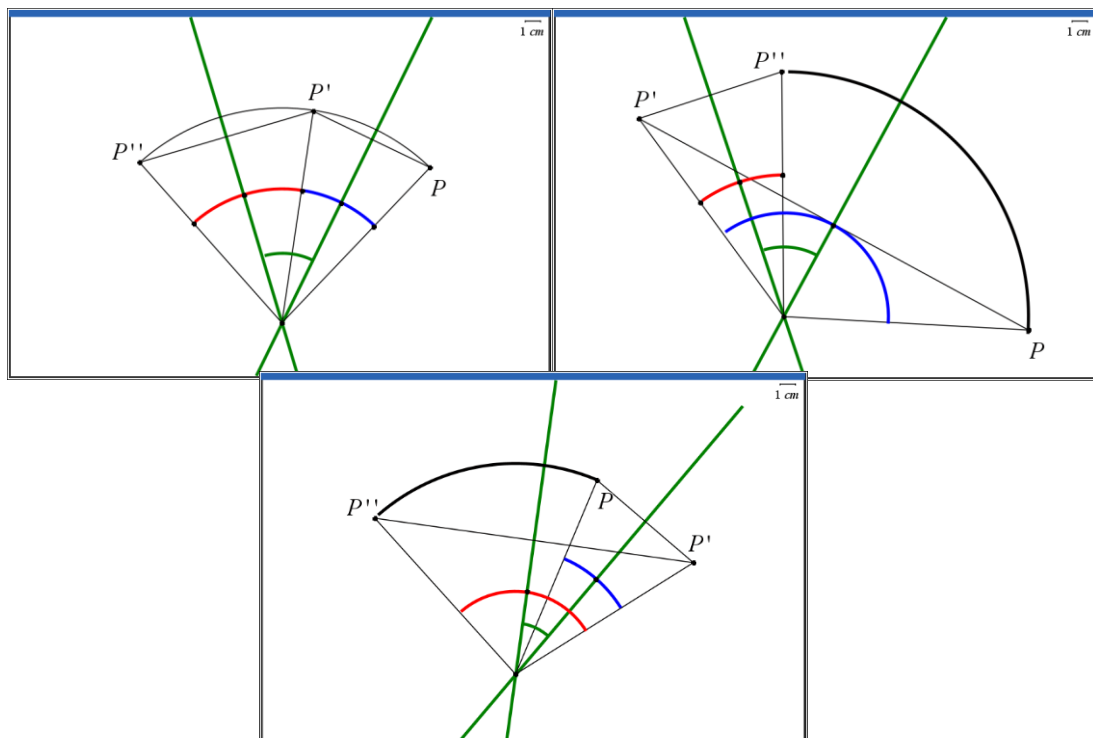
Um diese Gesetzmäßigkeit zu veranschaulichen, geht man in der Datei Spiegelung_2.tns im Problem 1 wie folgt vor:

Die Schieberegler für die Variablen s, d und dyn werden auf Null gestellt. Danach stellt man s auf 1. Die Hintereinanderausführung der Spiegelungen wird sichtbar.

Wenn dyn=1 gewählt wird, kann die Drehung dynamisch veranschaulicht werden, wobei der Drehwinkel mit Hilfe des Schiebereglers für die Variable w verändert werden kann. Stellt man d auf 1, so wird die Drehung mit dem Drehwinkel 2α eingeblendet und der Zusammenhang ist ersichtlich.

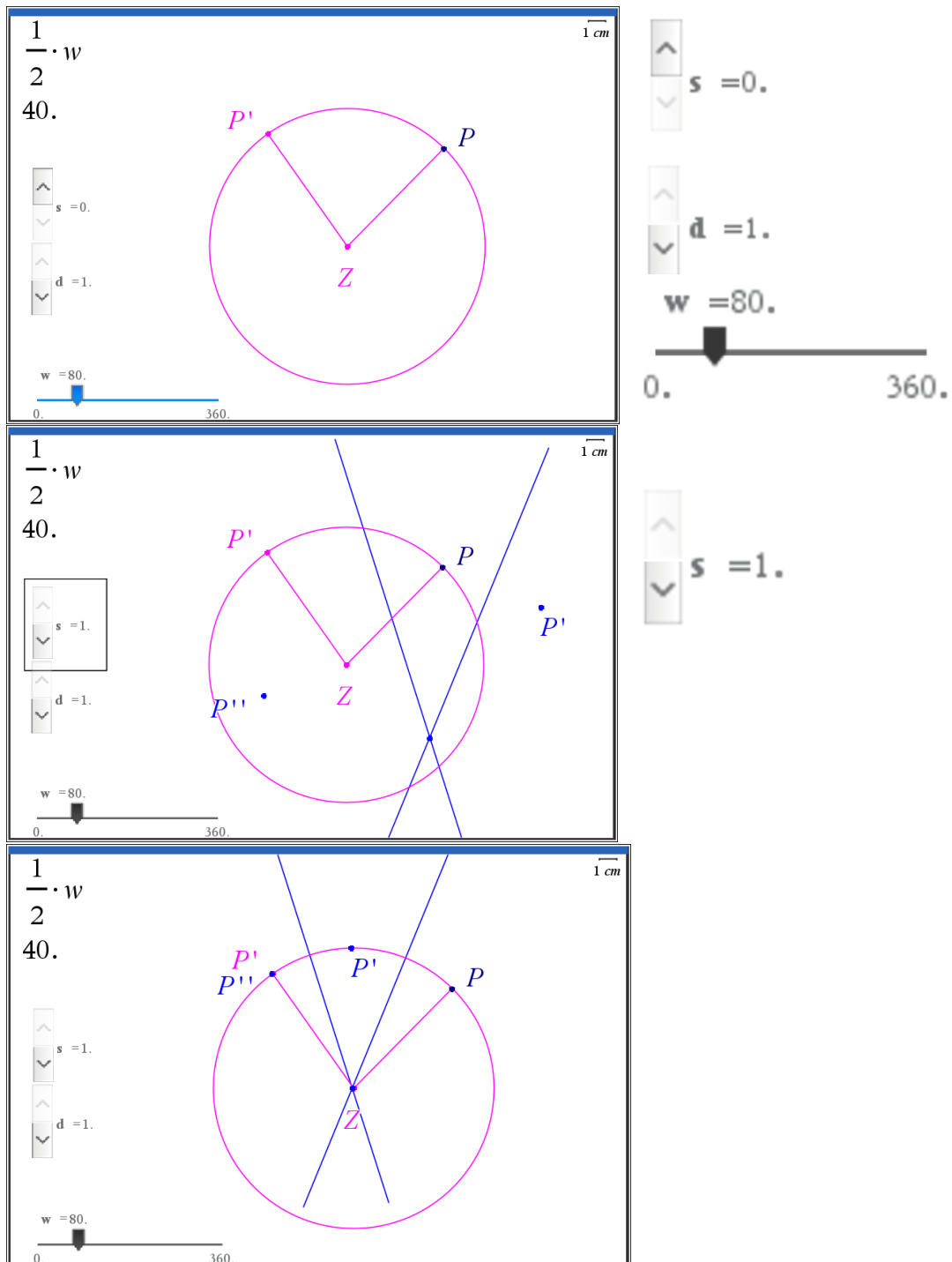
Die nächsten Geometry-Seiten dienen der Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen dem Drehwinkel, der die erste auf die zweite Achse abbildet und dem Drehwinkel, der die Hintereinanderausführung der Spiegelungen ersetzt.

Es sind verschiedene Fälle dargestellt. Variationen sind durch die Bewegung des Punktes P und der Spiegelachsen möglich, wobei man darauf achten sollte, den jeweils betrachteten Fall zu erhalten.



1.2. Umkehrung

Jede Drehung um Z mit dem Drehwinkel α kann durch die Hintereinanderausführung zweier Achsenspiegelungen ersetzt werden, wobei sich die Achsen in Z unter einem Winkel von $\frac{1}{2}\alpha$ schneiden.

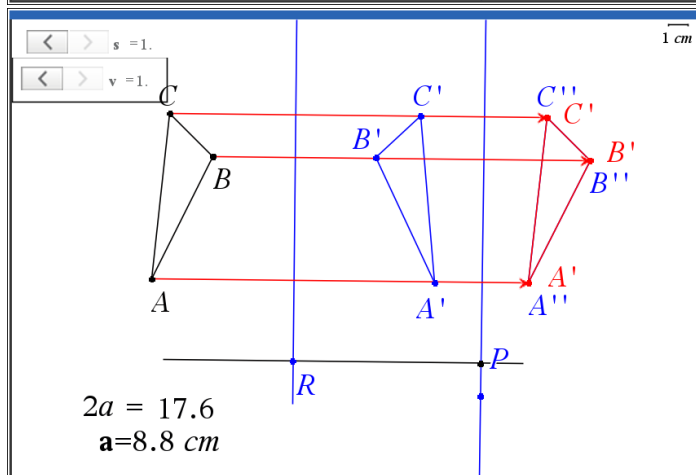
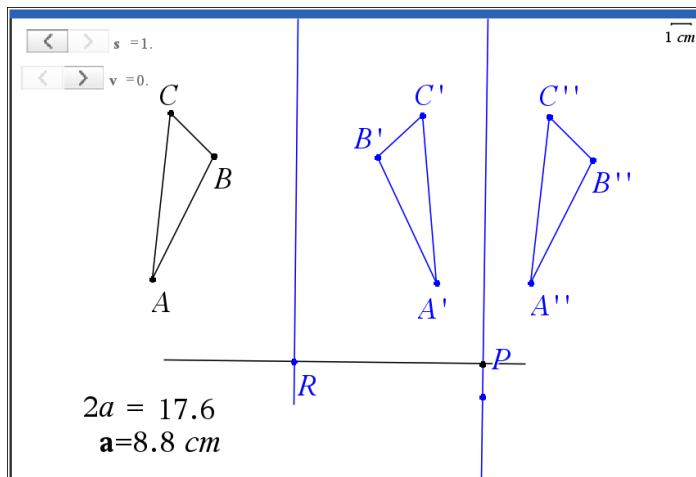


Zur Veranschaulichung dient die Geometry-Seite Problem 5.

Die Schieberegler für die Variablen s und d werden auf Null gestellt. Danach stellt man d auf 1. Die Drehung wird eingeblendet. Mit dem Schieberegler für die Variable w lässt sich der Drehwinkel variieren.

Stellt man s auf 1, werden zwei Geraden sichtbar, die sich unter dem Winkel $\frac{1}{2}w$ schneiden. Verschiebt man den Schnittpunkt der beiden Geraden auf Z , so wird der Zusammenhang sichtbar. Dabei sind P' und P'' die jeweiligen Bilder von P bzw. P' bei den Achsenspiegelungen.

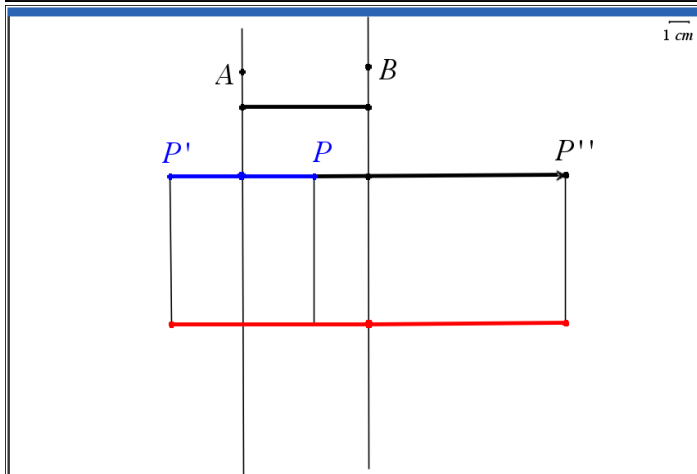
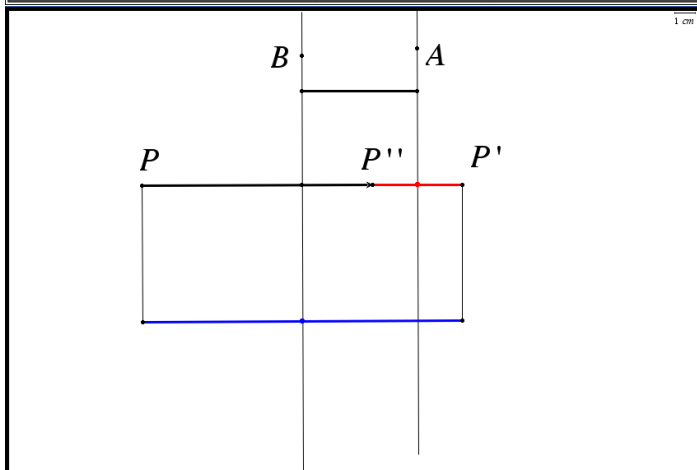
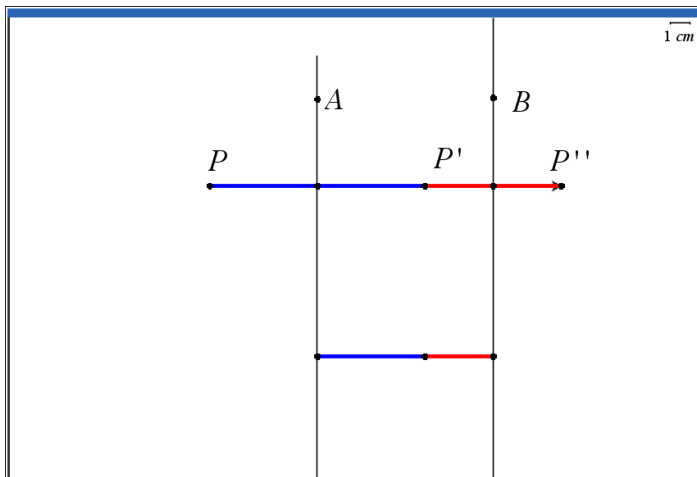
- 1.3. Die Hintereinanderausführung von zwei Achsenspiegelungen **bei parallelen Achsen** kann durch eine Verschiebung ersetzt werden. Dabei ist der Verschiebungspfeil doppelt so groß wie der Abstand a der Achsen und orthogonal zu diesen. Der Richtungssinn ergibt sich aus der Reihenfolge der Achsenspiegelungen.



Man stellt den Schieberegler s auf 1, damit die Hintereinanderausführung der Achsenspiegelungen sichtbar wird. Mit $v=1$ wird dann auch die Verschiebung eingeblendet.

Greift man am Dreieck bzw. an den Punkten P und R an, so lassen sich das Dreieck und die Achsen verschieben.

Die nächsten Geometry-Seiten dienen der Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen dem Abstand der Achsen und dem Abstand von Original und Bildpunkt der Verschiebung. Es sind verschiedene Fälle dargestellt. Variationen sind durch die Bewegung der Punkte P , A und B möglich, wobei man darauf achten sollte, den jeweils betrachteten Fall zu erhalten. Durch die Bewegung der Punkte A und B verschiebt man die Achsen.

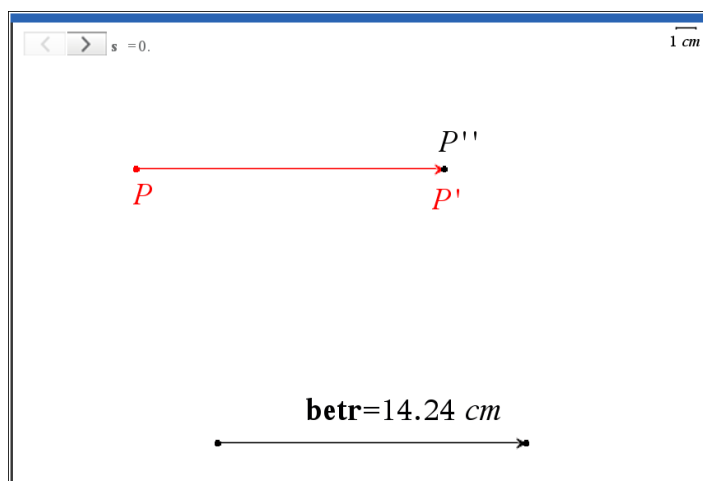


1.4. Umkehrung

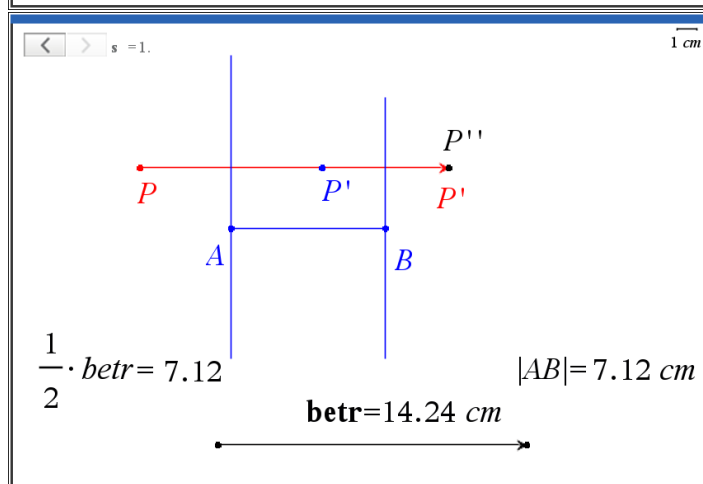
Jede Verschiebung \vec{v} lässt sich durch die Hintereinanderausführung zweier Achsenspiegelungen ersetzen, wobei der Abstand der Achsen $\left| \frac{1}{2} \vec{v} \right|$ beträgt.

Die Veranschaulichung des Zusammenhangs ist im Problem 10 ersichtlich. Hat der Schieberegler die Einstellung $s=0$, so ist nur die Verschiebung und der Verschiebungspfeil und sein Betrag zu sehen. Die Länge des Verschiebungspfeils lässt sich variieren, wenn man an seiner Spitze angreift.

In der Reglereinstellung $s=1$ ist dann auch die Hintereinanderausführung der Spiegelungen zu sehen. Variationen können durch die Bewegung der Punkte P und A erfolgen. Durch die Bewegung von A kann man die Achsen verschieben ohne ihren Abstand $\left| \frac{1}{2} \vec{v} \right|$ zu verändern.



$\leftarrow \rightarrow s = 0.$



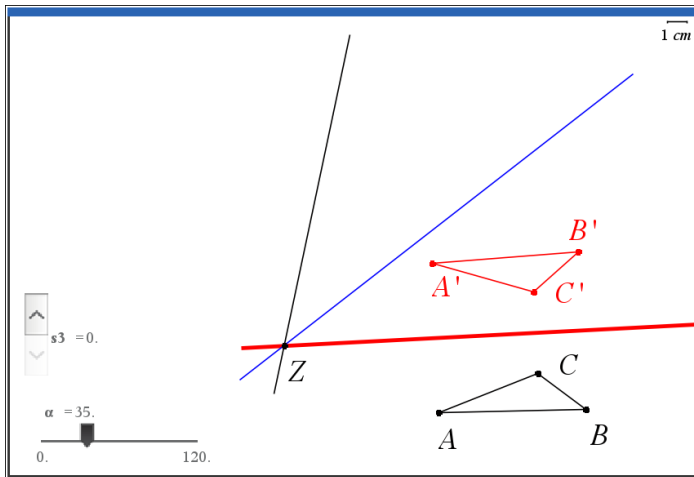
$\leftarrow \rightarrow s = 1.$

2. Hintereinanderausführung von drei Achsenspiegelungen

Die Veranschaulichungen zu dieser Problematik sind in der Datei Spiegelung_3.tns zu finden. Die Beweise der im Folgenden demonstrierten Gesetzmäßigkeiten erfolgen unter Nutzung der Eigenschaften der Zweifachspiegelung, insbesondere des Sachverhalts, dass das Bild der zweiten Achsenspiegelung unabhängig von der Lage der Achsen ist, vorausgesetzt der Winkel zwischen den Achsen bzw. ihr Abstand bleibt konstant.

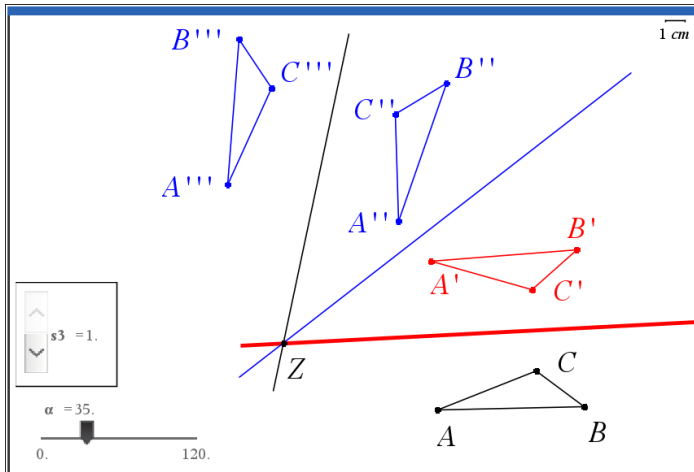
Tipp: Da es nach den unten beschriebenen Veränderungen der Geometrieseiten nicht ganz einfach ist die Ausgangssituation wieder herzustellen, sollte man dies auch nicht tun. Öffnet man die Datei neu, ohne sie zuvor abgespeichert zu haben, hat man die Ausgangslage sowieso.

2.1. Die Hintereinanderausführung von drei Achsenspiegelungen für den Fall, dass sich **die Spiegelachsen in einem Punkt schneiden**, kann durch eine einzige Achsenspiegelung ersetzt werden.

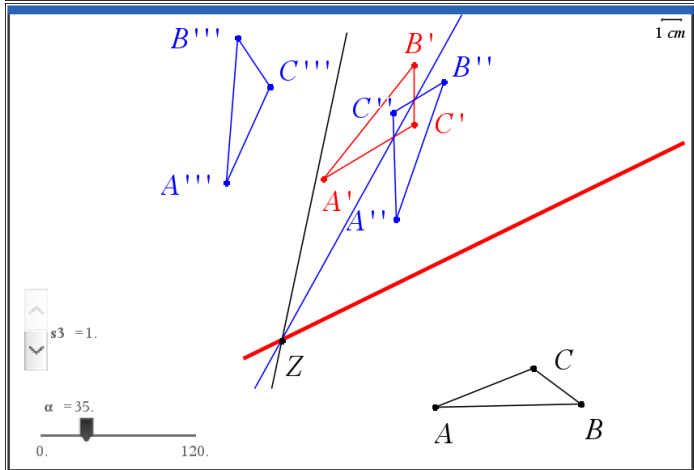


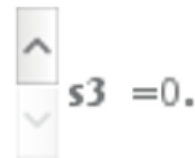
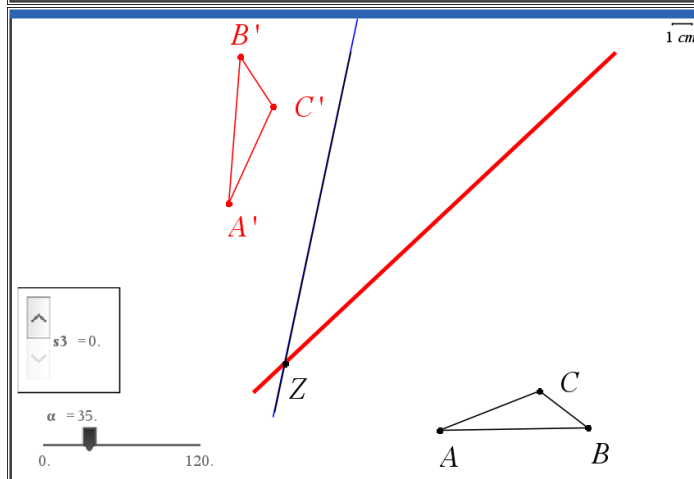
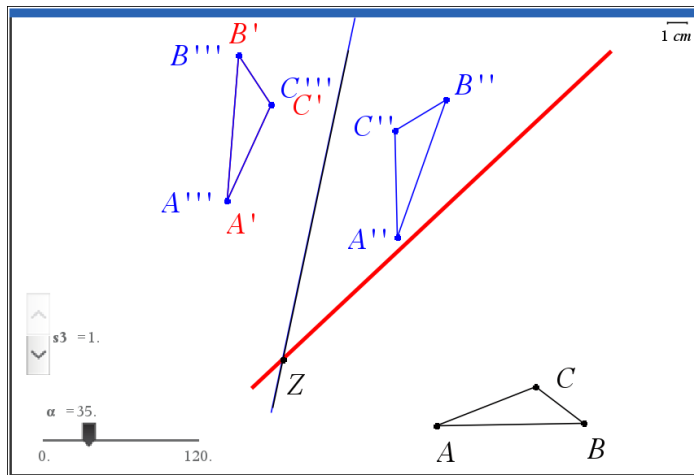
$s_3 = 0$.

$\alpha = 35^\circ$



$s_3 = 1$.





Zur Veranschaulichung nutzen wir das Problem 1 in der TI-Nspire-Datei.

Mit dem Schieberegler für α reguliert man den Winkel zwischen der ersten (rot) und zweiten (blau) Spiegelachse. Auch die Lage der dritten Achse (schwarz) kann man ändern, indem man sie anfasst und um den Punkt Z dreht.

Hat der andere Schieberegler die Einstellung $s_3=0$, so sieht man außer den drei Achsen das Bild $A'B'C'$ des Dreiecks ABC bei Spiegelung an der roten Achse.

Stellt man $s_3=1$ ein, so wird die Hintereinanderausführung der drei Spiegelungen eingeblendet.

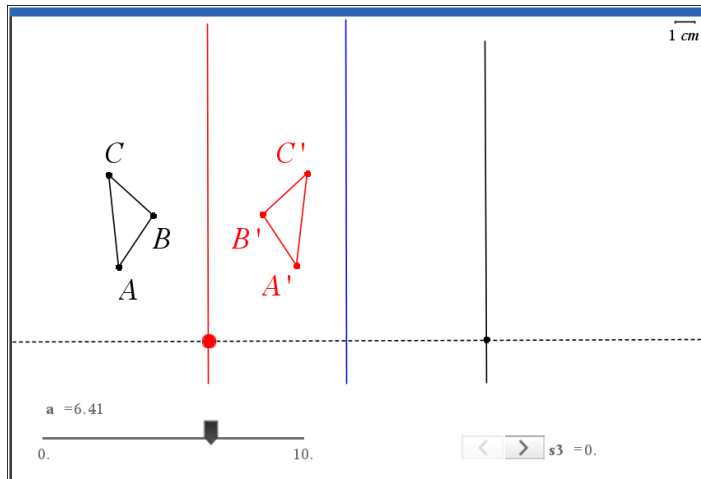
Die Achse der Ersatzspiegelung kann nun wie folgt konstruiert werden:

Die rote Achse wird um Z gedreht bis die blaue Achse mit der schwarzen identisch ist.

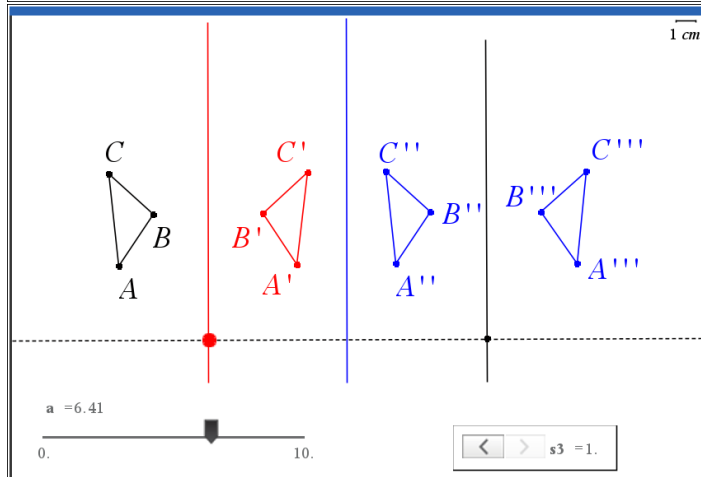
Dabei ändert sich der Winkel zwischen roter und blauer Achse nicht.

Es ist ersichtlich, dass das Bild $A'B'C'$ mit $A'''B'''C'''$ identisch ist. Demnach ist die „neue“ rote Achse die Achse der Ersatzspiegelung, was dann auch in der Reglereinstellung $s_3=0$ gut zu sehen ist.

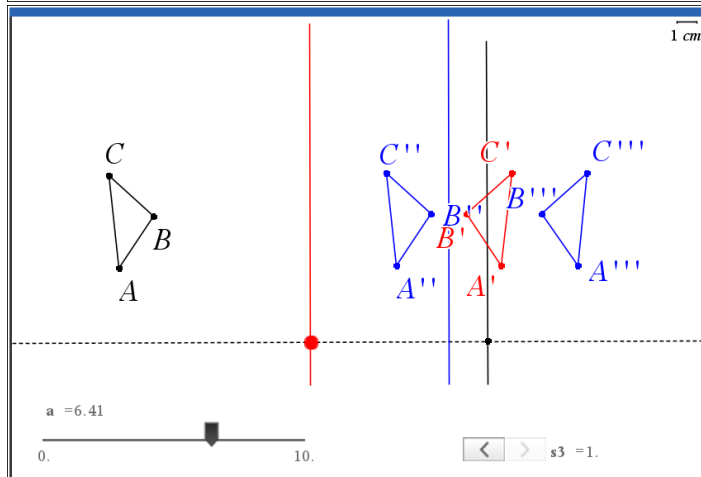
2.2. Die Hintereinanderausführung von drei Achsenspiegelungen für den Fall, dass die **Spiegelachsen parallel sind**, kann durch eine einzige Achsenspiegelung ersetzt werden.



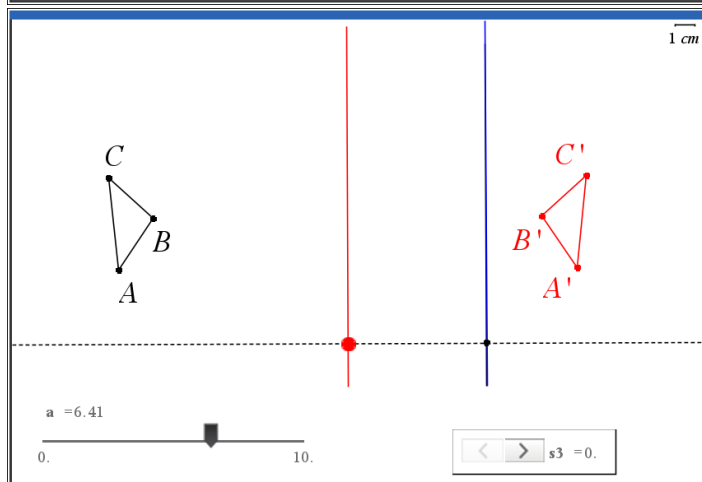
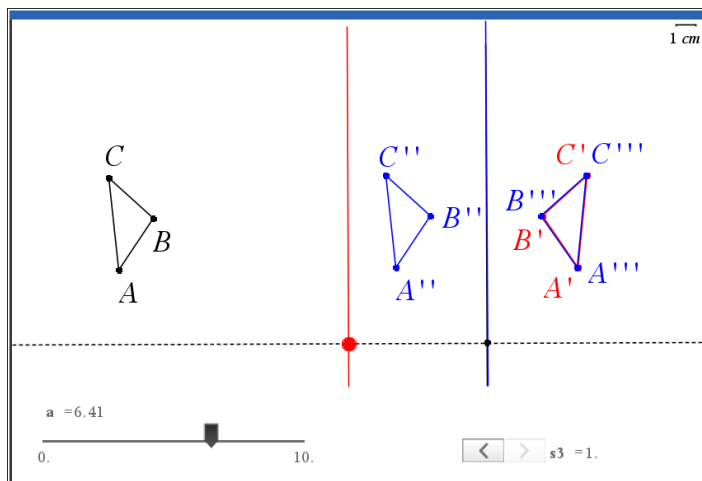
$s_3 = 0.$



$s_3 = 1.$



$s_3 = 1.$



< > s3 = 0.

Zur Veranschaulichung nutzen wir die Geometry-Seite Problem 2.

Mit dem Schieberegler für a reguliert man den Abstand zwischen der ersten (rot) und zweiten (blau) Spiegelachse. Die Lage der ersten bzw. der dritten Achse (schwarz) kann man ändern, indem man die entsprechenden Punkte auf der gestrichelten Hilfslinie anfasst und bewegt.

Hat der andere Schieberegler die Einstellung $s_3=0$, so sieht man außer den drei Achsen das Bild $A'B'C'$ des Dreiecks ABC bei Spiegelung an der roten Achse.

Stellt man $s_3=1$ ein, so wird die Hintereinanderausführung der drei Spiegelungen eingeblendet.

Die Achse der Ersatzspiegelung kann nun wie folgt konstruiert werden:

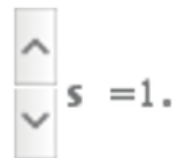
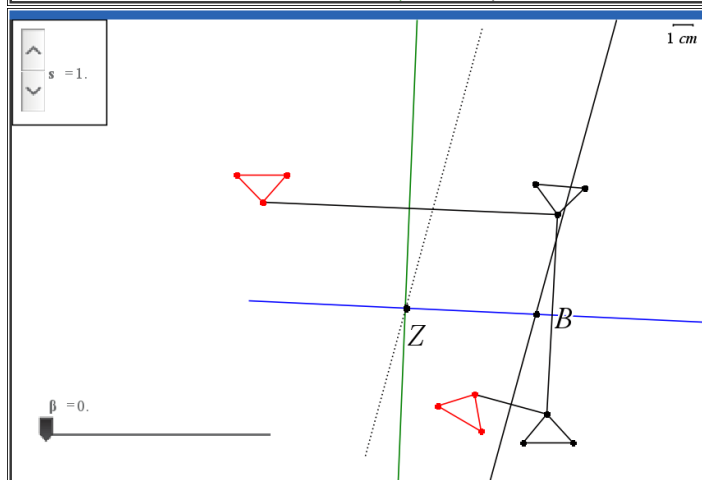
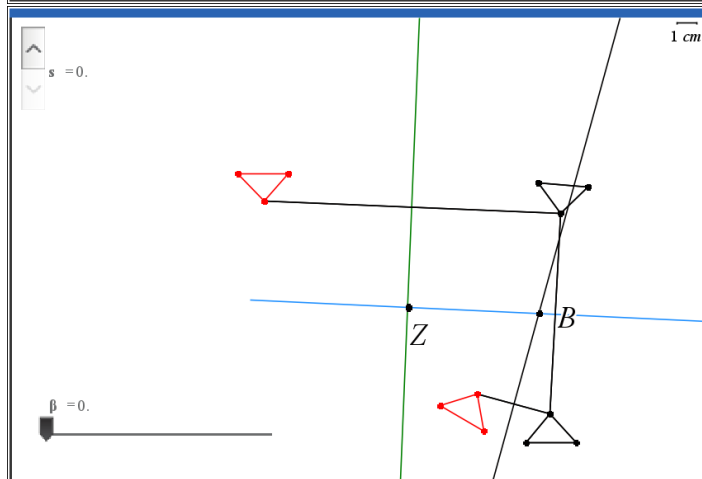
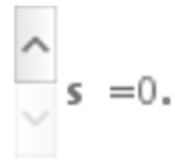
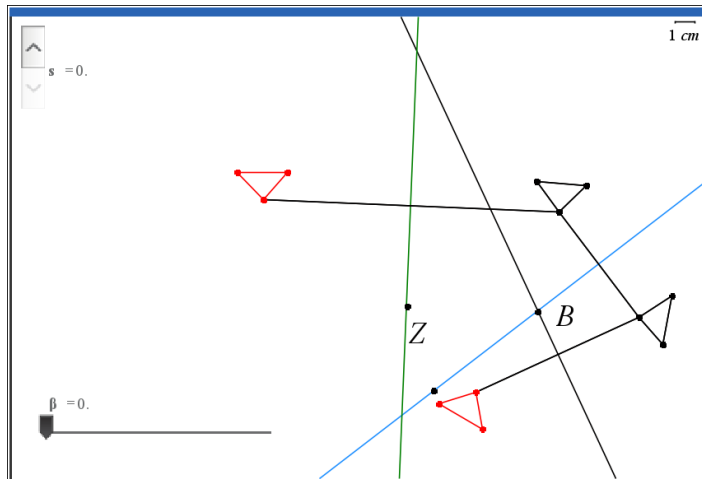
Die rote Achse wird bewegt, bis die blaue Achse mit der schwarzen identisch ist.

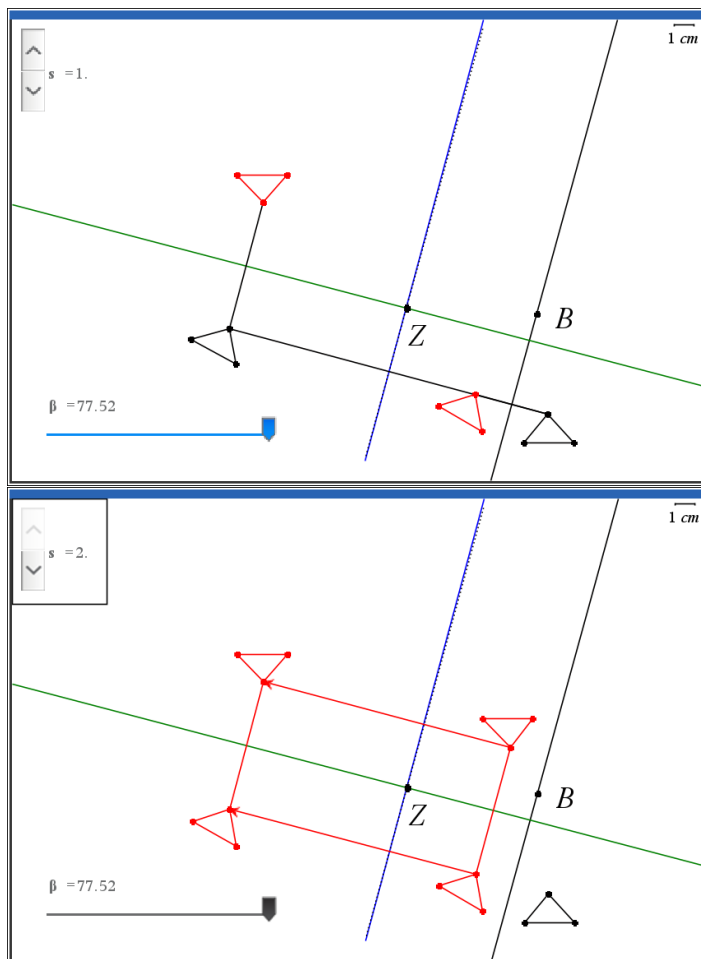
Dabei ändert sich der Abstand zwischen roter und blauer Achse nicht.

Es ist ersichtlich, dass das Bild $A'B'C'$ mit $A'''B'''C'''$ identisch ist. Demnach ist die „neue“ rote Achse die Achse der Ersatzspiegelung, was dann auch in der Reglereinstellung $s_3=0$ gut zu sehen ist.

In den noch zu besprechenden Fällen ist die erste Spiegelachse stets die schwarze, die zweite ist stets die blaue und die grüne ist die dritte. Außerdem bleiben die roten Dreiecke ABC und $A'''B'''C'''$ bei allen Konstruktionsschritten unverändert.

2.3. Die Hintereinanderausführung von drei Achsenspiegelungen für den Fall, dass **die Spiegelachsen ein Dreieck bilden**, kann durch eine Schubspiegelung ersetzt werden. Die Demonstration dazu befindet sich auf der Geometry-Seite Problem 3.





$$\beta = 77.52$$

$$s = 2.$$

Ist der Schieberegler auf $s=0$ eingestellt, so ist die Dreifachspiegelung zu sehen.

Der zweite Regler sollte auf $\beta = 0$ stehen.

Die Schubspiegelung erhält man wie folgt:

Die schwarze Achse wird gedreht, bis die blaue orthogonal zur grünen ist. Das ist erreicht, wenn die blaue Achse durch den Punkt Z geht.

Vor den weiteren Schritten muss $s=1$ eingestellt werden.

Nun wird die blaue und die grüne Achse mit Hilfe des Schiebereglers für β gedreht, bis die grüne Achse orthogonal zur schwarzen ist. Dazu müssen sich die blaue Achse und die gestrichelte Hilfslinie decken.

Schaltet man zuletzt s auf 2 ($s=2$), so wird die resultierende Schubspiegelung eingeblendet. Die Spiegelung erfolgt an der grünen Geraden, die Verschiebung parallel zu dieser Achse.

- Die Hintereinanderausführung von drei Achsenspiegelungen für den Fall, dass **genau zwei der drei Spiegelachsen parallel sind**, kann durch eine Schubspiegelung ersetzt werden.

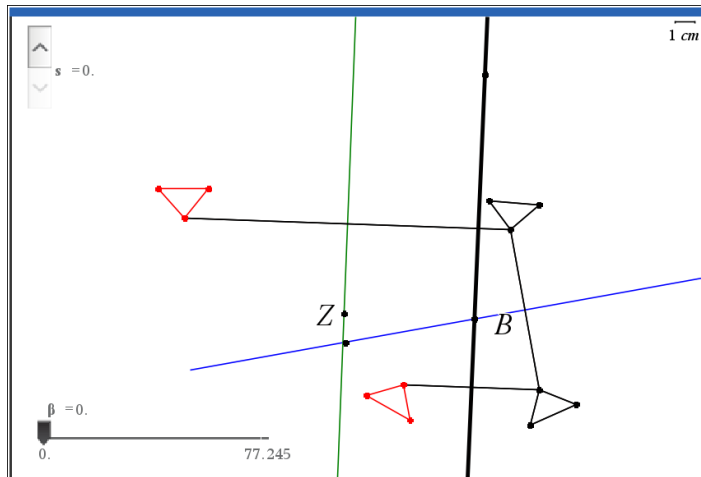
Die Lösung dazu befindet sich auf den Geometry-Seiten Probleme 4,5 und 6.

Auch hier gilt:

Ist der Schieberegler auf $s=0$ eingestellt, so ist die Dreifachspiegelung zu sehen.

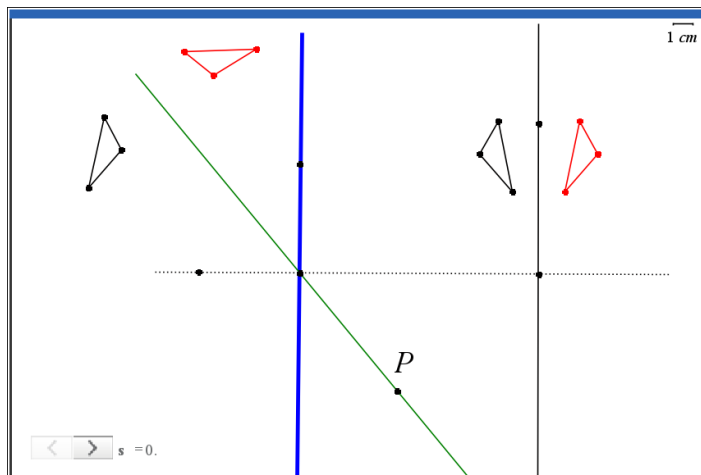
Der zweite Regler sollte auf $\beta = 0$ stehen.

3.1. Die erste und die dritte Achse sind parallel

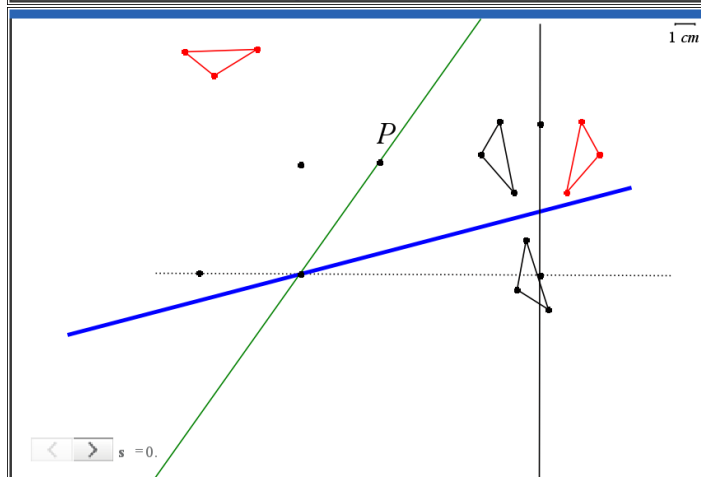


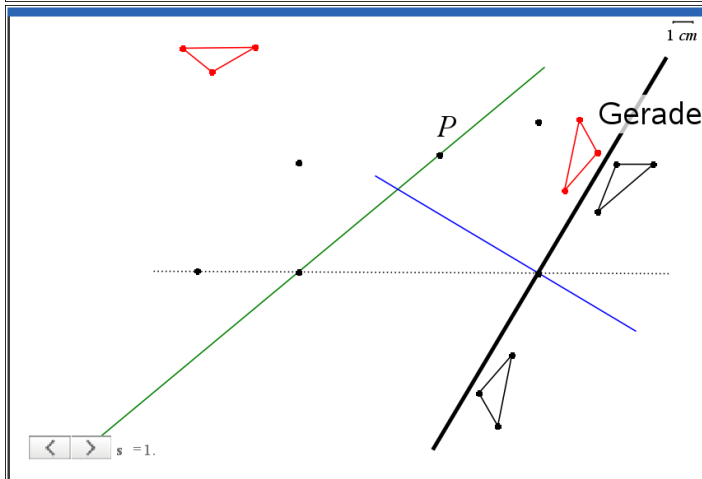
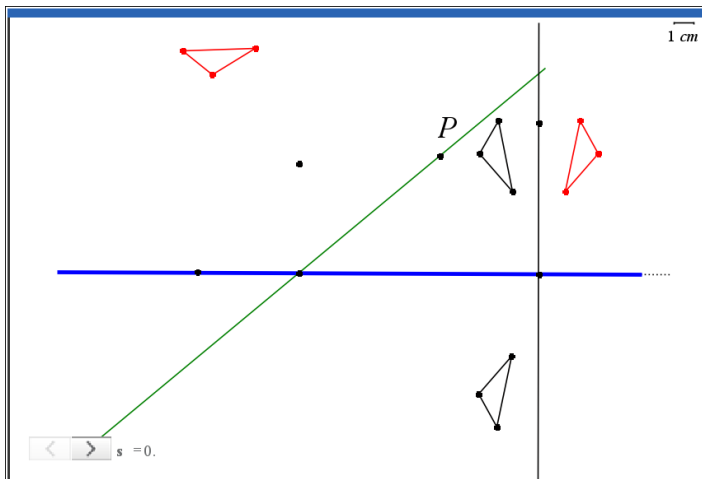
Die Schubspiegelung erhält man auf die gleiche Weise wie unter 2.3. beschrieben.

3.2. Die erste und die zweite Achse sind parallel

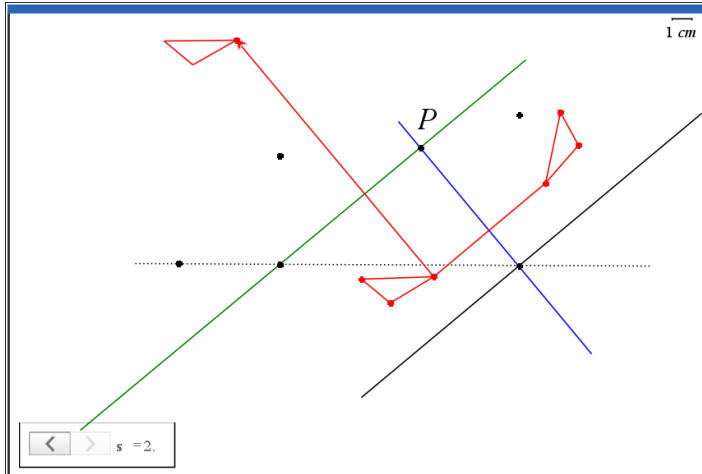
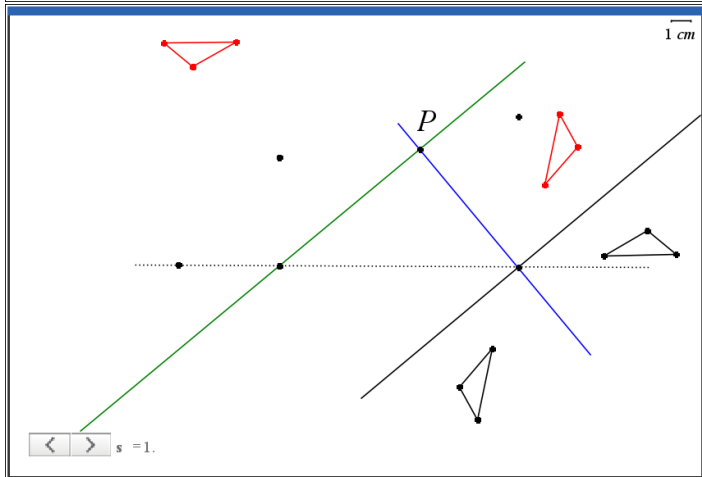


< > $s = 0.$





< > s = 1.



< > s = 2.

Die Schubspiegelung erhält man wie folgt:

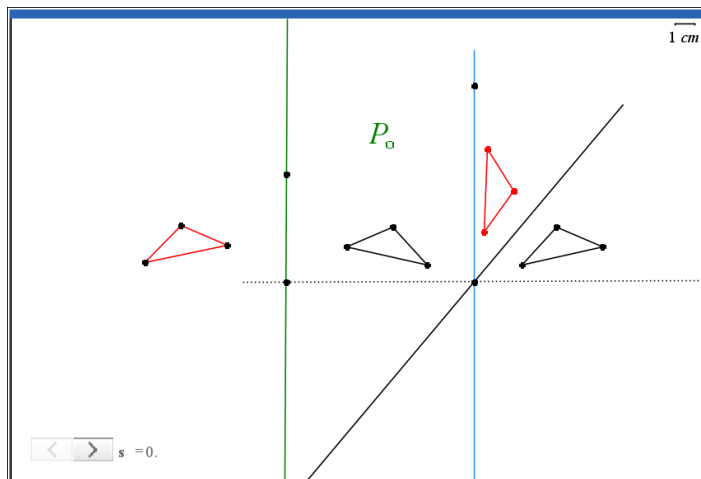
Die blaue Achse wird gedreht, bis sie orthogonal zur schwarzen ist. Das ist erreicht, wenn sich die blaue Achse und die gestrichelte Hilfslinie decken.

Vor den weiteren Schritten muss $s=1$ eingestellt werden.

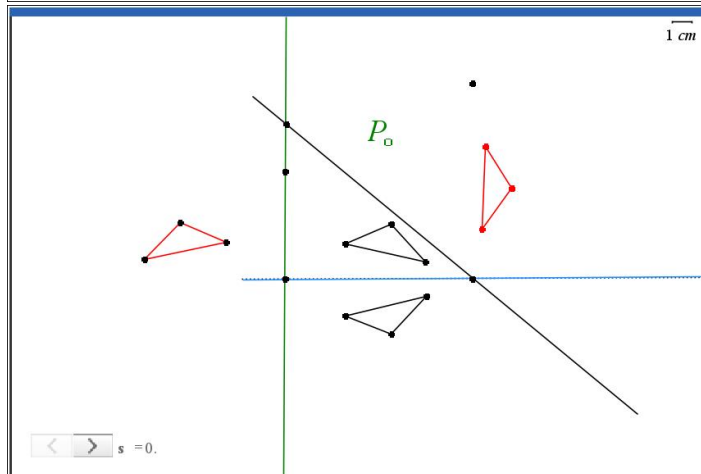
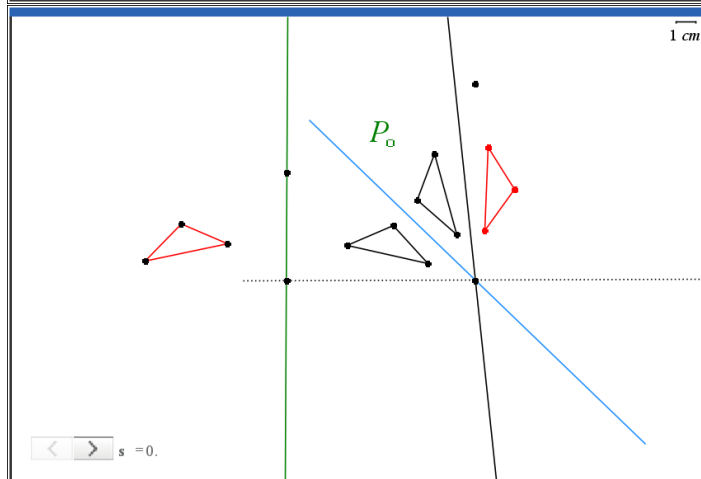
Nun wird die schwarze und damit auch die blaue Achse gedreht, bis die blaue Achse orthogonal zur grünen ist. Dazu muss die blaue Achse durch den Hilfspunkt P gehen.

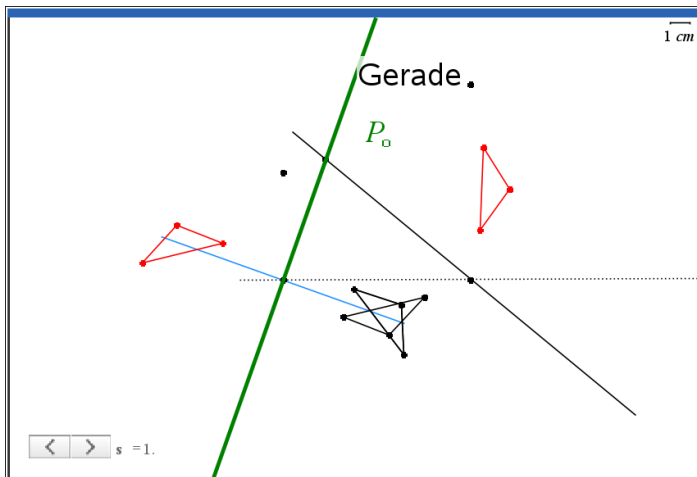
Schaltet man zuletzt s auf 2 ($s=2$), so wird die resultierende Schubspiegelung eingeblendet. Die Spiegelung erfolgt an der blauen Achse, die Verschiebung parallel zu dieser.

3.3. Die zweite und die dritte Achse sind parallel

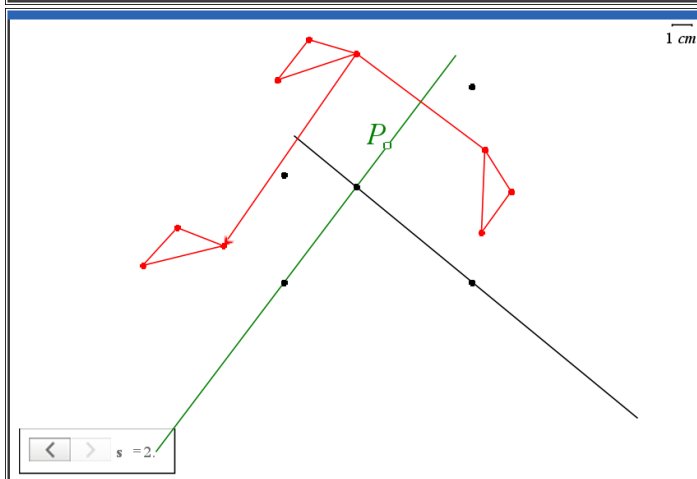
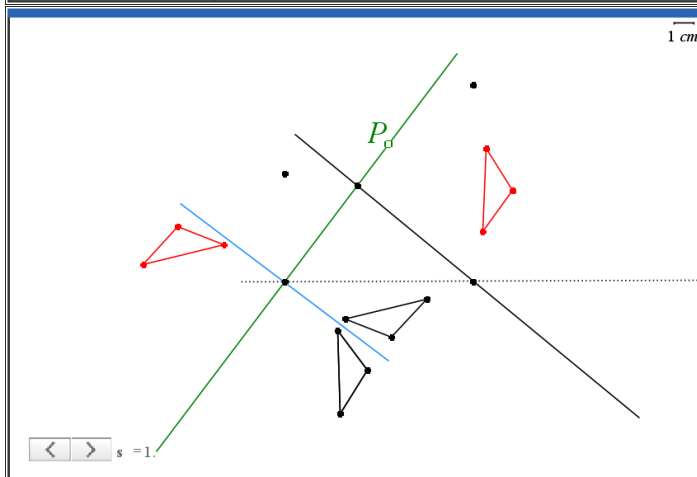


$s = 0$.





< > s = 1.



< > s = 2.

Die Schubspiegelung erhält man wie folgt:

Die blaue Achse wird gedreht, bis sie orthogonal zur grünen ist. Das ist erreicht, wenn sich die blaue Achse und die gestrichelte Hilfslinie decken.

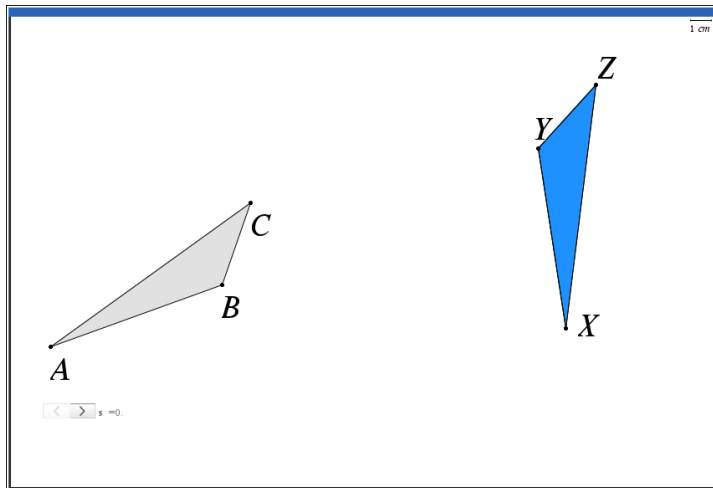
Vor den weiteren Schritten muss $s=1$ eingestellt werden.

Nun wird die grüne und damit auch die blaue Achse gedreht, bis die grüne Achse orthogonal zur schwarzen ist. Dazu muss die grüne Achse durch den Hilfspunkt P gehen.

Schaltet man zuletzt s auf 2 ($s=2$), so wird die resultierende Schubspiegelung eingeblendet. Die Spiegelung erfolgt an der grünen Achse, die Verschiebung parallel zu dieser.

4. Eine Kongruenzabbildung

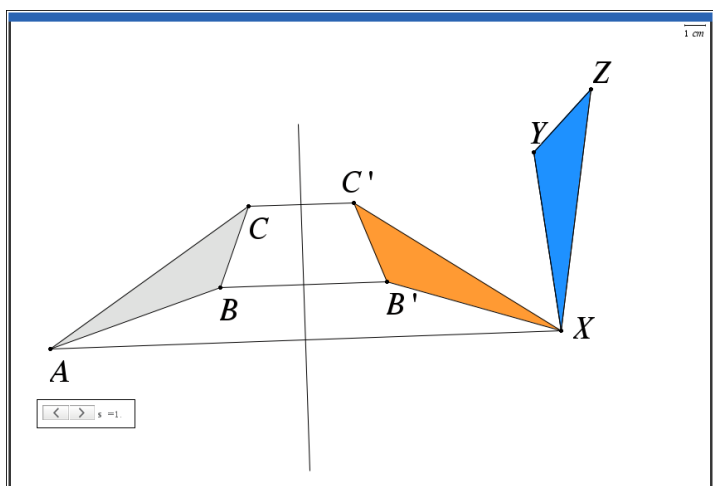
Die Abbildung des Dreiecks ABC auf das kongruente Dreieck XYZ erfolgt durch die Hintereinanderausführung von drei Achsenspiegelungen.



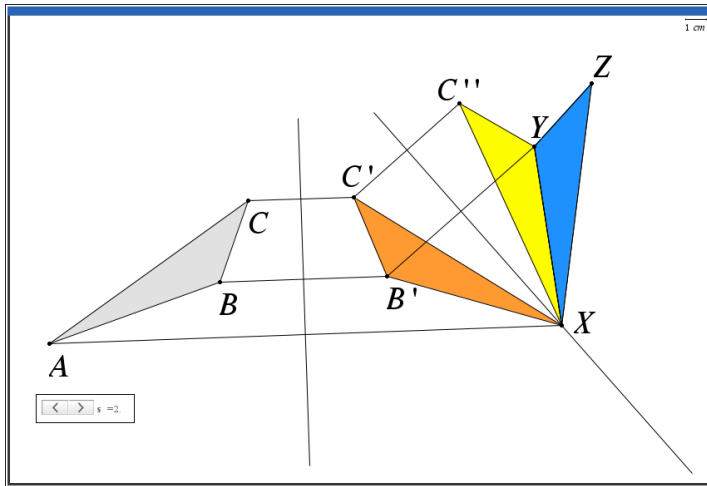
< > s = 0.

Es sind folgende Achsenspiegelungen erforderlich.

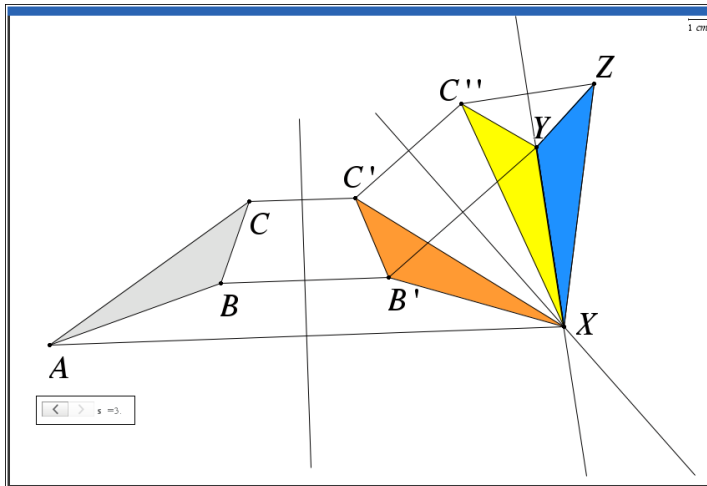
1. Spiegelung an der Mittelsenkrechten von \overline{AX}
Das Bild von A ist dann X.
2. Spiegelung an der Mittelsenkrechten von $\overline{B'Y}$
Die Achse geht durch den Punkt X. Der Punkt X wird auf sich selbst, der Punkt B' auf Y abgebildet.
3. Spiegelung an der Mittelsenkrechten von $\overline{C''Z}$
Die Achse geht durch die Punkte X und Y, die also auf sich selbst abgebildet werden.
Der Punkt C'' wird auf Z abgebildet.



< > s = 1.



< > s = 2.



< > s = 3.

Die Bilder erhält man, wenn man s am Schieberegler jeweils um 1 erhöht.

Quellenangabe:

Prof. Dr. R. Deissler, PH-Freiburg, "Einführung in die Geometrie", 2005

[Microsoft Word - skript05.doc \(ph-freiburg.de\)](#)